

Aldo Ghizzetti

COMPLEMENTOS Y EJERCICIOS

DE

ANALISIS MATEMATICO

VOLUMEN II

Versión Castellana de

Edmundo Rofman

Profesor de la Universidad Nacional del Litoral

Editorial Universitaria Cultura Argentina

1969

Editorial Universitaria Cultura Argentina

Hecho el depósito que marca la ley 11.723

Se reservan los derechos en los países del Continente Americana
Impreso en Argentina

Printed in Argentina

PRESENTACION

En este Volumen II de "Complementos y Ejercicios de Analisis Matemático", la numeración de los capítulos prosigue la del Volumen I (versión castellana E.U.C.A., 1968), en correspondencia con la del Volumen II de "Lecciones de Análisis Matemático", del mismo autor, a la que se hará referencia citándola simplemente como "Lecciones".

Queda así concluida la traducción de esta obra que, a través de sus cuatro volúmenes, reúne el material de los cursos dictados actualmente en la Universidad de Roma por el Profesor Aldo Ghizzetti, cuyos destinatarios son todos aquéllos que buscan en la Matemática un instrumento eficaz para introducirse en el estudio de las Ciencias Aplicadas.

CAPITULO XX

Medida de los conjuntos acotados

1 - MEDIDA DE LOS CONJUNTOS ACOTADOS, CONJUNTOS MEDIBLES Y PROPIEDADES DE LA MEDIDA (ver "Lecciones", Cap. XX, n^{os} 1, 2, 3, 4).

Demstrar que un paralelepípedo (recto u oblicuo) de base rectangular es un conjunto medible y que su volumen coincide con el asignado por la geometría elemental.

Que tal paralelepípedo P sea medible es una consecuencia inmediata del hecho de que su frontera esté constituida por dos rectángulos y cuatro paralelogramos y, por ende, tenga volumen nulo.

Sean $OABC$, $O'A'B'C'$ las dos bases rectangulares de P , con las dimensiones $OA = a$, $OB = b$.

Fijemos un sistema de ejes cartesianos ortogonales con el origen en O y semiejes positivos x e y coincidentes con las semirrectas OA , OB , y el eje z perpendicular a las dos bases (lo que significa que, en general, no se sobrepone a la arista OO') y orien-

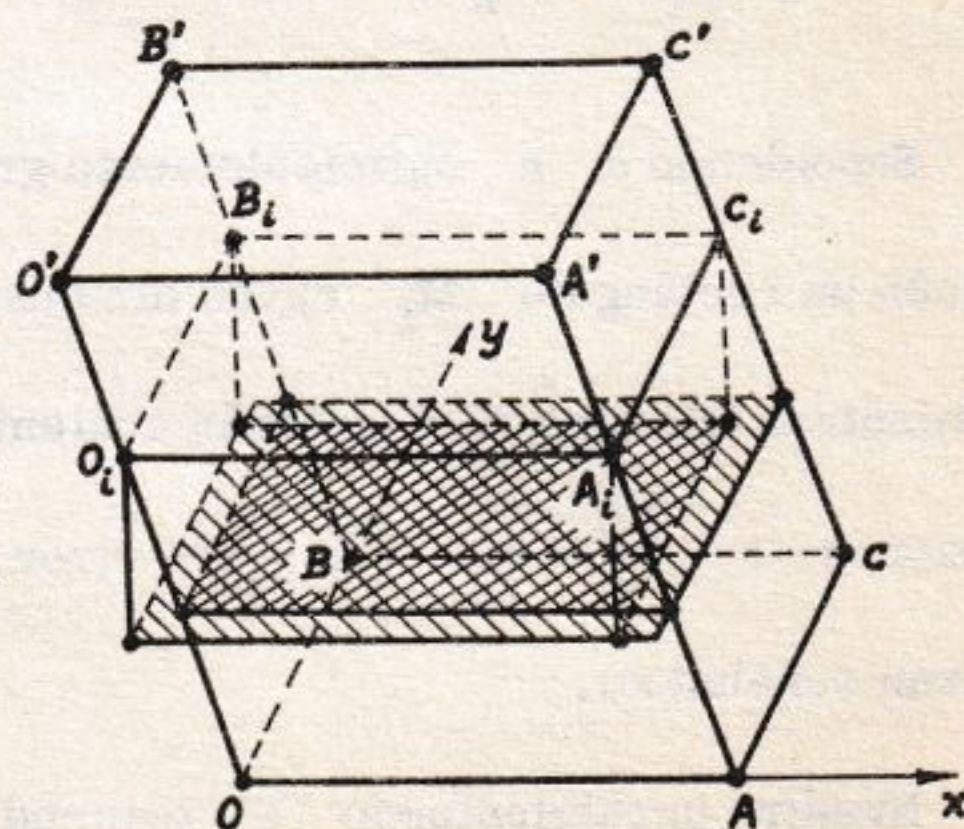


Fig. 1

tado desde la base $OACB$ hacia la otra (ver fig. 1). Indiquemos con (p, q, h) las coordenadas del vértice O' en tal sistema; sólo podemos decir que $h > 0$ (altura de P) mientras que p y q pueden ser de cualquier signo.

Se trata de probar que

$$\text{volumen } P = abh. \quad (1)$$

Fijado un entero n dividamos la arista OO' en n partes iguales y por los puntos de división hagamos pasar planos paralelos a las bases. El genérico de tales planos tendrá a $z = i \frac{h}{n}$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) por ecuación y cortará a P según un rectángulo $R_i \equiv O_i A_i C_i B_i$ definido por

$$i \frac{p}{n} \leq x \leq i \frac{p}{n} + a, \quad i \frac{q}{n} \leq y \leq i \frac{q}{n} + b, \quad z = i \frac{h}{n}.$$

Proyectando ortogonalmente R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sobre el plano precedente α_{i-1} se obtendrá sobre éste un rectángulo R'_i igual a R_i , de modo que en dicho plano se tendrán los dos rectángulos

$$R'_i \left(i \frac{p}{n} \leq x \leq i \frac{p}{n} + a, \quad i \frac{q}{n} \leq y \leq i \frac{q}{n} + b \right),$$

$$R_{i-1} \left((i-1) \frac{p}{n} \leq x \leq (i-1) \frac{p}{n} + a, \quad (i-1) \frac{q}{n} \leq y \leq (i-1) \frac{q}{n} + b \right).$$

Suponiendo a n suficientemente grande, dichos rectángulos tendrán en común un rectángulo M_i cuyas dimensiones son, obviamente, $a - \frac{|p|}{n}$, $b - \frac{|q|}{n}$, mientras que ambos resultarán contenidos en un rectángulo N_i con las dimensiones $a + \frac{|p|}{n}$, $b + \frac{|q|}{n}$ (ver fig. 1, en la que M_i y N_i se encuentran señalados).

Nuestro paralelepípedo P contendrá, evidentemente, a la unión de los paralelepípedos rectos que tienen por base los N_i y la misma altura $\frac{h}{n}$. Se tie-

ne, por lo tanto,

$$n(a - \frac{|p|}{n})(b - \frac{|q|}{n}) \frac{h}{n} \leq \text{volumen } p \leq n(a + \frac{|p|}{n})(b + \frac{|q|}{n}) \frac{h}{n} .$$

Pasando al límite para $n \rightarrow \infty$ el primer y tercer miembro tienden a abh , de lo que sigue la (1).

2 - Sea T un conjunto acotado arbitrario de un plano dado α y sea r una recta no paralela a α . Por cada punto P de T , y de una misma parte del plano α , trácese un segmento PP' , paralelo a r , de longitud dada a .

Al conjunto (acotado) del espacio, lugar de todos estos segmentos, se lo denomina cilindro de base T , de dirección r y lado a . Demuéstrese que, si T es medible (en el plano), tal cilindro C resulta medible (en el espacio) y calcúlese su volumen.

Observemos, ante todo, que el extremo P' del segmento PP' describe un conjunto T' , situado en un plano α' paralelo al α , igual al conjunto T ; indicaremos además con h a la distancia de los planos α , α' (altura del cilindro C), notando que $h = a \sin \hat{\alpha}r$.

La frontera de C está constituida por las bases T , T' (que tienen volumen nulo dado que son conjuntos planos) y del cilindro Γ , de base \tilde{T} , dirección r y lado a . Para probar que C es medible, es necesario hacer ver que Γ tiene volumen nulo.

En el plano α , tras fijar un sistema de ejes cartesianos ortogonales xy y designar con R a un rectángulo (de lados paralelos a los ejes) que contenga

a T , realicemos una descomposición coordinada \mathcal{D} de R en rectángulos parciales de norma δ . Entre los rectángulos de \mathcal{D} que tienen por lo menos un punto en común con T , indicaremos con $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_p$ a aquellos (si existen) que están constituidos solamente por puntos interiores de T , y con $R_1^*, R_2^*, \dots, R_q^*$ a los que tienen puntos en común con $\mathcal{F}T$.

Observemos entonces que Γ está contenido en la unión de los paralelepípedos (en general oblicuos) que tienen por base los rectángulos $R_1^*, R_2^*, \dots, R_q^*$ y altura h ; entonces, según se vió en el ejercicio precedente, se tendrá

$$0 \leq \text{volumen}_e \Gamma \leq h \cdot \sum_{j=1}^q \text{área } R_j^* .$$

Pasando al límite para $\delta \rightarrow 0$, el tercer miembro tiende a cero (puesto que, siendo T medible en el plano, su frontera tiene medida nula) y entonces $\text{volumen}_e \Gamma = 0$, lo que prueba que C es medible.

Para calcular el volumen observemos que C contiene la unión de los paralelepípedos de bases $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_p$ y altura h , mientras que está contenido en la unión de los que tienen las bases $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_p, R_1^*, R_2^*, \dots, R_q^*$ y la misma altura.

Por lo tanto

$$h \cdot \sum_{i=1}^p \text{área } R_i \leq \text{volumen } C \leq h \left(\sum_{i=1}^p \text{área } \bar{R}_i + \sum_{j=1}^q \text{área } R_j^* \right) .$$

Para $\delta \rightarrow 0$ el primer y el tercer miembro tienden a $h \cdot \text{área } T$, por lo que se concluye que

$$\text{volumen } C = h \cdot \text{área } T ,$$

o sea que el volumen de un cilindro es igual al producto del

área de la base por la altura .

Nótese que, si T es un polígono, C es un prisma; si T es un círculo y la recta r es perpendicular al plano α , C es el cilindro circular recto de la geometría elemental; etc., etc.

3 - Demostrar que una pirámide es un conjunto medible del espacio y que su volumen coincide con el asignado por la geometría elemental.

Basta evidentemente considerar el caso de una pirámide triangular o tetraedro. Se trata de un conjunto medible pues su frontera está constituida por cuatro triángulos.

Dado un tetraedro P , de vértices A, B, C, D , consideremos como base al triángulo ABC (que indicaremos con T) y designemos con h a la altura relativa: debemos probar que

$$\text{volumen } P = \frac{1}{3} h \cdot \text{área } T . \quad (1)$$

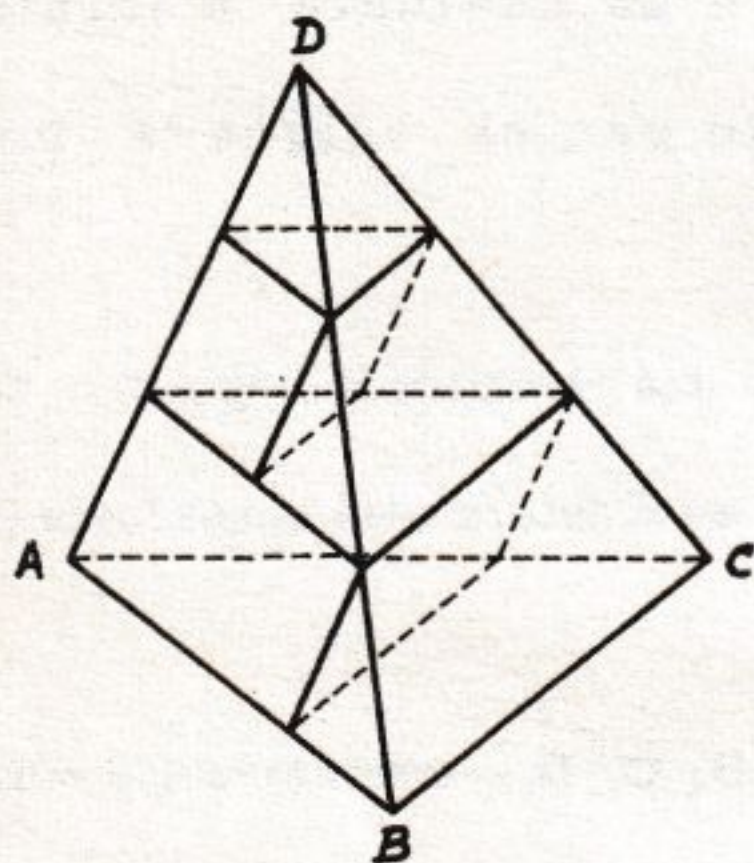
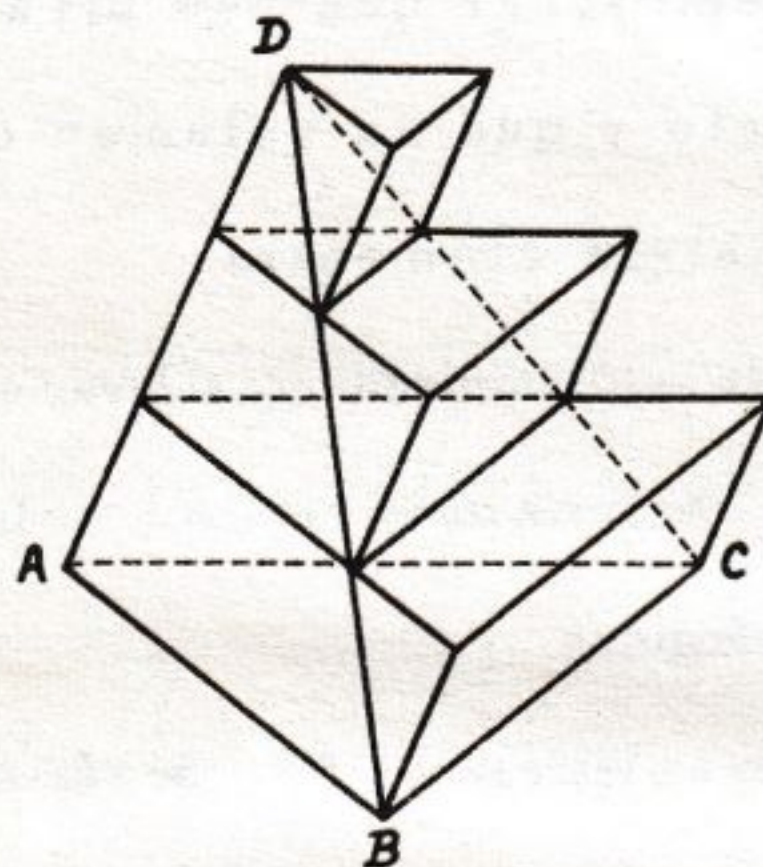
Dividamos la arista AD en n partes iguales y por los puntos de división (A y D comprendidos) tracemos los planos paralelos al plano de base ABC . Tales planos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (numerados desde el vértice D hacia la base) cortan al tetraedro P según los triángulos $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ (con $T_0 \equiv D$, $T_n \equiv T$) semejantes al T .

Los lados de T_i son iguales a los de T multiplicados por el factor $\frac{i}{n}$ y entonces resulta

$$\text{área } T_i = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \text{área } T . \quad (2)$$

Proyectando cada T_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) paralelamente a la arista AD

sobre el plano sucesivo α_{i+1} , se obtienen $n-1$ prismas triangulares cuya unión está contenida en P (véase fig. 2 α): proyectando, en cambio T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) paralelamente a la arista AD sobre el plano precedente α_{i-1} , se obtienen n prismas triangulares cuya unión contiene P (véase fig. 2 β).

Fig. 2 α Fig. 2 β

Tales prismas tienen todos la misma altura $\frac{h}{n}$ y, teniendo en cuenta el ejercicio precedente, se puede entonces escribir

$$\frac{h}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \text{área } T_i \leq \text{volumen } P \leq \frac{h}{n} \sum_{i=1}^n \text{área } T_i,$$

o sea, por la (2),

$$\frac{h}{n^3} \text{área } T \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \leq \text{volumen } P \leq \frac{h}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{área } T.$$

Pasando al límite para $n \rightarrow \infty$, el primer y el tercer miembro tienden a $\frac{1}{3} h \cdot \text{área } T$, de donde queda demostrada la (1).

4 - Sea T un conjunto acotado arbitrario de un plano α da-

do, y sea V un punto no perteneciente al α . Llámase cono de base T y vértice V al conjunto del espacio lugar de todos los segmentos que unen V con los distintos puntos de T .

Demstrar que si T es medible (en el plano), tal cono C resulta medible (en el espacio), con volumen igual a $\frac{1}{3} h \cdot \text{área } T$, donde h (altura del cono) designa a la distancia de V al plano α .

Razónese como en el ejercicio 2, sustituyendo los paralelepípedos de bases rectangulares $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_p$, R_1^*, \dots, R_q^* allí considerados por las pirámides que tienen las mismas bases y V por vértice, teniéndose después en cuenta el ejercicio precedente.

5 - Demostrar que una esfera es un conjunto medible del espacio y calcular su volumen.

Nos referiremos a la semiesfera S definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, $z \geq 0$ (donde x, y, z son coordenadas cartesianas ortogonales) cuya frontera está constituida por un círculo y una mitad σ de la superficie esférica. Para probar que S es medible necesitamos hacer ver que σ tiene volumen nulo.

Los planos α_i , de ecuación $z = i \frac{r}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) cortan a S según círculos C_i , con los radios $\rho_i = r \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$.

Proyectando ortogonalmente C_1, C_2, \dots, C_{n-1} sobre los planos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$, respectivamente, se obtienen $n-1$ cilindros circulares rectos cuya unión Γ' está contenida en S ; proyectando, en cambio, C_0, C_1, \dots, C_{n-1} ortogonalmente sobre los planos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, se obtienen

n cilindros circulares rectos cuya unión Γ'' contiene S .

Además, σ resulta contenida en $\Gamma'' - \Gamma'$

Se ve inmediatamente (ej. 2) que

$$\text{volumen } \Gamma' = \sum_{i=1}^{n-1} \pi \varphi_i^2 \cdot \frac{r}{n} = \frac{\pi r^3}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

y análogamente que

$$\text{volumen } \Gamma'' = \frac{\pi r^3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

Se tiene, así,

$$0 \leq \text{volumen}_e \sigma \leq \text{volumen } \Gamma'' - \text{volumen } \Gamma' = \frac{\pi r^3}{n} ;$$

de aquí que, para $n \rightarrow \infty$, se deduce $\text{volumen}_e \sigma = 0$, o sea, que S es medible. Se tiene también

$$\frac{\pi r^3}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \leq \text{volumen } S' \leq \frac{\pi r^3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right),$$

o sea,

$$\frac{\pi r^3}{n} \left[n-1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} \right] \leq \text{volumen } S \leq \frac{\pi r^3}{n} \left[n - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} \right]$$

Para $n \rightarrow \infty$ el primer y el tercer miembro tienden a $\pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi r^3$; se concluye entonces que $\text{volumen } S = \frac{2}{3} \pi r^3$ o sea que el volumen de la esfera de radio r es igual a $\frac{4}{3} \pi r^3$. (*)

(*) Con los ej. 1, 2, ..., 5 hemos entonces verificado que la teoría general de la medida de los conjuntos acotados del espacio ordinario desarrollada en "Lecciones", Cap. XX, n. 1, 2, 3, 4 es coherente con todo lo que se ha visto en la geometría elemental. Para los conjuntos acotados del plano, véase "Lecciones", Cap. IX, n. 12 y Cap. XX, n. 5.

6 - AREA DE SECTORES PLANOS Y DE DOMINIOS POLAR -
MENTE NORMALES (ver "Lecciones", Cap. XX, n° 5).

Calcular el área del dominio encerrado por la curva (denominada rosa) que tiene la ecuación polar $\rho^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$.

Se ve fácilmente que la curva en estudio tiene el gráfico indicado en la fig. 3.

Por lo tanto, teniendo en cuenta las simetrías, el área buscada vale

$$4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi \, d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2\varphi \, d(2\varphi) =$$

$$= a^2 \left[\frac{2\varphi - \cos 2\varphi \operatorname{sen} 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2},$$

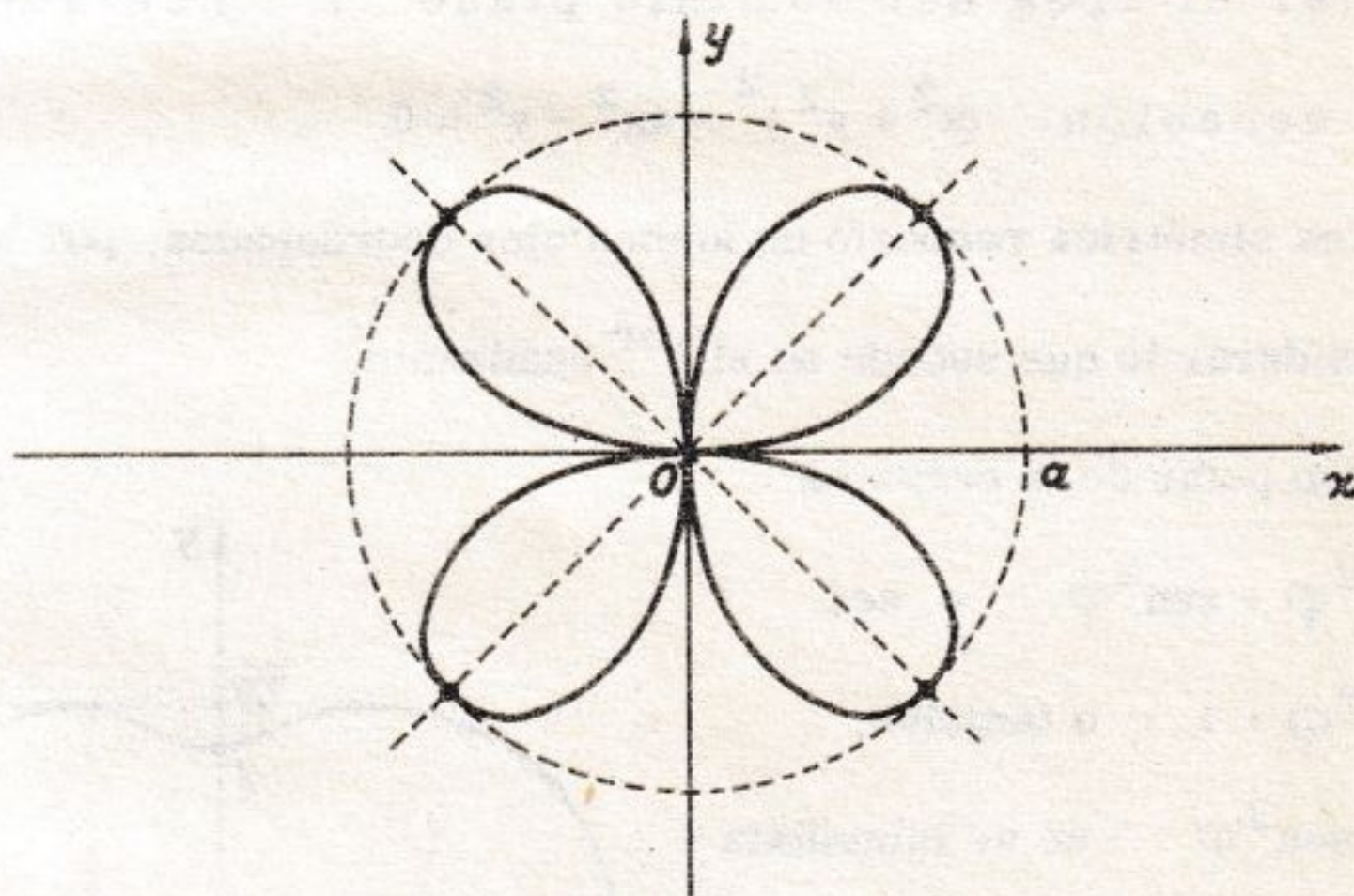


Fig. 3

o sea es la mitad del área del círculo circunscripto a la rosa.

7 - Calcular el área del sector plano S definido por

$$0 \leq \rho \leq a \cotg \varphi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (a > 0).$$

Dejamos para el lector el trazado del gráfico. Para el área buscada se encuentra

$$\begin{aligned} \text{área } S &= \frac{1}{2} a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \varphi} - 1 \right) d\varphi = \\ &= \dots = \frac{4 - \pi}{8} a^2 . \end{aligned}$$

8 - Calcular el área del dominio plano que encierra la lemniscata de Bernouilli $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

La ecuación de la lemniscata, en coordenadas polares, es $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$; de aquí que el área buscada valga

$$4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 .$$

9 - Calcular el área del dominio plano T encerrado por la curva de ecuación $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - y^2 = 0$.

La curva es simétrica respecto de ambos ejes coordenados, por lo que es suficiente considerar lo que sucede en el 1^{er} cuadrante.

La ecuación polar de la curva es

$$\rho^2 = 4 \cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi , \text{ o sea}$$

$$\rho^2 = 3 \cos^2 \varphi + 1 , \text{ o también,}$$

$$\rho^2 = 4 - 3 \text{sen}^2 \varphi ; \text{ se ve inmediata-}$$

mente que mientras φ crece de 0

a $\frac{\pi}{2}$, ρ decrece de 2 hasta

1 . Obsérvese , además , que $x =$

$$= \rho \cos \varphi = \cos \varphi \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi} \text{ de -}$$

crece desde 2 hasta 0 , mientras que $y = \rho \text{sen} \varphi = \text{sen} \varphi \sqrt{4 - 3 \text{sen}^2 \varphi}$

crece, en el intervalo $0 \leq \varphi < \arcsen \sqrt{\frac{2}{3}}$, desde 0 hasta $\frac{2}{\sqrt{3}}$, y

decrece, en el intervalo $\arcsen \sqrt{\frac{2}{3}} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, desde $\frac{2}{\sqrt{3}}$ hasta 1 .

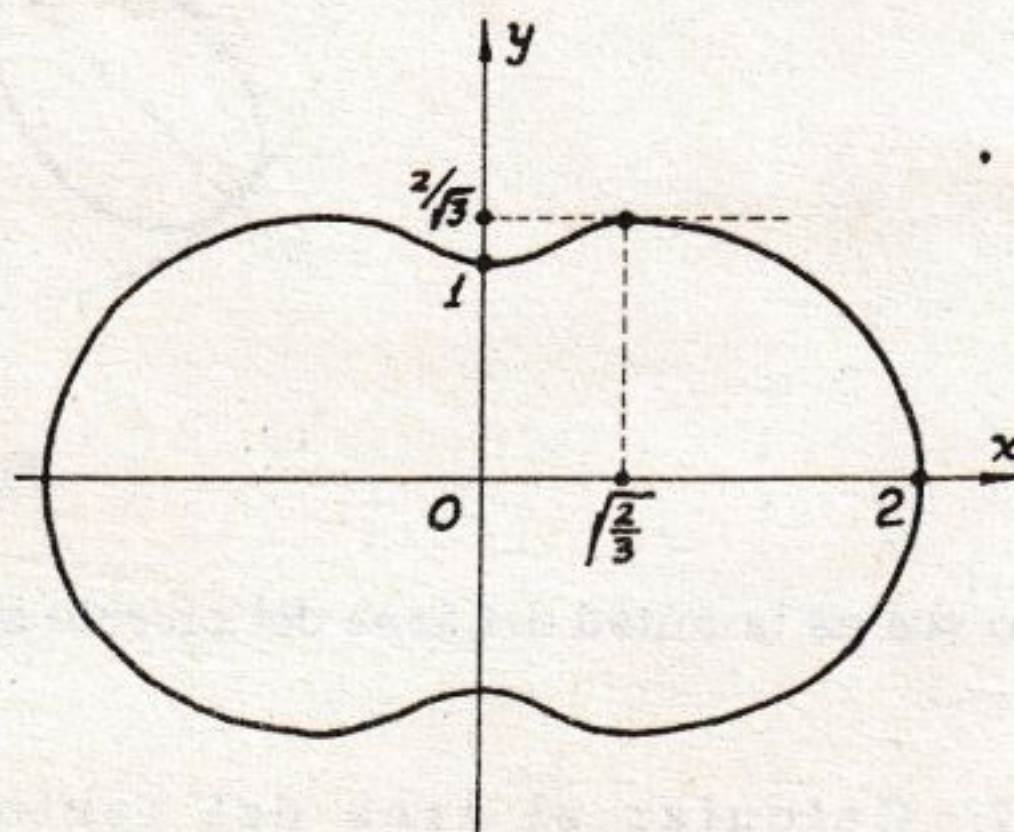


Fig. 4

La curva tiene, entonces, el comportamiento señalado en la fig. 4

Para el área buscada se tiene

$$\begin{aligned} \text{área } T &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos^2 \varphi + 1) d\varphi = 2 \left[\frac{3}{2} (\varphi + \cos \varphi \sin \varphi) + \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{5\pi}{2} . \end{aligned}$$

10 - Calcular el área del dominio T limitada por la circunferencia $\varrho = a \cos \varphi$, la cardioide $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$ y las dos semirrectas $\varphi = \pm \alpha$ (con $0 < \alpha < \pi$) .

Si $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (ver fig. 5 a) el dominio T resulta un dominio polar - mente normal y entonces, teniendo en cuenta la simetría respecto del eje polar,

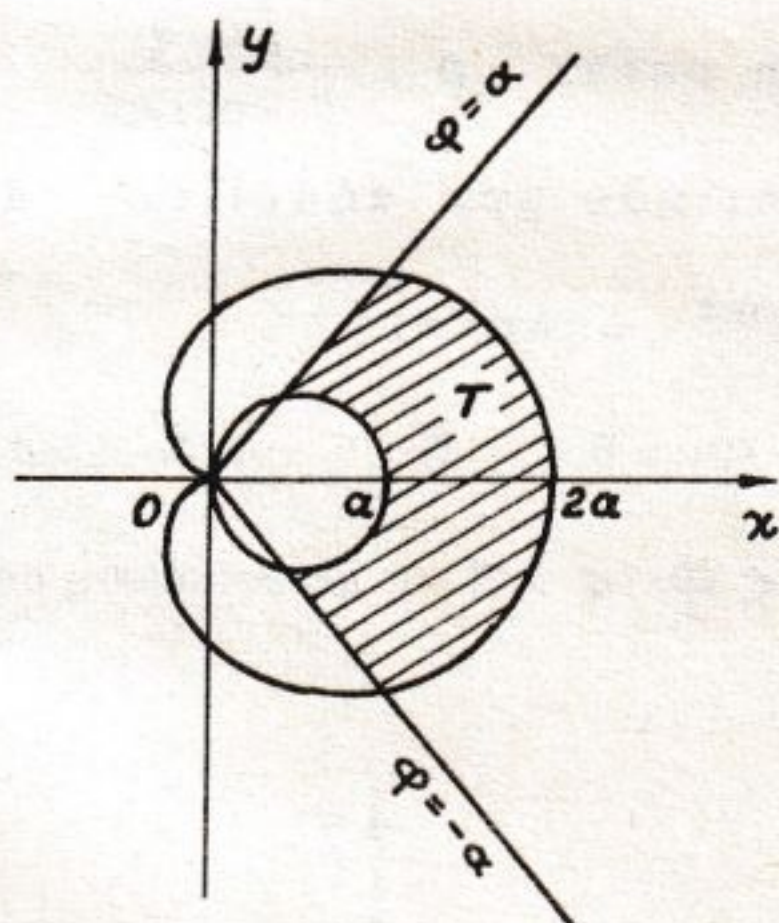


Fig. 5 a

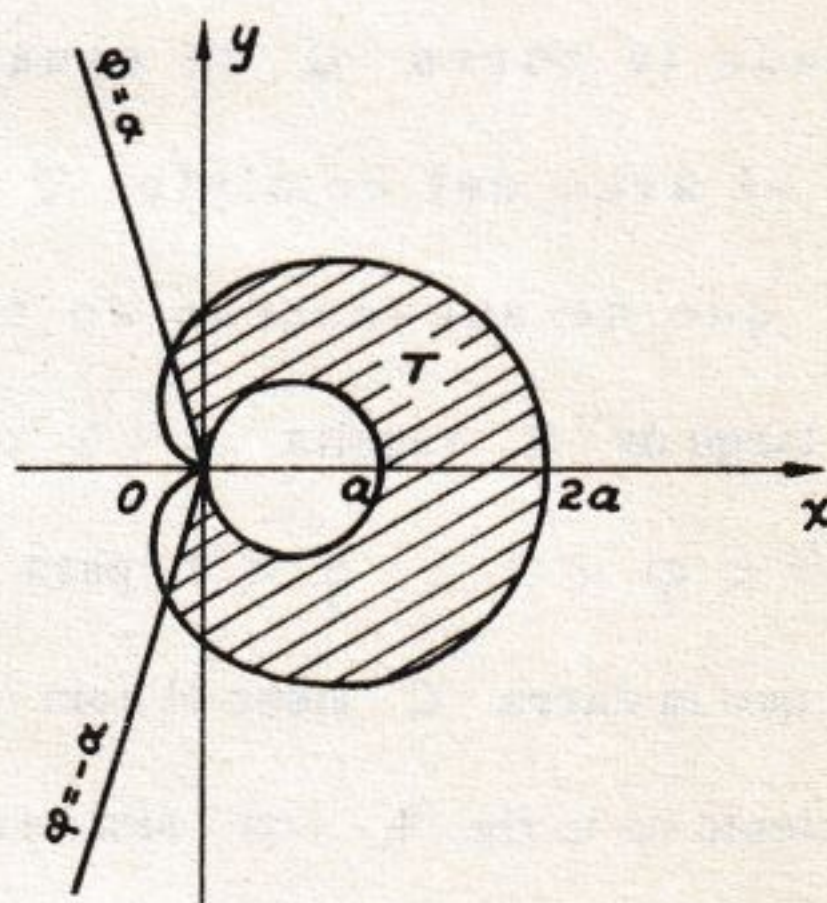


Fig. 5 b

puede escribirse

$$\begin{aligned} \text{área } T &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \left[a^2 (1 + \cos \varphi)^2 - a^2 \cos^2 \varphi \right] d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\alpha} (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi = a^2 \left[\varphi + 2 \sin \varphi \right]_0^{\alpha} = a^2 (\alpha + 2 \sin \alpha) . \end{aligned}$$

En cambio, si $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ (ver fig. 5 b) el dominio T es tomado co -

mo diferencia entre un sector plano (relativo a la cardioide) y un círculo; se tiene así:

$$\begin{aligned}
 \text{área } T &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\alpha a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi - \frac{\pi a^2}{4} = \\
 &= a^2 \int_0^\alpha (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi - \frac{\pi a^2}{4} = \\
 &= a^2 \left[\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi + \cos \varphi \sin \varphi}{2} \right]_0^\alpha - \frac{\pi a^2}{4} = \\
 &= a^2 \left(\frac{3}{2} \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \alpha - \frac{\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ las dos fórmulas dan, naturalmente, el mismo valor

$$a^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right)$$

11 - Dada la curva C de ecuación polar $\rho = \frac{\sin \varphi}{2 - \cos \varphi}$, calcular el área del dominio T limitado por aquellos arcos de C que se encuentran en el 1^{er} cuadrante.

A lo largo de C resulta $\rho = 0$ para $\varphi = 0, \pi, 2\pi$; $\rho > 0$ para $0 < \varphi < \pi$; $\rho < 0$ para $\pi < \varphi < 2\pi$ y se reconoce con facilidad que la curva C tiene el com-

portamiento de la fig. 6, con simetría

respecto de la semirrecta $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (ya

que, cambiando φ en $2\pi - \varphi$, ρ

cambia de signo). El dominio T que

debemos considerar es el que se ha ra-

yado. Resulta ser polarmente normal y

el arco de curva externa está definido

por las $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{\sin \varphi}{2 - \cos \varphi} \geq 0$

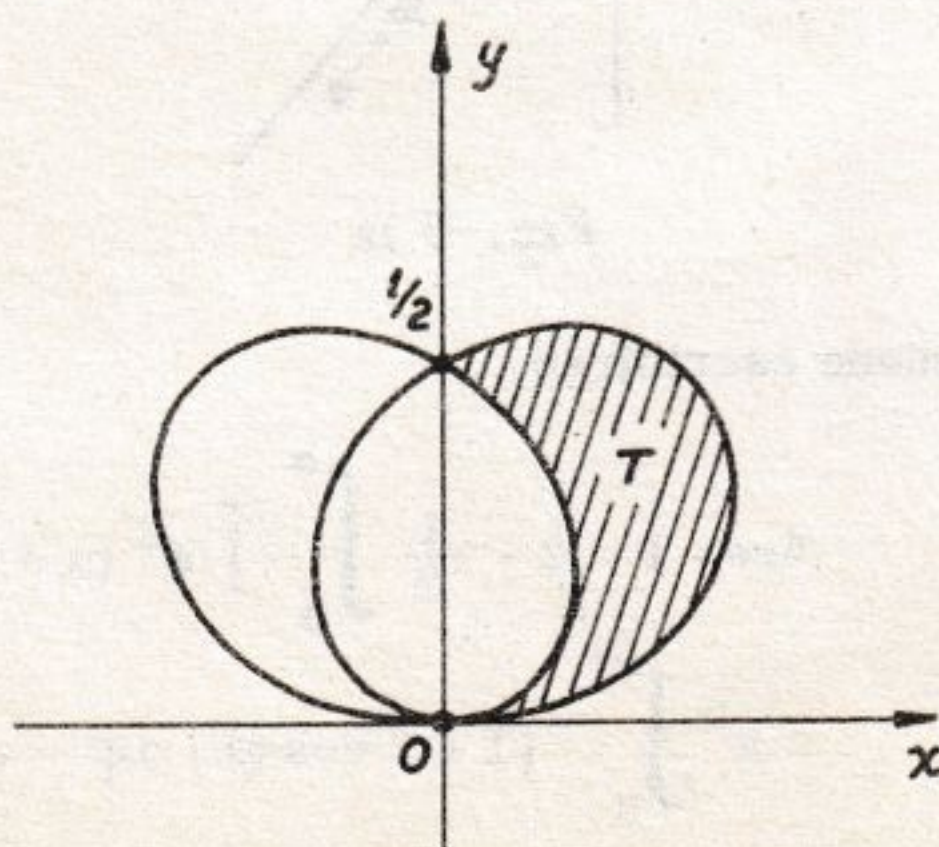


Fig. 6

≥ 0 , mientras que el interior lo está por las $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, $\rho = \frac{\sin \varphi}{2 + \cos \varphi} \leq 0$, o también por las $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{\sin \varphi}{2 + \cos \varphi} \geq 0$.

Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned} \text{área } T &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\sin \varphi}{2 - \cos \varphi} \right)^2 - \left(\frac{\sin \varphi}{2 + \cos \varphi} \right)^2 \right] d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{(4 - \cos^2 \varphi)^2} d\varphi \end{aligned}$$

y realizando la sustitución $\sin \varphi = t$:

$$\begin{aligned} \text{área } T &= 4 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(3 + t^2)^2} = 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{3 + t^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{3 + t^2} \right) \right] dt = \\ &= 2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{t}{3 + t^2} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2\pi\sqrt{3} - 9}{18} \end{aligned}$$

12 -. Calcular el área del lazo C formado por la curva (estrofoide) de ecuación $x(x^2 + y^2) - a(x^2 + y^2) = 0$, ($a > 0$)

Se ve fácilmente que la curva considerada tiene el comportamiento señalado en la fig. 7. Para calcular el área del lazo C conviene considerarlo como un sector plano. Teniendo en cuenta la simetría respecto del eje x y que la ecuación polar de la estrofoide es $\rho =$

$= a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$, se encuentra

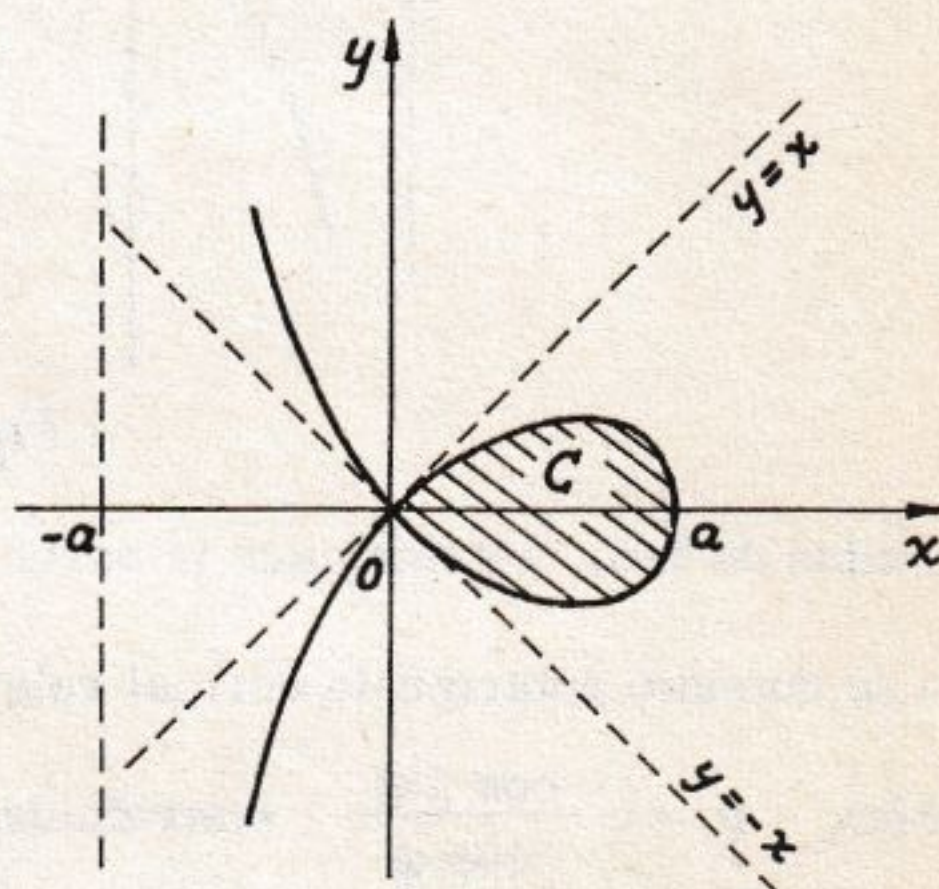


Fig. 7

$$\begin{aligned} \text{área } C &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{(2\cos^2 \varphi - 1)^2}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\pi/4} \left(4\cos^2 \varphi - 4 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi = a^2 \left[2(\varphi + \cos \varphi \sin \varphi) - 4\varphi + \operatorname{tg} \varphi \right]_0^{\pi/4} = \end{aligned}$$

$$= a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

13 - El lazo C del ej. precedente queda dividido en tres partes por la curva (cisoide) de ecuación $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$; calcúlense las áreas de tales partes.

Observemos, ante todo, que ambas curvas tienen por intersección, además del origen O , los dos puntos $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$, $M'\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$ y que éstos tienen las anomalías $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, respectivamente. Ad-

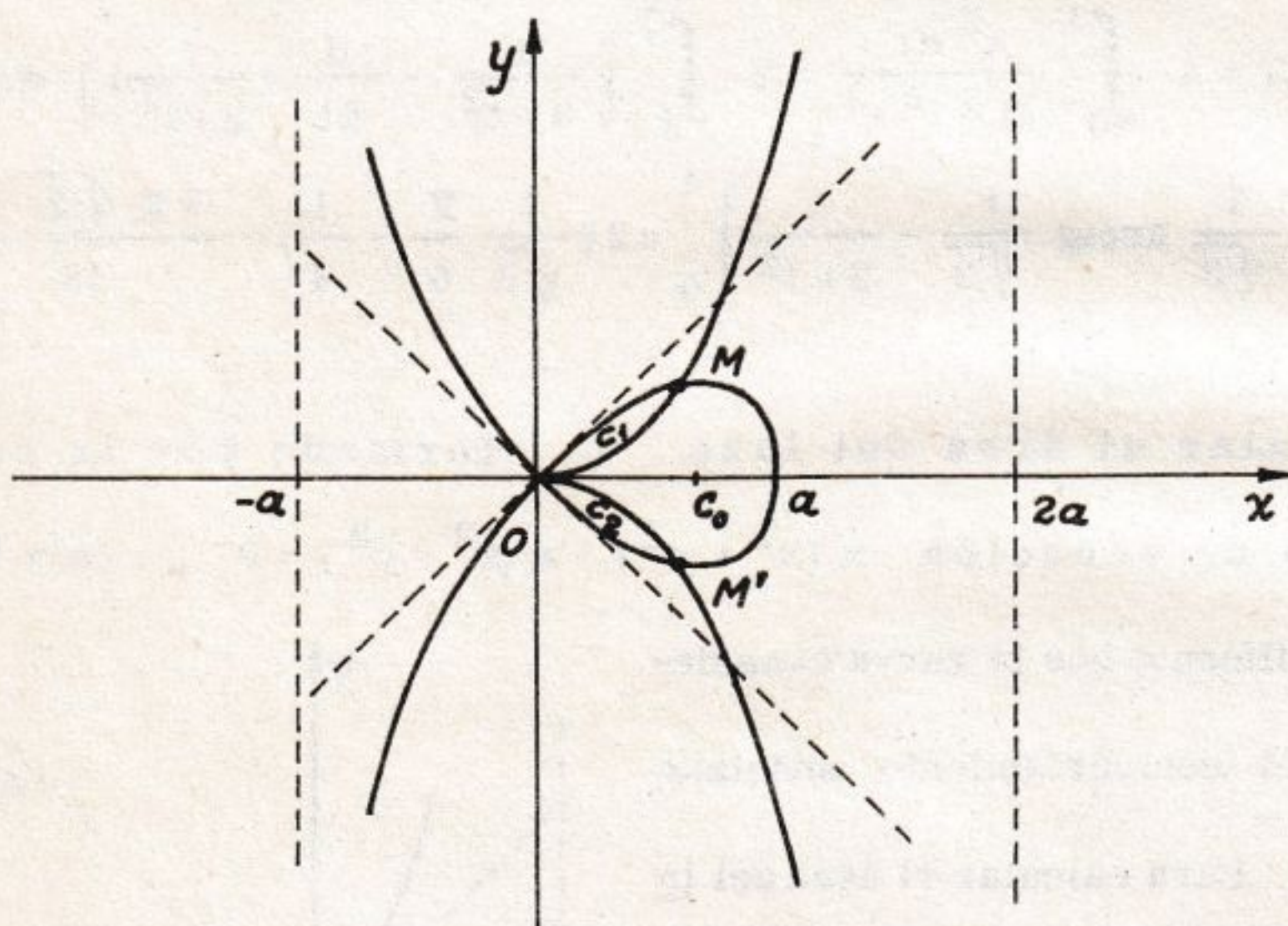


Fig. 8

vertidos de esto, notemos que la parte C_0 de la fig. 8 puede considerarse como un dominio polarmente normal relativo a las funciones $\rho = 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$ (cisoide), $\rho = a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ (estrofoide), que tiene por base al intervalo $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$. Se tiene entonces, recordando la simetría respecto del eje x

$$\begin{aligned} \text{área } C_0 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \left(a^2 \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2 \varphi} - 4a^2 \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{4 \cos^2 \varphi - 3}{\cos^2 \varphi} d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/6} \left(4 - \frac{3}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= a^2 \left[4\varphi - 3 \operatorname{tg} \varphi \right]_0^{\pi/6} = a^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) .$$

Por último, recordando el resultado del ej. precedente, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{área } C_1 &= \text{área } C_2 = \frac{\text{área } C - \text{área } C_0}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) - a^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \right] = \frac{1}{2} a^2 \left(2 + \sqrt{3} - \frac{7\pi}{6} \right) . \end{aligned}$$

14 - Calcular el área del triángulo mixtilíneo T comprendido entre la rama de la cuártica $x^4 - y^4 + a^2 y^2 = 0$ que está en el semiplano $y > 0$ y las rectas $y = \pm x \sqrt{3}$.

Se trata de un sector plano y se ve fácilmente que

$$\text{área } S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(-\frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos 2\varphi} \right) d\varphi = a^2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 - \cotg^2 \varphi} ,$$

y realizando la sustitución $\cotg \varphi = t$:

$$\text{área } S = a^2 \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \dots = \frac{a^2}{4} \left[\frac{\pi}{3} + \log(2 + \sqrt{3}) \right] .$$

15 - Calcúlese el área del dominio plano T formado por los puntos de abscisa positiva, no externos a la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ y no internos al círculo $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

Conviene considerar T como un dominio polarmente normal; se encuentra

$$\text{área } T = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \left(a^2 \cos 2\varphi - \frac{a^2}{\sqrt{2}} \right) d\varphi = \dots = \frac{4 - \pi}{8\sqrt{2}} a^2 .$$

16 - NOCIONES SOBRE LA TEORIA DE LA MEDIDA SEGUN LEBESGUE.

Llamemos E a un conjunto acotado arbitrario de S_r . En la teoría de la

medida de Jordan quedan definidos, con relación al mismo, los dos números $\text{med}_e E = \lim_{\delta \rightarrow 0} S''$, $\text{med}_i E = \lim_{\delta \rightarrow 0} S'$, donde los símbolos tienen el significado atribuido en "Lecciones", Cap. XX, n° 2. En dicha teoría no se evidencia preferencia por uno u otro de tales números considerándose sólo el caso en que ellos coincidan. No se adopta como medida del conjunto E al número $\text{med}_e E$ porque, siendo dicho número obtenido como límite de S'' (es decir, como límite de la medida de un conjunto de intervalos R_1'' , R_2'' , ..., R_n'' que contiene a E) se tiene, por así decir, la duda de estar considerando un número mayor del debido ya que no puede asegurarse (en general) que, al tender δ a cero, el conjunto $\bigcup_{i=1}^n R_i''$ deje definitivamente fuera a cualquier punto no perteneciente al E . Análogamente no se adopta $\text{med}_i E$ porque al considerar los conjuntos $\bigcup_{j=1}^m R_j'$ que están contenidos en E no se está seguro de que con ellos pueda alcanzarse a todo punto de E .

Pero en el caso en que E sea un conjunto cerrado (y acotado) desaparece la primer duda porque, si P es un punto no perteneciente a E tendrá distancia $\varphi > 0$ de E y entonces, apenas sea $\delta < \varphi$, todos los conjuntos $\bigcup_{i=1}^n R_i''$ no contendrán más tal punto P .

Análogamente en el caso en que E sea un conjunto abierto (y acotado) desaparecerá la otra duda puesto que, cuando se considere cualquier punto P de E , distará φ de \tilde{E} y entonces, apenas sea $\delta < \varphi$, el conjunto $\bigcup_{j=1}^m R_j'$ contendrá tal punto P .

Estas consideraciones intuitivas nos inducen a dar las siguientes definiciones:

α) Si C es un conjunto cerrado y acotado se denomina medida según Lebesgue del mismo, y se la indica $m(C)$, a su medida externa, se-

gún Jordan. Es decir, se tiene

$$m(C) = \text{med}_e C \geq 0. \quad (1)$$

β) Si A es un conjunto abierto y acotado se denomina medida según Lebesgue del mismo y se la indica $m(A)$ a su medida interna según Jordan. Es decir, se tiene

$$m(A) = \text{med}_i A > 0. \quad (*) \quad (2)$$

Como primer consecuencia de estas dos definiciones el lector verá sin dificultad que si $C \subseteq A$ se tiene ciertamente

$$m(C) \leq m(A). \quad (3)$$

Tras esto podemos dar la definición general de conjunto acotado medible según Lebesgue.

Si E es un arbitrario conjunto acotado de S_R existen infinitos conjuntos abiertos y acotados A que lo contienen (por ejemplo, intervalos abiertos) y existe por lo menos un conjunto cerrado y acotado C contenido en E (por ejemplo, un punto de E).

De cualquier modo que se fijen A y C se tiene $A \supseteq C$ y entonces, por la (3), $m(A) \geq m(C)$. Cuando A y C varían de todos los modos posibles, los dos números $m(A)$ y $m(C)$ describirán dos conjuntos numéricos separados. Llamaremos medida externa según Lebesgue

(*) Como A es abierto, para δ suficientemente pequeño existirán ciertamente intervalos R'_i , por lo que resulta $S' > 0$; en consecuencia, $\text{med}_i A$, que también es el extremo superior del conjunto numérico descrito por S' , tiene un valor positivo.

del conjunto E , que indicaremos como $m_e(E)$, al extremo inferior del conjunto numérico descripto por $m(A)$.

Llamaremos, en cambio, medida interna según Lebesgue del conjunto E , que indicaremos como $m_i(E)$, al extremo superior del conjunto numérico descripto por $m(C)$.

Resulta, evidentemente, $m_e(E) \geq m_i(E) \geq 0$ y el conjunto E será considerado medible según Lebesgue, cuando resulte $m_e(E) = m_i(E)$ y al valor común de ambas medidas \int que indicaremos simplemente con el símbolo $m(E)$ lo denominaremos, simplemente, medida de E según Lebesgue.

Se puede decir entonces que un conjunto acotado E es medible según Lebesgue cuando los citados conjuntos numéricos separados, descriptos por $m(A)$, $m(C)$ resultan contiguos, vale decir cuando, fijado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, pueda determinarse un conjunto abierto y acotado A_ε , que contenga a E y un conjunto cerrado C_ε , contenido en E , de modo tal que resulte

$$m(A_\varepsilon) - m(C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Es fácil demostrar que esta definición general es coherente con las definiciones $\alpha)$ y $\beta)$ dadas al comienzo, vale decir que todo conjunto abierto o cerrado resulta (según la definición ahora introducida) medible según Lebesgue, con medida igual a la establecida por las (1), (2).

En lo que sigue (de estas nociones) escribiremos simplemente conjunto medible L para indicar un conjunto medible según Lebesgue (y análogamente usaremos la escritura medible J para el caso en que lo sea según Jordan).

Un conjunto medible L puede tener medida nula; evidentemente, la condi-

ción necesaria y suficiente para que esto ocurra es que, fijado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, exista un conjunto abierto y acotado $A_\varepsilon \supseteq E$ con $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$. Es también evidente que todo conjunto contenido en un conjunto de medida nula es medible y de medida nula.

La importancia de la medida según Lebesgue reside en el hecho de que los con juntos medibles L resultan extremadamente más generales que los medibles J . Naturalmente no todos los posibles conjuntos son medibles L ; pero si se quiere construir un conjunto no medible L es necesario utilizar el denominado postulado de Zermelo, cuyo uso no todos los matemáticos consideran legítimo. Otro hecho importantísimo es que la medida L goza de la propiedad de que no sólo la unión (o la intersección) de un número finito de conjuntos medibles L es un conjunto medible L , como sucede para la medida J , sino que la misma propiedad continúa valiendo para una infinidad numerable^(*), cosa que en general no vale para la medida J .

La medida L goza de las siguientes propiedades fundamentales, análogas a las de la medida J , con la diferencia esencial recién señalada. Al enunciar estas propiedades queda sobreentendido que los símbolos E , E' , E_1 , E_2 , indican conjuntos acotados y medibles L .

I - De $E' \subseteq E$ sigue $m(E') \leq m(E)$.

II - La unión (supuesta acotada) de un número finito o de una infinidad numerable de conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ es un conjunto numerable y se tiene

$$m(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \dots) \leq m(E_1) + m(E_2) + \dots + m(E_n) + \dots \quad (4)$$

III - Si los citados conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ carecen, dos

(*) Ver "Ejercicios", Cap. XIV, ej. 26.

a dos, de puntos comunes, se tendrá

$$m(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \dots) = m(E_1) + m(E_2) + \dots + m(E_n) + \dots \quad (4')$$

IV - La intersección de un número finito o de una infinidad numerable de conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ es un conjunto numerable.

V - La diferencia $E - E'$ es numerable.

No daremos las demostraciones de estas propiedades porque requeriría un desarrollo demasiado amplio. Nos limitaremos a observar que en el segundo miembro de (4) , (4') aparecen series numéricas^(*); en la (4) tal serie puede ser convergente o divergente mientras que en la (4') se trata de una serie convergente.

Agreguemos que la propiedad III puede generalizarse del siguiente modo: la (4') continúa valiendo si todas las posibles intersecciones $E_i \cap E_k$ tienen medida nula.

Deseamos ahora hacer ver que:

VI - Si un conjunto es medible J , también será medible L y que ambas medidas coinciden.

Dem. Por hipótesis se tiene $\text{med}_e \mathcal{F}E = 0$ y, en consecuencia, $m(\mathcal{F}E) = 0$, dado que $\mathcal{F}E$ es un conjunto cerrado. Puede después escribirse $E = (E - E \cap \mathcal{F}E) \cup (E \cap \mathcal{F}E)$; el primer conjunto, por ser abierto, será medible L mientras que el segundo está contenido en el conjunto $\mathcal{F}E$ de medida nula y, por ende, es también medible L y de medida nula. Entonces E será medible L . Además los dos conjuntos $E - E \cap \mathcal{F}E$, $E \cap \mathcal{F}E$ no tienen puntos comunes por lo que resulta $m(E) = m(E - E \cap \mathcal{F}E)$. Pero esta

(*) Ver "Lecciones", Cap. V, n. 1, 2 .

última medida es el extremo superior de las medidas de intervalos en su totalidad interiores a E , valiendo en consecuencia $\text{med}_i E$ o, lo que es lo mismo, $\text{med } E$ ya que E es medible J . Se tiene, entonces, $m(E) = \text{med } E$, que es lo que queríamos demostrar.

El teorema inverso no es cierto, como ya ha sido comentado; pero queriendo convencernos sobre un ejemplo concreto hagamos ver que: el conjunto de puntos racionales de un intervalo de $S_r^{(*)}$ es medible L y tiene medida nula. Todavía con mayor generalidad $(**)$ podemos demostrar que:

VII - Todo conjunto acotado, constituido por una infinidad numerable de puntos, resulta medible L y de medida nula.

Dem. Si $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ son los puntos del conjunto dado E de S_r fijado $\varepsilon > 0$, designemos A_i al intervalo abierto cuadrado, con centro en P_i y lado $(\frac{\varepsilon}{2^i})^{1/r}$, observando inmediatamente que resulta $m(A_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$. El conjunto $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ resulta abierto y contiene al conjunto E ; además A es acotado porque, si R es un intervalo que contiene a E , A resulta con certeza contenido en el intervalo R' de centro coincidente con el de R y de semidimensión aumentada en $(\frac{\varepsilon}{2})^{1/r}$. Entonces, por la (4), resulta

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

De aquí, siendo posible recubrir E con un conjunto abierto de medida tan

(*) Sabemos que este conjunto no es medible J .

(**) Recordemos que el conjunto de puntos racionales de S_r es numerable (ver "Ejercicios", Cap. XIV, ej. 26).

pequeña como se quiera, llegamos a que E tiene medida nula, que es lo que deseábamos demostrar

CAPITULO XXI

Funciones de dominio (*)

1 - FUNCIONES DE DOMINIO Y SUS DERIVADAS (ver "Lecciones", Cap. XXI, n^{os} 1, 2, 3, 4, 5).

Sea $f(x,y)$ una función definida en un intervalo A del plano xy que admita en él derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} continuas. Sea ϕ la familia de los intervalos T ($a' \leq x \leq a''$, $b' \leq y \leq b''$) contenidos en A . Considérese la función de dominio $F(T)$ definida en la familia ϕ mediante la fórmula

$$F(T) = f(a'', b'') - f(a'', b') - f(a', b'') + f(a', b') \quad (1)$$

Demuéstrese que tal función es aditiva y derivable sobre ϕ en todo punto de A . Dése a la $F(T)$ otra expresión a través de una integral doble.

Descompuesto T en dos intervalos T_1, T_2 , del modo por ejemplo indicado en la fig. 9, se tiene

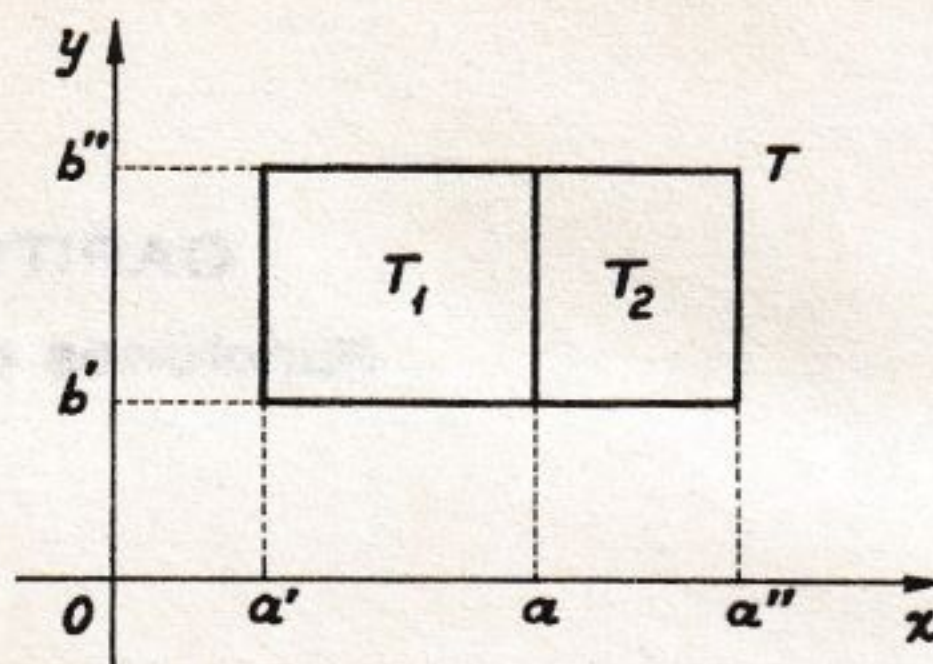
$$F(T_1) + F(T_2) = f(a, b'') - f(a, b') - f(a', b'') + f(a', b') +$$

(*) En los ejercicios de este Cap. XXI se hará uso no sólo de las nociones expuestas en el correspondiente Capítulo de 'Lecciones' sino también de las incluidas en el n. 1 del sucesivo Cap. XXII.

$$\begin{aligned}
 & + f(a'', b'') - f(a'', b') - f(a', b'') + f(a', b') = \\
 & = f(a'', b'') - f(a'', b') - f(a', b'') + f(a', b') = F(T) ,
 \end{aligned}$$

lo que prueba la aditividad de la $F(T)$.

Fijado un punto $P(x_0, y_0)$ de A y llamando T a cualquier intervalo de ϕ que contenga P (es decir, suponiendo $a' \leq x_0 \leq a''$, $b' \leq y_0 \leq b''$),



considérese el cociente

Fig. 9

$$\frac{F(T)}{\text{área } T} = \frac{f(a'', b'') - f(a'', b') - f(a', b'') + f(a', b')}{(a'' - a')(b'' - b')} .$$

Si introducimos la función $\varphi(x) = f(x, b'') - f(x, b')$, puede escribirse

$$\frac{F(T)}{\text{área } T} = \frac{\varphi(a'') - \varphi(a')}{(a'' - a')(b'' - b')} ;$$

pero, por el teorema de Lagrange, se tiene $\varphi(a'') - \varphi(a') = (a'' - a') \varphi'(\xi) =$
 $= (a'' - a') [f_x(\xi, b'') - f_x(\xi, b')] \quad (\text{con } a' < \xi < a'')$ y entonces

$$\frac{F(T)}{\text{área } T} = \frac{f_x(\xi, b'') - f_x(\xi, b')}{b'' - b'} .$$

Aplicando todavía el teorema de Lagrange se encuentra, sucesivamente,

$$\frac{F(T)}{\text{med } T} = f_{xy}(\xi, \eta) \quad \left[\text{con } (\xi, \eta) \text{ interior a } T \right] .$$

Pasando al límite para $T \rightarrow P$, se deduce por la continuidad de la f_{xy} :

$$\lim_{T \rightarrow P} \frac{F(T)}{\text{med } T} = f_{xy}(x_0, y_0) .$$

Esto prueba que la $F(T)$ es derivable, con derivada igual a la función continua $f_{xy}(x, y)$ y, por definición, se tendrá en consecuencia

$$F(T) = \iint_T \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy$$

Confrontando con la (1) se deduce la notable fórmula

$$\int_T \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy = f(a'', b'') - f(a'', b') - f(a', b'') + f(a', b') \quad , \quad (2)$$

que puede considerarse como una extensión de la $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$.

La expresión del segundo miembro de (2) suele llamarse el incremento doble de la $f(x, y)$ en el intervalo T .

2 - Extender los resultados del ejercicio precedente al caso del espacio de tres dimensiones .

Dada una función de tres variables $f(x, y, z)$ definamos, para todo intervalo T ($a' \leq x \leq a''$, $b' \leq y \leq b''$, $c' \leq z \leq c''$) , la función de dominio

$$F(T) = f(a'', b'', c'') - f(a', b'', c'') - f(a'', b', c'') - f(a'', b'', c') + \\ + f(a'', b', c') + f(a', b'', c') + f(a', b', c'') - f(a', b', c') \quad ,$$

(incremento triple de la $f(x, y, z)$ en el intervalo T). Se encontrará, (bajo condiciones de continuidad de la f y de ciertas derivadas parciales de la misma):

$$\frac{dF}{dT} = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} \quad ; \quad F(T) = \iiint_T \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} dx dy dz , \text{ etc. , etc.}$$

3 - Si T es un dominio arbitrario, acotado y medible por ejemplo del plano, hacer ver que la función " diámetro de T " no es derivable .

Llamando d al diámetro de T , el dominio T resulta contenido en el círculo que tiene centro en cualquier punto P de T y radio d , resultan-

do área $T' < \pi d^2$. Sigue $\frac{d}{\text{área } T} \geq \frac{d}{\pi d^2} = \frac{1}{\pi d}$ y, para $T \rightarrow P$ y,, en consecuencia, $d \rightarrow 0$, el cociente $\frac{d}{\text{área } T}$ tiende a $+\infty$.

4 - Dar la expresión del potencial del campo newtoniano generado por un cuerpo material A .

Sea P el punto genérico de A , $\delta(P)$ la densidad, Q un punto que se fija en el exterior de A . Denominando T a cualquier porción medible de A , indiquemos con $F(T)$ al potencial que tal porción genera en Q (con lo que, en particular, será $F(A)$ el potencial que buscamos) y con $\mu(T)$ a la masa de T .

La $F(T)$ es una función aditiva de dominio. Al variar P en T la distancia \overline{PQ} tiene un mínimo r y un máximo R , conseguidos en ciertos puntos P', P'' , respectivamente, de T . Si imaginamos concentrada en P' $\left[\text{o en } P'' \right]$ toda la masa $\mu(T)$ de T , obtenemos en Q un potencial $\frac{\mu(T)}{r}$ $\left[\text{o } \frac{\mu(T)}{R} \right]$ no inferior $\left[\text{no superior} \right]$ a $F(T)$. Podemos escribir, entonces,

$$\frac{\mu(T)}{R} \leq F(T) \leq \frac{\mu(T)}{r}$$

de donde

$$\frac{\mu(T)}{\text{volumen } T} \cdot \frac{1}{R} \leq \frac{F(T)}{\text{volumen } T} \leq \frac{\mu(T)}{\text{volumen } T} \cdot \frac{1}{r} \quad (1)$$

Para $T \rightarrow P$, el cociente $\frac{\mu(T)}{\text{volumen } T}$ tiende a la densidad $\delta(P)$, las distancias r, R tienden, evidentemente a la distancia \overline{PQ} y entonces, de la (1), sigue $\frac{dF}{dT} = \frac{\delta(P)}{\overline{PQ}}$. Se deduce así $F(T) = \int_T \frac{\delta(P)}{\overline{PQ}} dT$ y, en particular,

$$f(A) = \int_A \frac{\delta(P)}{PQ} dT \quad . \quad (2)$$

Este potencial $F(A)$ es una función $V(Q)$ del punto Q variable en el exterior de A . Designando a las coordenadas de Q con la terna (ξ, η, ζ) y a las de P con (x, y, z) surge de la (2) la fórmula buscada

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_A \frac{\delta(x, y, z)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dx dy dz \quad .$$

Fórmulas perfectamente análogas valen para distribuciones planas o rectilíneas de masa.

5 - Como aplicación del ejercicio precedente, calcúlese el potencial generado por una barra material homogénea.

Asumamos como eje x la recta a la que pertenece la barra considerada, ubicando al origen en el punto medio de la misma. El campo newtoniano correspondiente resulta simétrico respecto del eje x , siendo suficiente entonces calcular el potencial en un plano que contenga al eje x , por ejemplo el plano xy .

Designando a las abscisas de los extremos A, A' de la barra con $-a, a$ y a la densidad lineal (constante) con δ , se tiene

$$\begin{aligned} V(\xi, \eta) &= \delta \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} = \delta \left[\log (x-\xi + \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}) \right]_{-a}^a = \\ &= \delta \log \frac{\sqrt{(a-\xi)^2 + \eta^2} + a - \xi}{\sqrt{(a+\xi)^2 + \eta^2} - a - \xi} \quad . \end{aligned}$$

Esta expresión puede modificarse introduciendo las distancias r, r' del punto potenciado $P(\xi, \eta)$ a los extremos A', A de la barra. De las

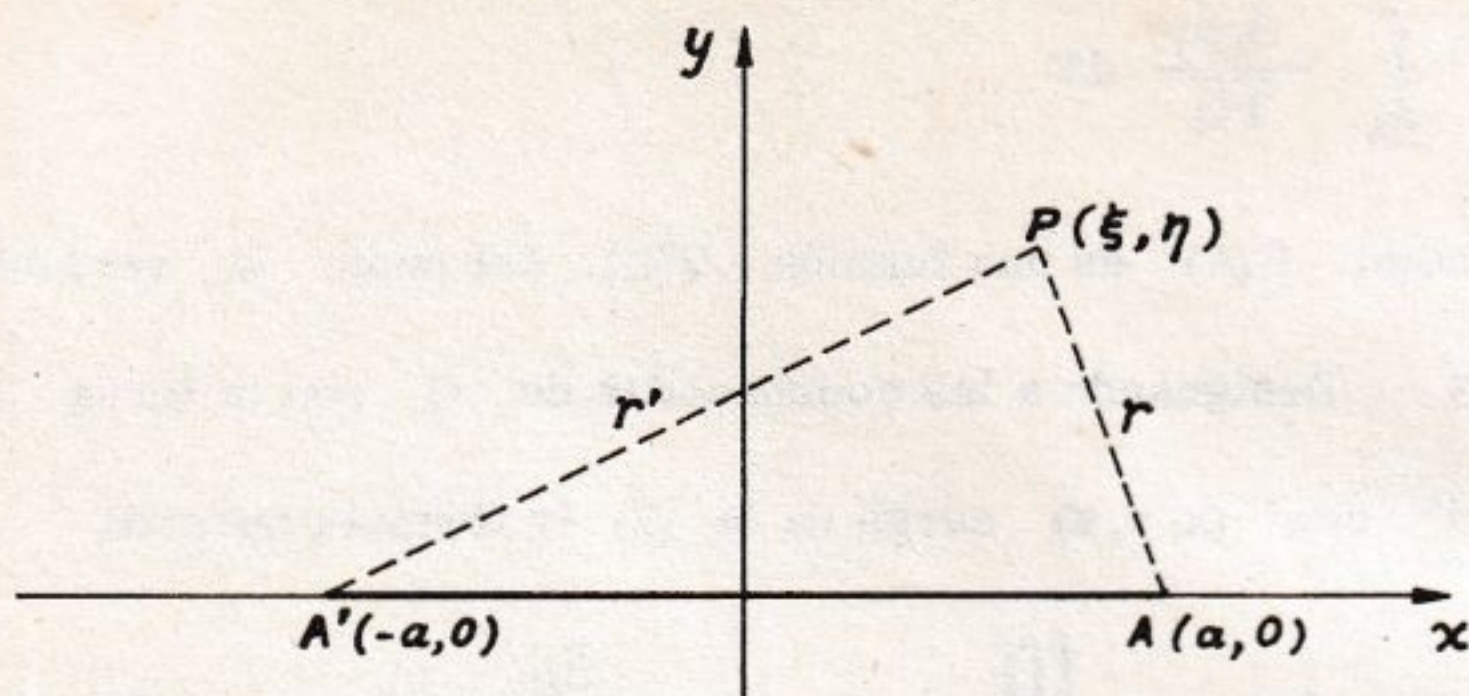


Fig. 10

$$r' = \sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2}, \quad r = \sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2}$$

se obtiene $\xi = \frac{r'^2 - r^2}{4a}$, por lo que puede escribirse

$$\begin{aligned} V &= \delta \log \frac{r + a - \frac{r'^2 - r^2}{4a}}{r' - a - \frac{r'^2 - r^2}{4a}} = \delta \log \frac{(r + 2a)^2 - r'^2}{r^2 - (r' - 2a)^2} = \\ &= \delta \log \frac{r + r' + 2a}{r + r' - 2a} \end{aligned}$$

Resulta así que el potencial V se mantiene constante cuando el punto P , variando en el plano xy , cumple con la condición $r + r' = \text{cte.}$, o sea cuando tal punto describe una elipse cuyos focos son los puntos A , A' . Las superficies equipotenciales son entonces elipsoides circulares generados por la rotación, alrededor del eje x , de las citadas elipses.

CAPITULO XXII

Integración de las funciones continuas de dos o más variables y aplicaciones

1 - CALCULO DE INTEGRALES COMO LIMITE DE SUMAS INTEGRALES (ver "Lecciones", Cap. XXII, n° 1)

Calcular la integral $\iint_Q e^{x-y} dx dy$, donde Q indica al cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ del plano xy .

Subdivídase Q en n^2 cuadrados iguales (ver fig. 11) cada uno de lado $\frac{1}{n}$. Constrúyase después la suma σ_n de los productos obtenidos multiplicando el área $\frac{1}{n^2}$ de cada cuadrado parcial

$$Q_{hk}) \quad \frac{h-1}{n} \leq x \leq \frac{h}{n}, \quad \frac{k-1}{n} \leq y \leq \frac{k}{n}, \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

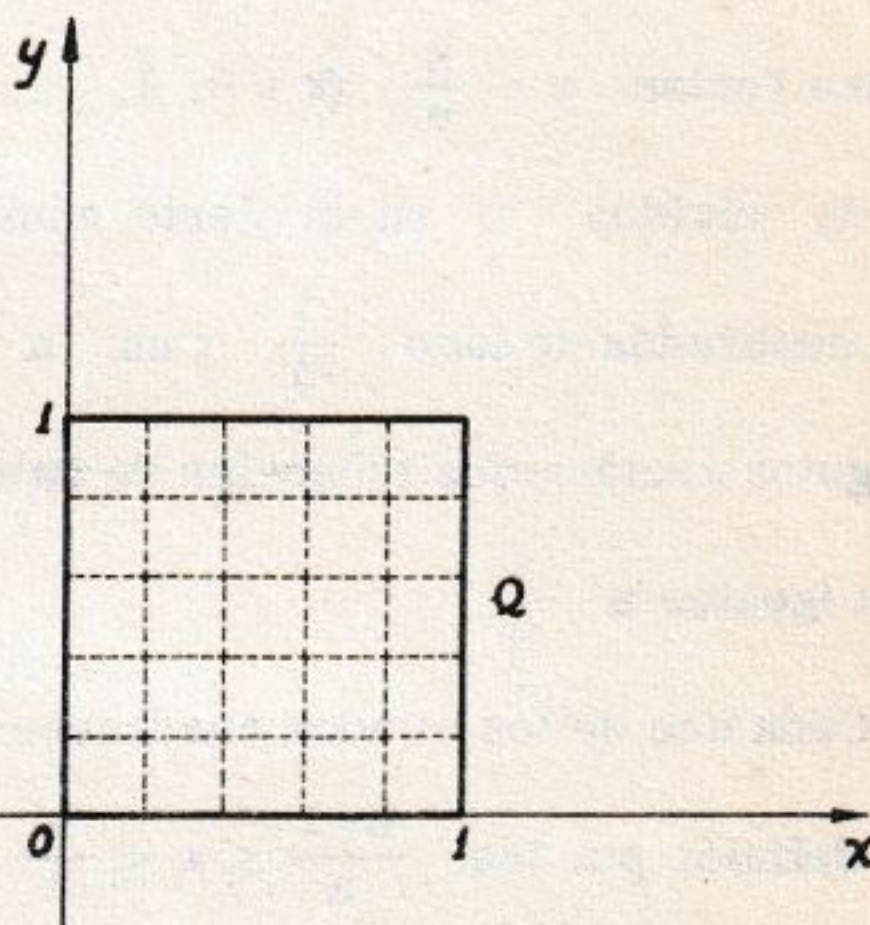


Fig. 11

por el valor de la función a integrar e^{x-y} en, por ejemplo, el vértice $(\frac{h-1}{n}, \frac{k-1}{n})$ de Q_{hk} .

Se obtiene así

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n e^{\frac{h-1}{n}} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k}{n}} \cdot \sum_{h=1}^n e^{\frac{h}{n}} = \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot e^{-\frac{1}{n}} \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \cdot e^{\frac{1}{n}} \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{(e-1)^2}{e} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\iint_Q e^{x-y} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{(e-1)^2}{e}.$$

2 - Calcular la integral $\iint_T xy dx dy$, donde T indica el triángulo del plano xy definido por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$ (ver fig. 12)

Una vez fijado n , entero positivo, las rectas $x = \frac{h}{n}$ ($h = 0, 1, \dots, n-1$) y las rectas $y = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) dividen T en un cierto número de cuadrados de lado $\frac{1}{n}$ y en n triángulos rectángulos isósceles de catetos iguales a $\frac{1}{n}$.

Cada uno de los citados cuadrados está definido por las $\frac{h-1}{n} \leq x \leq \frac{h}{n}$, $\frac{n-h}{n}$ ($h = 1, 2, \dots, n-1$); $\frac{k-1}{n} \leq y \leq \frac{k}{n}$, ($k = 1, 2, \dots, n-h$) y cada uno de los triángulos por las

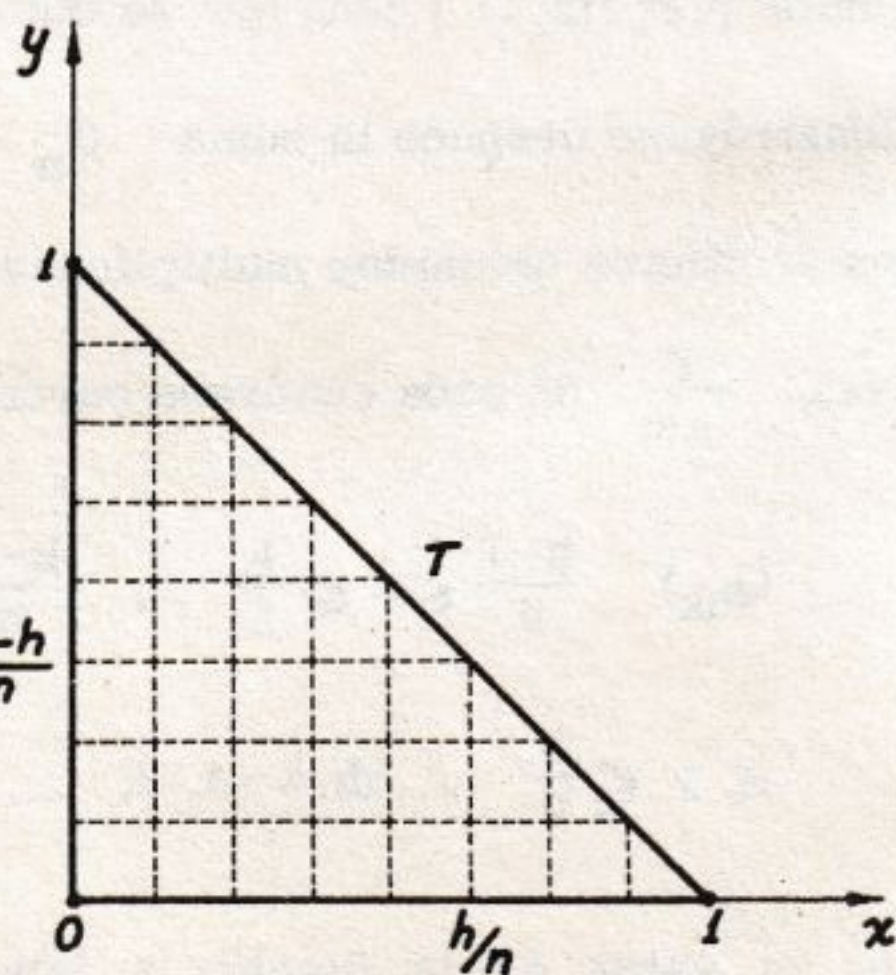


Fig. 12

$$\frac{h-1}{n} \leq x \leq \frac{h}{n}, \quad \frac{n-h}{n} \leq y \leq 1-x, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Multiplicando el área $\frac{1}{n^2}$ de cada uno de los cuadrados por el valor de la función a integrar xy en, por ejemplo, el vértice $(\frac{h}{n}, \frac{k}{n})$ del mismo cuadrado; multiplicando el área de cada triángulo por el valor que xy asume en el vértice $(\frac{h}{n}, \frac{n-h}{n})$ y sumando todos los productos obtenidos, se obtiene la suma integral

$$\sigma_n = \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-h} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{hk}{n^2} + \sum_{h=1}^n \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{h(n-h)}{n^2}.$$

La expresión de σ_n puede transformarse como sigue (*)

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n^4} \sum_{h=1}^{n-1} h \frac{(n-h)(n-h+1)}{2} + \frac{1}{2n^4} \left[n \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \\ &= \frac{1}{2n^4} \left[n(n+1) \frac{(n-1)n}{2} - (2n+1) \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \right] + \frac{n^2-1}{12n^3} = \\ &= \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{24n^3} + \frac{n^2-1}{12n^3} \end{aligned}$$

y se deduce

$$\iint_T xy \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{24}.$$

3 - VALOR MEDIO DE UNA FUNCION.

En "Lecciones", Cap. XXII, n° 1 hemos definido el valor medio μ de una función continua $f(P)$ en un dominio acotado y medible A , mediante la fórmula

$$\mu = \frac{1}{\text{med } A} \int_A f(P) \, dT$$

(*) Téngase presente las fórmulas $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, (ver "Ejercicios", Cap. II, ej. 31).

Por ejemplo, teniendo en cuenta los resultados de los ejercicios 1, 2, se tiene que:

el valor medio de la función e^{x-y} en el cuadrado $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ es igual a $\frac{(e-1)^2}{e}$;

el valor medio de la función xy en el triángulo $(x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1)$ es igual a $\frac{1}{12}$.

Para una función $f(x,y) \geq 0$ de dos variables, el valor medio μ en un dominio A del plano xy tiene el siguiente significado geométrico: el cilindroide relativo a la función $f(x,y)$ que tiene por base el dominio A tiene el mismo volumen que el cilindro de la misma base y altura μ (ver "Lecciones, Cap. XXII, n° 2) .

4 - Sea μ el valor medio de la función continua $f(P)$ en el dominio A y sean m, M el mínimo y el máximo absolutos de $f(P)$ en A . Demostrar que, si la $f(P)$ no es constante en A resulta $m < \mu < M$.

El teorema de la media demostrado en "Lecciones", Cap. XXII, n° 1 asegura solamente que $m \leq \mu \leq M$. Se trata entonces de precisar que, si la $f(P)$ no es constante en A , no puede ser ni $\mu = m$, ni $\mu = M$. En efecto ; si fuese $\mu = M$ se tendría $\int_A f(P) dT = m \cdot \text{med } A$, o sea $\int_A [f(P) - m] dT = 0$; pero, por una conocida propiedad, de esta última igualdad y del hecho que la función $f(P) - m$ es no negativa en A , seguirá que $f(P) - m$ es idénticamente nula en A , o sea, que en A la $f(P)$ vale siempre m , lo que está contra la hipótesis. Análogamente se demuestra que no puede ser $\mu = m$.

5 - CALCULO NUMERICO DE UNA INTEGRAL POR MEDIO DE LAS SUMAS INTEGRALES.

Calcular valores aproximados por defecto y por exceso de la siguiente integral

$$I = \int_T \sqrt{x^2 + y^4} \, dx \, dy \quad ,$$

donde T es el triángulo $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x)$ del plano xy (fig. 13).

Con la construcción indicada en la figura subdividamos T en 10 cuadrados iguales de lado $\frac{1}{5}$ y en 5 triángulos isósceles de catetos iguales a $\frac{1}{5}$. Es evidente que en cada uno de estos dominios parciales el mínimo $\underline{}$ o el máximo $\overline{}$ valor de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ es asumido en el vértice inferior izquierdo $\underline{}$ o superior derecho $\overline{}$.

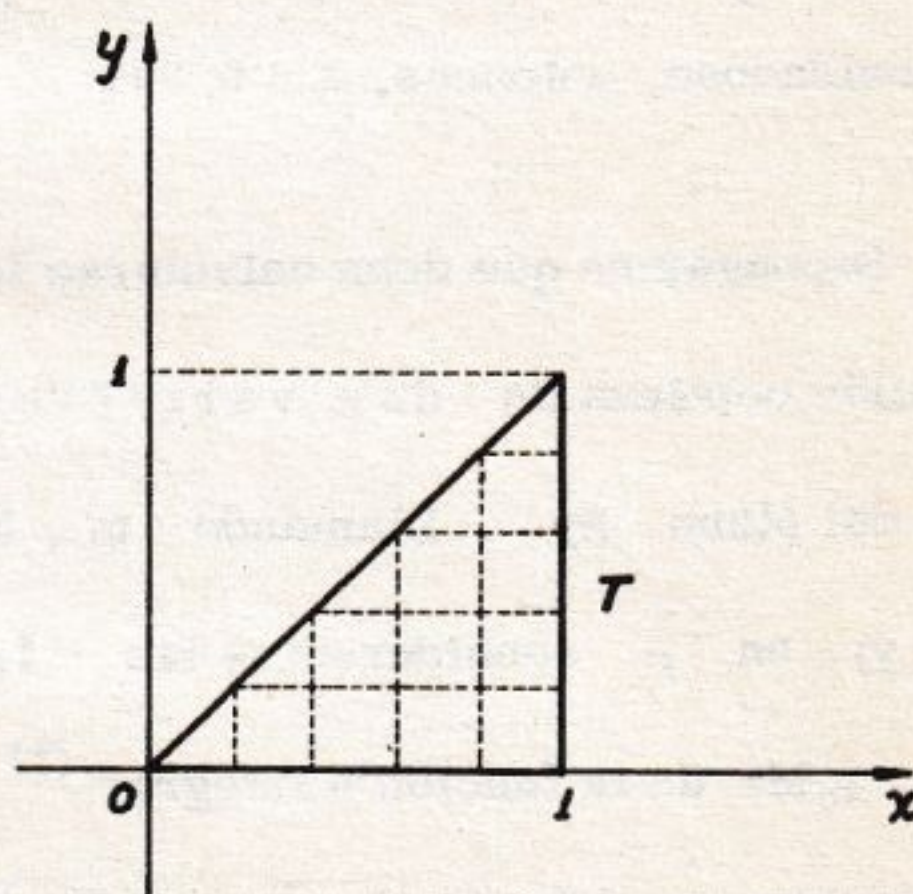


Fig. 13

Por lo tanto, si indicamos con z_{ik} al valor de la $f(x, y)$ en el punto $(\frac{i}{5}, \frac{k}{5})$ podemos afirmar que

$$s < I < S$$

con

$$s = \frac{1}{25} \left[(z_{10} + z_{20} + z_{30} + z_{40}) + (z_{21} + z_{31} + z_{41}) + (z_{32} + z_{42}) + z_{43} \right] +$$

$$+ \frac{1}{50} (z_{00} + z_{11} + z_{22} + z_{33} + z_{44}) \quad ,$$

$$S = \frac{1}{25} \left[(z_{21} + z_{31} + z_{41} + z_{51}) + (z_{32} + z_{42} + z_{52}) + (z_{43} + z_{53}) + z_{54} \right] +$$

$$+ \frac{1}{50} (z_{11} + z_{22} + z_{33} + z_{44} + z_{55})$$

Realizando los cálculos numéricos se encuentra para las $z_{ik} = \sqrt{\left(\frac{i}{5}\right)^2 + \left(\frac{k}{5}\right)^4}$ la siguiente tabla de valores (redondeados a la 5^a cifra decimal) :

$\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1	-	0,20396	0,40200	0,60133	0,80100	1,00080
2	-	-	0,43081	0,62097	0,81584	1,01272
3	-	-	-	0,69971	0,87727	1,06283
4	-	-	-	-	1,02450	1,18727
5	-	-	-	-	-	1,41421

obteniéndose, entonces, $s = 0,291\dots$; $S = 0,410\dots$

6 - Supongamos que deba calcularse la integral $I = \iint_A f(x, y) dx dy$ de una función continua de dos variables sobre un dominio A acotado y medible del plano xy . Llamando m, M al mínimo y al máximo absolutos de la $f(x, y)$ en A consideremos las líneas de nivel $f(x, y) = c$ (con $m \leq c \leq M$) de la función a integrar. (*)

Dividamos el intervalo $[m, M]$ en intervalos parciales mediante los puntos

$$m = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < c_n = M \quad (1)$$

y tracemos en A las líneas de nivel

$$f(x, y) = c_0, \quad f(x, y) = c_1, \quad f(x, y) = c_2, \quad \dots, \quad f(x, y) = c_{n-1}, \quad f(x, y) = c_n$$

(*) Para poder hablar de las líneas de nivel (ver "Ejercicios", Cap. XV, ej. 3) no basta la hipótesis de continuidad de la $f(x, y)$; es necesario suponer verificadas las otras hipótesis señaladas en "Lecciones", Capítulo XXVII, n. 4. Debe tenerse presente que cada una de las líneas de nivel (o la parte de ellas que está contenida en A) puede reducirse a uno o varios puntos aislados.

Hemos así realizado una descomposición del dominio A en dominios parciales T_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) en cada uno de los cuales el mínimo y el máximo valor de la $f(x, y)$ coinciden con dos consecutivos c_{i-1} , c_i , respectivamente, de los números (1). Por lo tanto, las dos sumas

$$\zeta' = \sum_{i=1}^n c_{i-1} \text{ área } T_i \quad \zeta'' = \sum_{i=1}^n c_i \text{ área } T_i \quad (2)$$

dan valores aproximados por defecto y por exceso de la integral I .

Si llamamos δ a la máxima de las diferencias $c_i - c_{i-1}$ no podemos afirmar que para $\delta \rightarrow 0$ las sumas (2) tiendan a la integral porque, al tender δ a cero, no tiende a cero el máximo diámetro de los dominios T_i . Sin embargo, tal propiedad vale, es decir, se tiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \zeta' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \zeta'' = I \quad (3)$$

Se tiene, en efecto,

$$\zeta' \leq I \leq \zeta'' \quad , \quad \zeta'' - \zeta' = \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i-1}) \text{ área } T_i \leq \delta \cdot \text{área } A$$

y entonces, dado $\varepsilon > 0$, apenas sea $\delta < \frac{\varepsilon}{\text{área } A}$, resultará con certeza

$$0 \leq I - \zeta' < \varepsilon \quad , \quad 0 \leq \zeta'' - I < \varepsilon \quad ,$$

lo que prueba las (3).

El método resulta más provechoso cuando es fácil el cálculo de las áreas de los dominios T_i .

Demos un ejemplo simple considerando la integral

$$I = \iint_Q (x^2 + y^2) dx dy$$

donde Q es el cuadrante de círculo ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$).

Resulta $m = 0$, $M = 1$ y las líneas de nivel de la función que se integra son las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = c$. Si dividimos el intervalo $[0, 1]$ (donde varía c) en n partes iguales y trazamos las líneas de nivel $x^2 + y^2 = \frac{i}{n}$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) que son circunferencias con centro en O y radios $0, \sqrt{\frac{1}{n}}, \sqrt{\frac{2}{n}}, \dots, 1$ quedará descom-

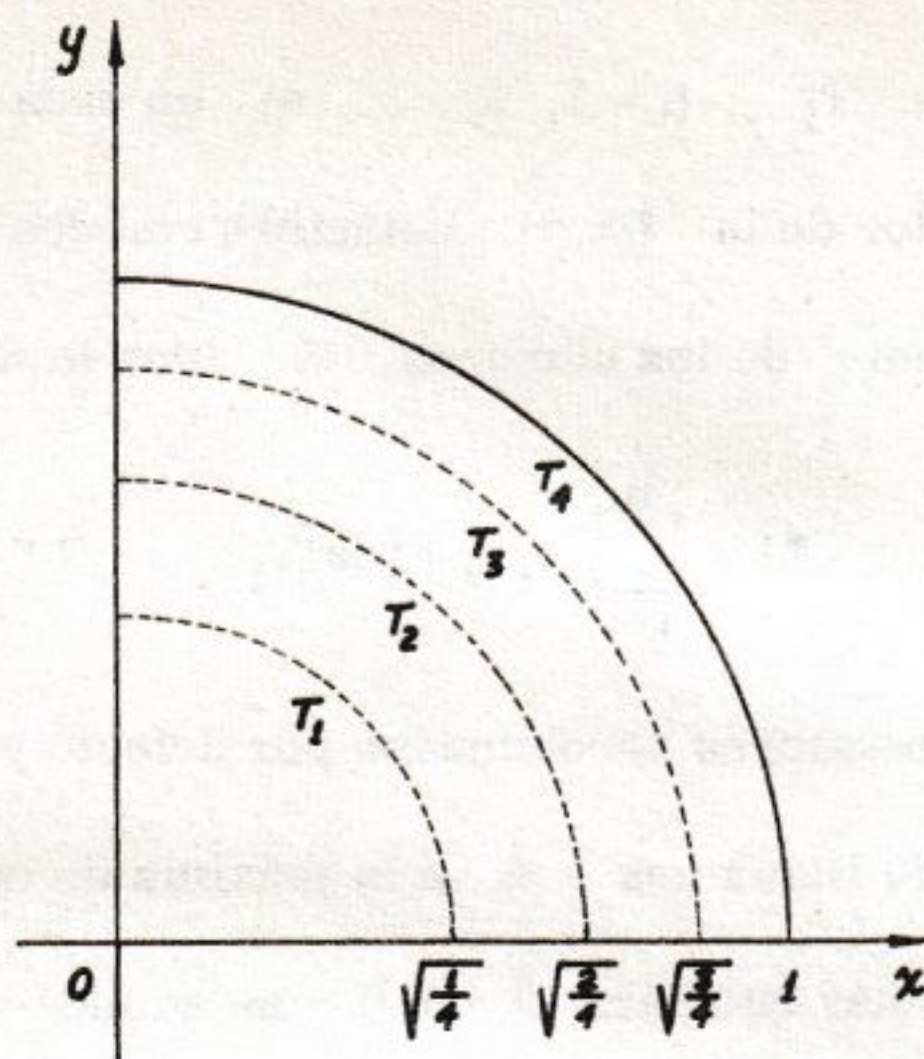


Fig. 14

puesto Q en los n dominios T_1, T_2, \dots, T_n de la fig. 14 (donde se ha supuesto $n = 4$). Se ve de inmediato que tales dominios tienen sus áreas iguales a $\frac{\pi}{4n}$ y que resulta

$$\zeta' = \frac{\pi}{4n} \left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{\pi}{4n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

$$\zeta'' = \frac{\pi}{4n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \frac{\pi}{4n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\pi}{8} \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

por lo que, según las (3), se logrará $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta' = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta'' = \frac{\pi}{8}$

Análogamente para las integrales de las funciones de tres variables, considerando las superficies de nivel de la función a integrar.

7 - BARICENTROS Y MOMENTOS DE INERCIA DE CURVAS . (ver "Lecciones", Cap. XXII, n° 3).

Calcular el momento de inercia de una circunferencia homogénea respecto de uno de sus diámetros.

Supongamos que la circunferencia γ que se considere tenga $x^2 + y^2 = r^2$

por ecuación y se desee calcular el momento de inercia I respecto del eje x . Si suponemos la densidad lineal igual a 1, tendremos que I se calculará con la integral curvilínea $\int_{\gamma} y^2 ds$ (con γ recorrido en el sentido de las s crecientes). Asumiendo como parámetro sobre γ la anomalía φ se tendrá

$$I = \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \varphi r d\varphi = \dots = \pi r^3.$$

8 - Determinar el baricentro de un arco de circunferencia homogéneo.

En las condiciones de fig. 15, el baricentro del arco γ (simétrico respecto del eje x) se encuentra sobre el eje x y su abscisa ξ la da la fórmula

$$\xi = \frac{1}{2r\alpha} \int_{\gamma(A, B)} x ds$$

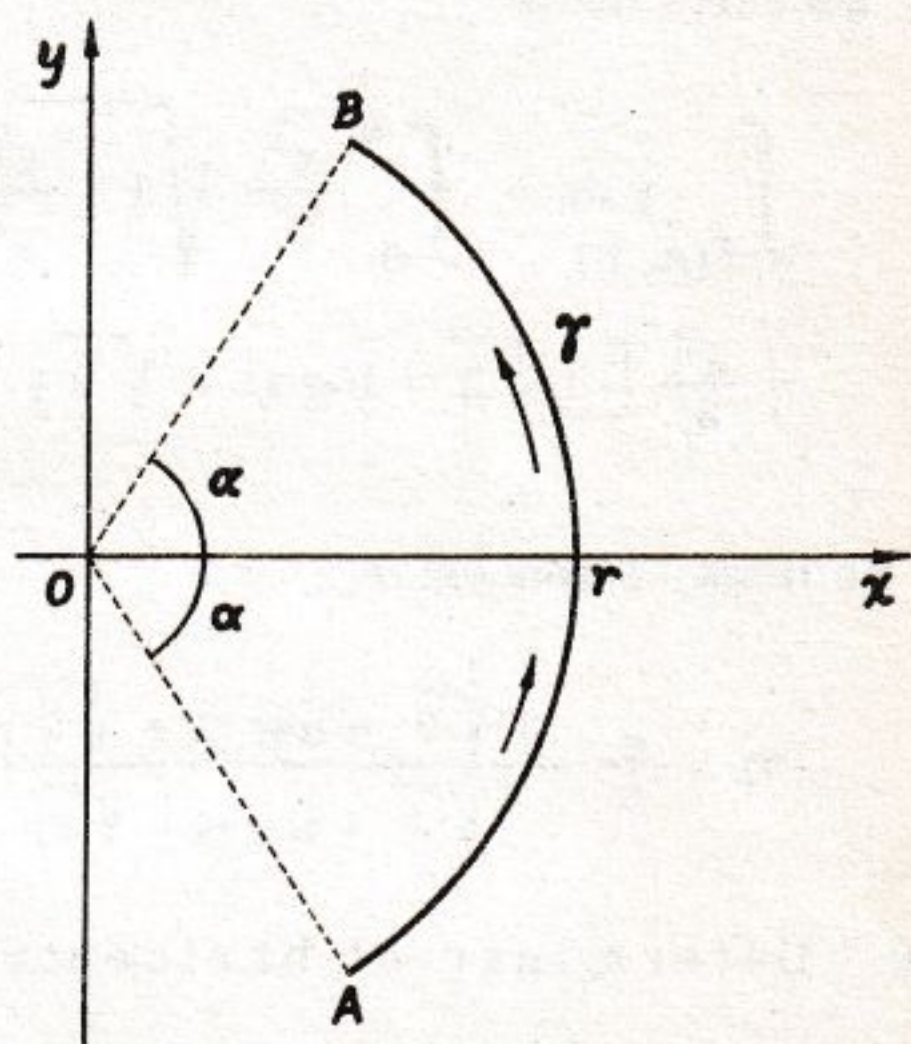


Fig. 15

en la que está sobreentendido que s debe contarse positivamente desde A hacia B . Se encuentra $\xi = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; en particular si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (caso de la semicircunferencia) se tendrá $\xi = \frac{2}{\pi} r$.

9 - Determinar el baricentro del arco de parábola definido por $2ay = x^2$, $0 \leq y \leq \frac{a}{2}$, que supondremos homogéneo.

El baricentro de tal arco γ se encuentra sobre el eje y ; la ordenada η del mismo está dada por la fórmula

$$\eta = \frac{1}{L} \int_{\gamma(A, B)} y ds$$

con s contado positivamente en el sentido indicado en la fig. 16 y con L igual a la longitud de γ . Se tiene, ante todo,

$$L = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} dx = \dots =$$

$$= a \left[\sqrt{2} + \log (1 + \sqrt{2}) \right]$$

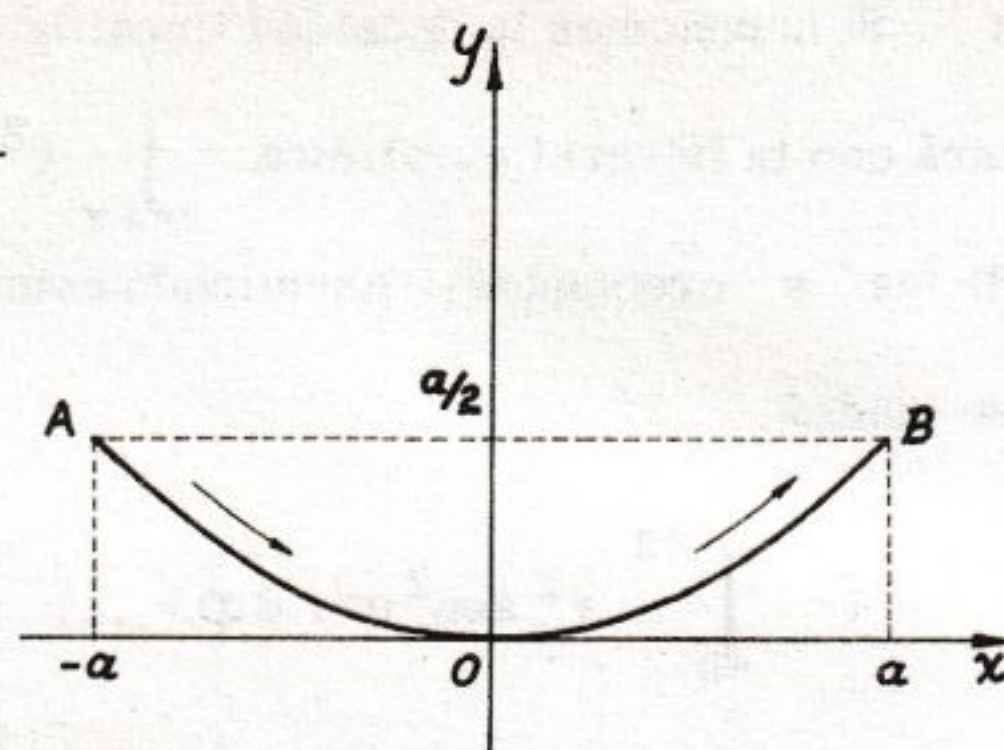


Fig. 16

y, sucesivamente,

$$\int_{\gamma(A, B)} y ds = \int_{-a}^a \frac{x^2}{2a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx = \dots =$$

$$= \frac{a^2}{8} \left[3\sqrt{2} - \log (1 + \sqrt{2}) \right].$$

Se llega, entonces, a

$$\eta = \frac{a}{8} \frac{3\sqrt{2} - \log (1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + \log (1 + \sqrt{2})}.$$

10 - Determinar el baricentro de un arco homogéneo de catenaria.

Sea $y = a \cosh \frac{x}{a}$ la ecuación de la catenaria; x_0 y x_1 las abscisas de los extremos P_0 , P_1 del arco considerado.

El lector encontrará para las coordenadas ξ , η del baricentro G buscado, las siguientes expresiones

$$\xi = \frac{x_1 \sinh \frac{x_1}{a} - x_0 \sinh \frac{x_0}{a} - a(\cosh \frac{x_1}{a} - \cosh \frac{x_0}{a})}{\sinh \frac{x_1}{a} - \sinh \frac{x_0}{a}}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 - x_0 + a(\cosh \frac{x_1}{a} \sinh \frac{x_1}{a} - \cosh \frac{x_0}{a} \sinh \frac{x_0}{a})}{\sinh \frac{x_1}{a} - \sinh \frac{x_0}{a}}$$

Es fácil verificar que G tiene la misma abscisa del punto donde se cortan las tangentes a la catenaria en los puntos P_0 y P_1 , teniendo por ordenada la mitad de la del punto intersección de las normales a la catenaria en los mismos puntos P_0 , P_1 .

11 - CALCULO DE INTEGRALES DOBLES (ver "Lecciones", Cap. XXII, n^{os} 2, 3, 4, 5, 7, 9).

Calcular la integral doble $\iint_T \sin(x-y) dx dy$, donde T representa el triángulo definido por $x \leq \frac{\pi}{2}$, $y \leq \frac{\pi}{2}$, $x+y \geq 0$.

Considerando T como un dominio normal con respecto al eje x (fig. 17) es decir, definido por $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, puede escribirse

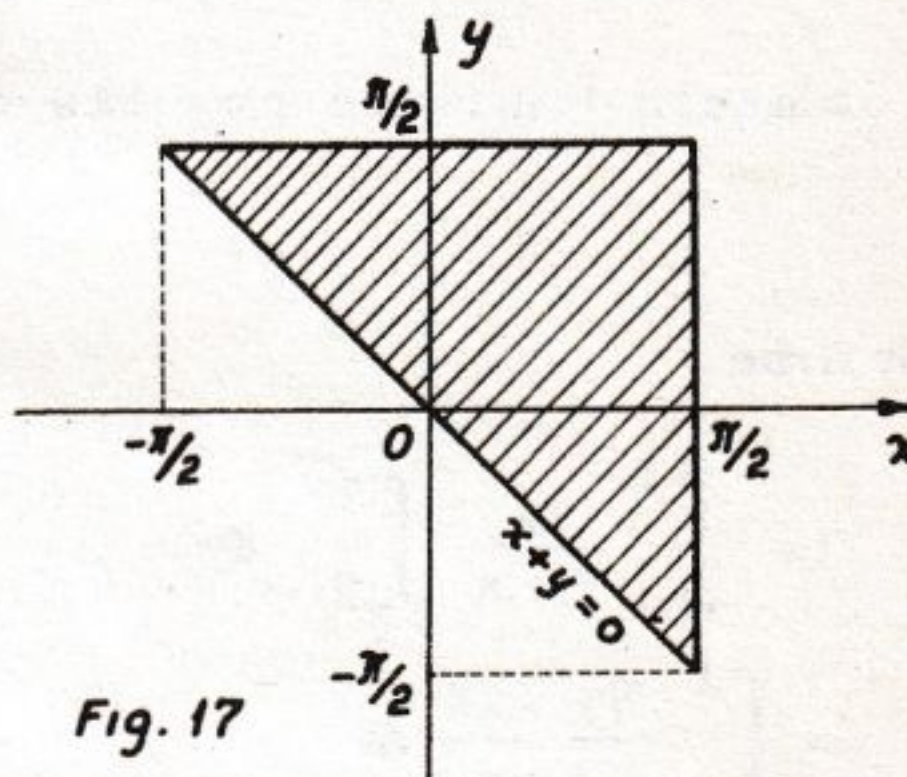


Fig. 17

$$\begin{aligned} \iint_T \sin(x-y) dx dy &= \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_{-x}^{\pi/2} \sin(x-y) dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\cos(x-y) \right]_{y=-x}^{y=\pi/2} dx = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x - \cos 2x) dx = \left[-\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0. \end{aligned}$$

12 - Calcular la integral doble $\iint_T \frac{x^2 + y^2}{x+y} dx dy$, donde T representa el triángulo definido por $x \leq 1$, $y \leq 1$, $x+y \geq 1$ (fig. 18).

El triángulo T es un dominio normal respecto del eje x ($0 \leq x \leq 1$, $1-x \leq y \leq 1$), por lo que resulta

$$\begin{aligned}
 \iint_T \frac{x^2 + y^2}{x + y} dx dy &= \\
 &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 \frac{x^2 + y^2}{x + y} dy = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - xy + 2x^2 \log(x+y) \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \\
 &= \int_0^1 \left[x - \frac{3x^2}{2} + 2x^2 \log(x+1) \right] dx = \dots = \\
 &= \frac{4}{3} \log 2 - \frac{5}{9} .
 \end{aligned}$$

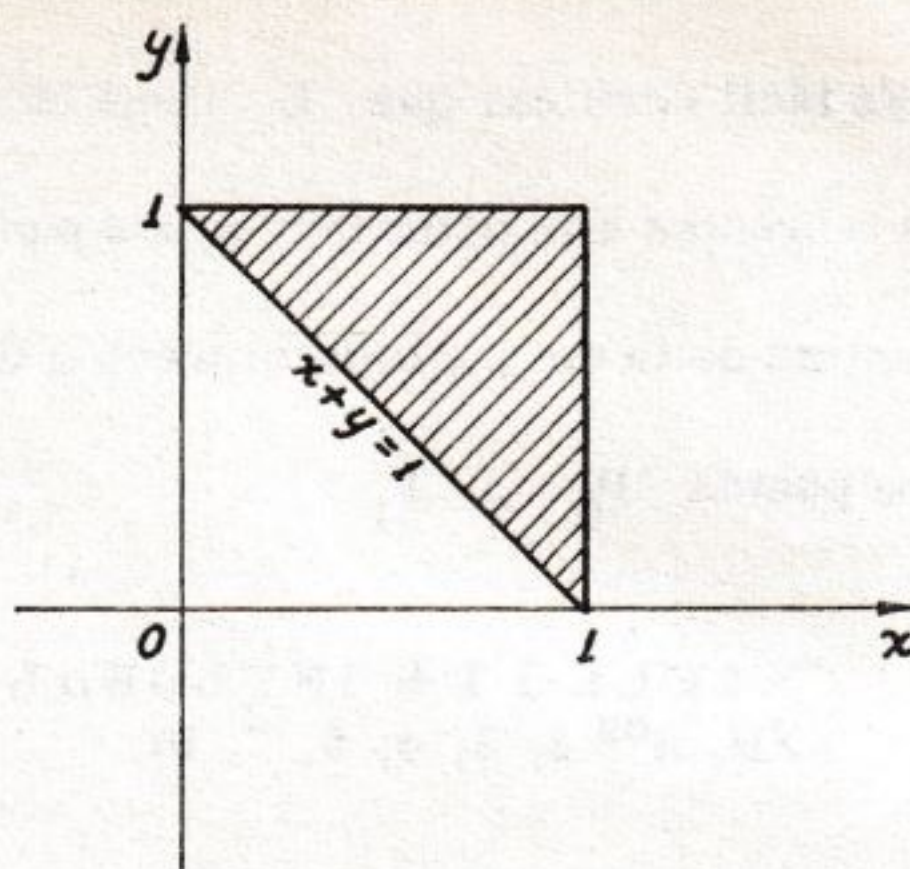


Fig. 18

13 - Calcular la integral doble $I = \iint_T \frac{dx dy}{1+x}$ donde T indica el dominio limitado por las dos parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ (fig. 19).

Se tiene

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \\
 &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x} - x^2}{1+x} dx
 \end{aligned}$$

y, realizando en la última integral la sustitución $x = t^2$:

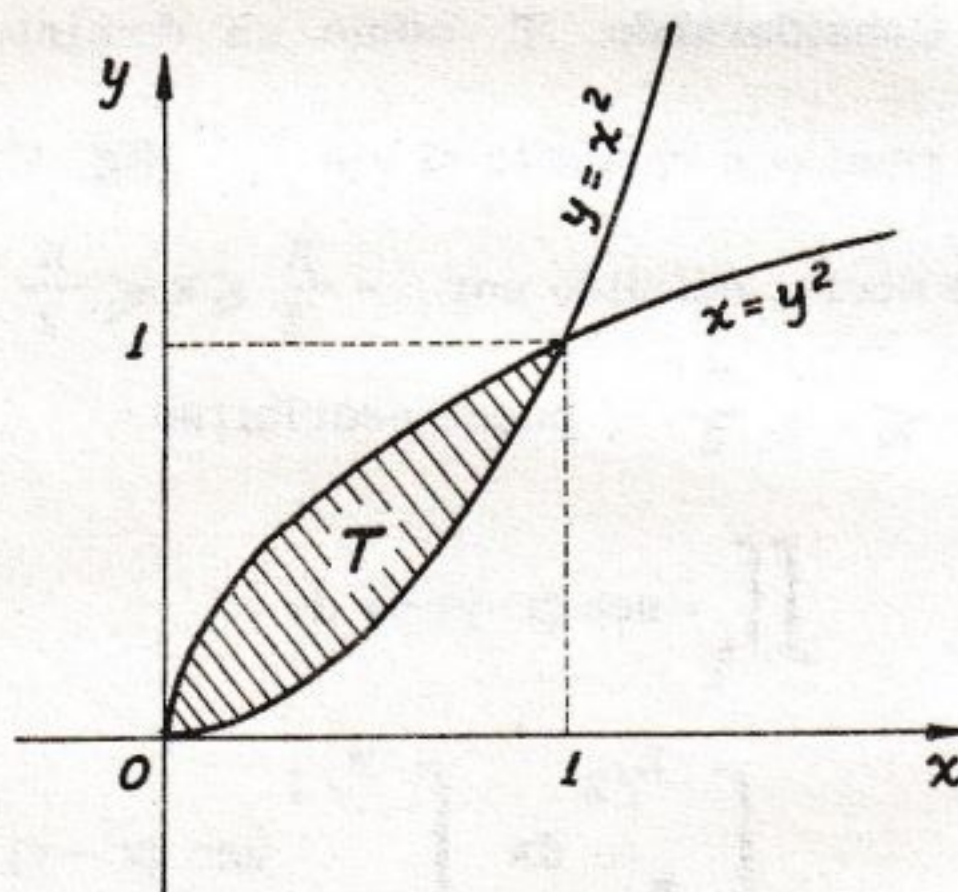


Fig. 19

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^1 \frac{t - t^4}{1+t^2} t dt = 2 \int_0^1 \left(-t^3 + t + 1 - \frac{1+t}{1+t^2} \right) dt = \\
 &= 2 \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + t - \arctg t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{5-\pi}{2} - \log 2 .
 \end{aligned}$$

14 - Determinar el baricentro del triángulo T de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ (fig. 20) con la hipótesis de que la densidad superficial sea una función exponencial de la ordena-

da y .

El baricentro buscado G se encuentra sobre el eje y ; si indicamos con $\delta(y) = \delta_0 e^{\lambda y}$ la densidad, la ordenada η de G queda expresada por la fórmula

$$\eta = \frac{\iint_T y \delta_0 e^{\lambda y} dx dy}{\iint_T \delta_0 e^{\lambda y} dx dy} = \frac{\iint_T y e^{\lambda y} dx dy}{\iint_T e^{\lambda y} dx dy} .$$

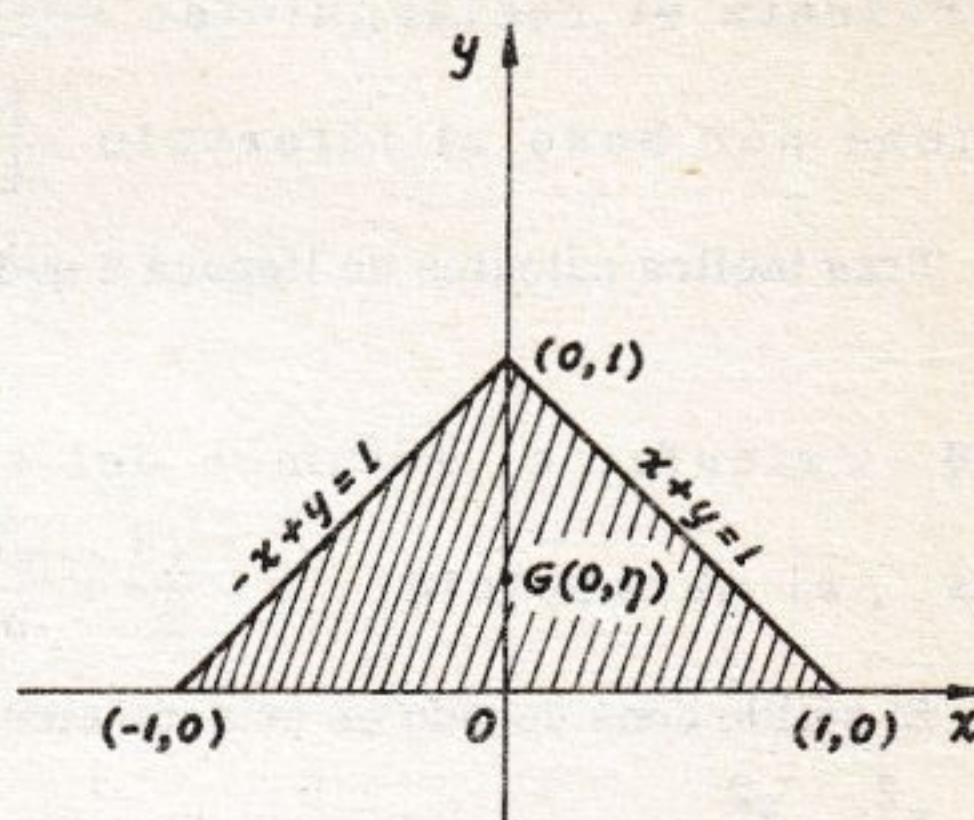


Fig. 20

Considerando a T como un dominio normal con respecto al eje y se obtiene

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\int_0^1 y e^{\lambda y} dy \int_{y-1}^{1-y} dx}{\int_0^1 e^{\lambda y} dy \int_{y-1}^{1-y} dx} = \frac{\int_0^1 y(1-y)e^{\lambda y} dy}{\int_0^1 (1-y)e^{\lambda y} dy} = \dots = \\ &= \frac{(\lambda - 2)e^{\lambda} + \lambda + 2}{\lambda(e^{\lambda} - \lambda - 1)} . \end{aligned}$$

Verifíquese que el $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta = \frac{1}{3}$ con lo que vuelve a obtenerse un conocido resultado relativo al baricentro de un triángulo homogéneo.

15 - Calcular la integral doble $\iint_T \frac{\cos y}{x^2} dx dy$ donde T re

presenta el rectánguloide relativo a la función $y = \frac{1}{x}$ que tiene por base el intervalo $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi} \right]$.

Tras fáciles cálculos se llegará a que tal integral vale 1.

16 - Calcular el volumen del sólido limitado por el plano xy , el paraboloide $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ y el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

El sólido considerado es evidentemente el cilindroide relativo a la función $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ con base el dominio plano T limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; de ahí que su volumen V esté dado por la fórmula

$$V = \iint_T \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) dx dy.$$

Considerando a T como dominio normal con respecto al eje x se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a dx \int_{-b/a}^{b/a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) dy = \dots = \\ &= \frac{2b(3a-b)}{3a^3} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx + \frac{2b^2}{3a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dots = \\ &= \frac{1}{4} \pi ab(a+b). \end{aligned}$$

17 - Calcular la integral doble $\iint_T (x^3 + y) dx dy$, donde T indica el dominio representado en la fig. 21.

Puede considerarse a T como la suma de dos dominios normales con respecto al eje x , escribiendo en consecuencia,

$$\iint_T (x^3 + y) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^0 dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} (x^3 + y) dx +$$

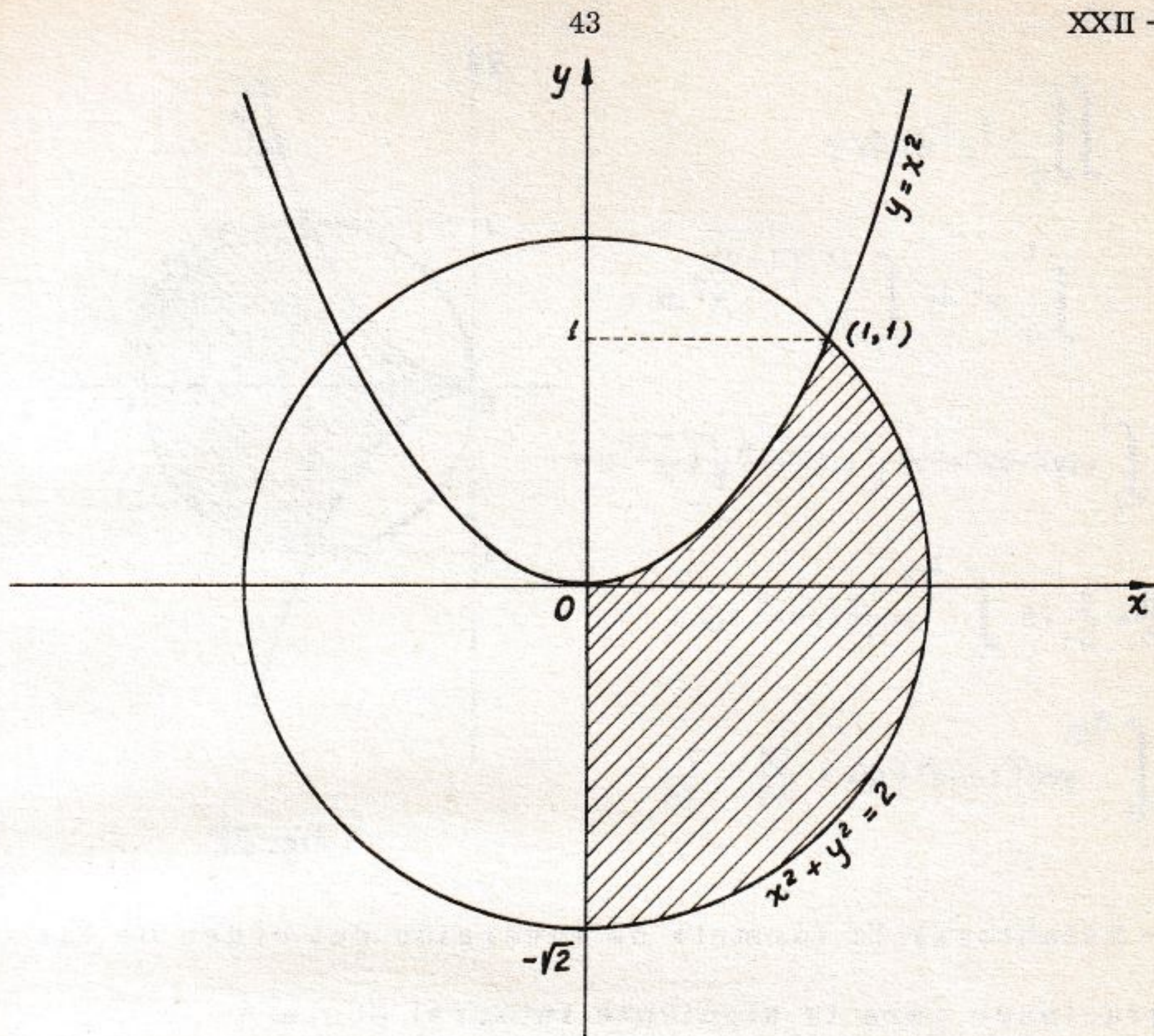


Fig. 21

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} (x^3 + y) dx = \dots = \\
 & = \int_{-\sqrt{2}}^1 \left[\frac{1}{4} (2-y^2)^2 + y \sqrt{2-y^2} \right] dy - \int_0^1 \left(\frac{1}{4} y^2 + y \sqrt{y} \right) dy = \\
 & = \left[y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{20} - \frac{1}{3} (2-y^2)^{3/2} \right]_{-\sqrt{2}}^1 - \left[\frac{y^3}{12} + \frac{2}{5} y^{5/2} \right]_0^1 = \frac{16\sqrt{2}-3}{30}
 \end{aligned}$$

18 - Calcular la integral doble $\iint_T x^2 y^2 dx dy$, donde T indica el dominio representado en la fig. 22.

Considerando a T como dominio normal respecto del eje y puede escribirse

$$\begin{aligned}
 \iint_T x^2 y^2 dx dy &= \\
 &= \int_{-1}^1 y^2 dy \int_{y^{2/3}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x^2 dx = \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^1 (4y^2 - 4y^4 + 3y^2 \sqrt{1-y^2} + y^2 \sqrt{4-y^2}) dy = \\
 &= \frac{16}{45} + \frac{2}{3} \left(3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t dt \right) = \frac{16}{45} + \frac{7}{48} .
 \end{aligned}$$

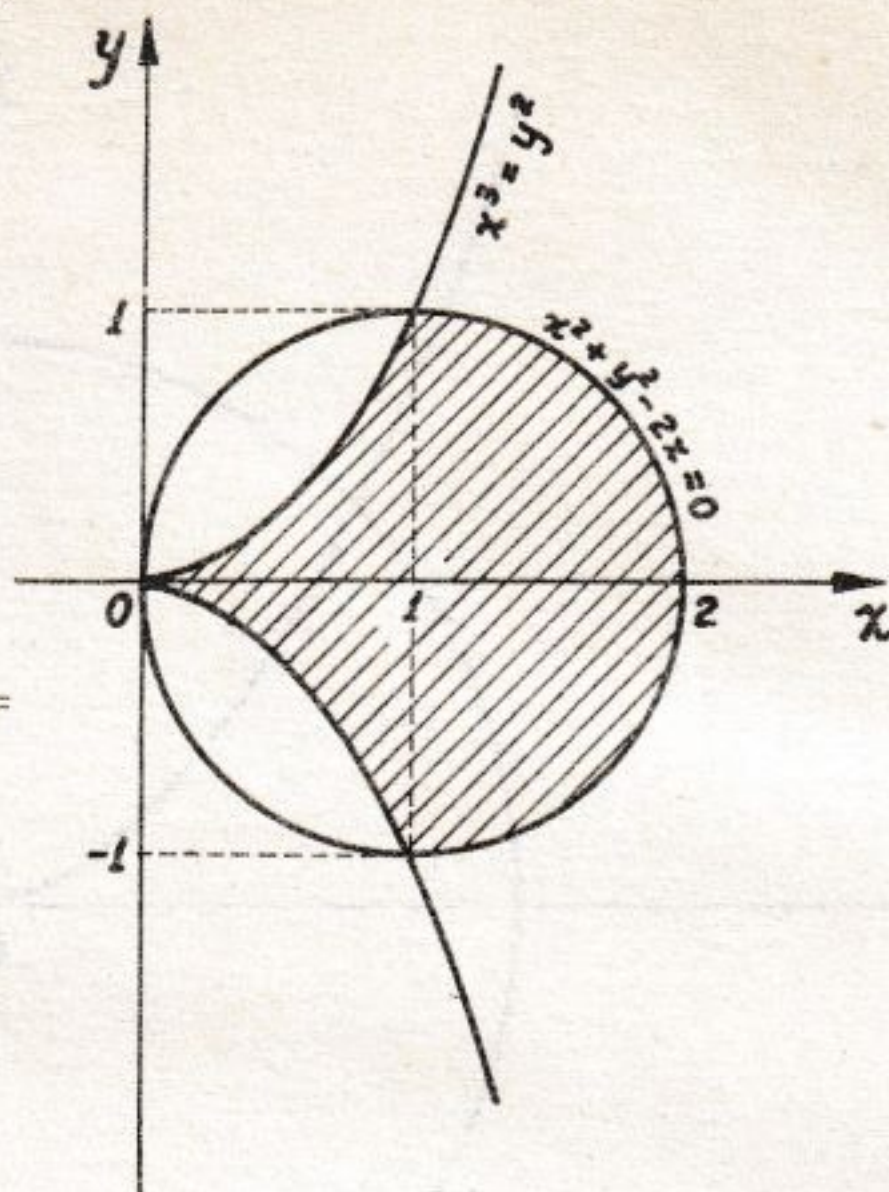


Fig. 22

19 - Establecer la fórmula de inversión del orden de las integraciones para la siguiente integral doble:

$$\int_1^2 dx \int_{\log x}^{x-1} f(x, y) dy \quad (1)$$

La integral (1) equivale a $\iint_T f(x, y) dx dy$, donde T indica el dominio normal con respecto al eje x de -
finido por $1 \leq x \leq 2$, $\log x \leq y \leq x-1$ (véase fig. 23).

Si se desea integrar primero respecto de la x y después respecto de la y , es necesario considerar a T como unión de los dos dominios T_1 , T_2 normales respecto del eje y , definidos por las

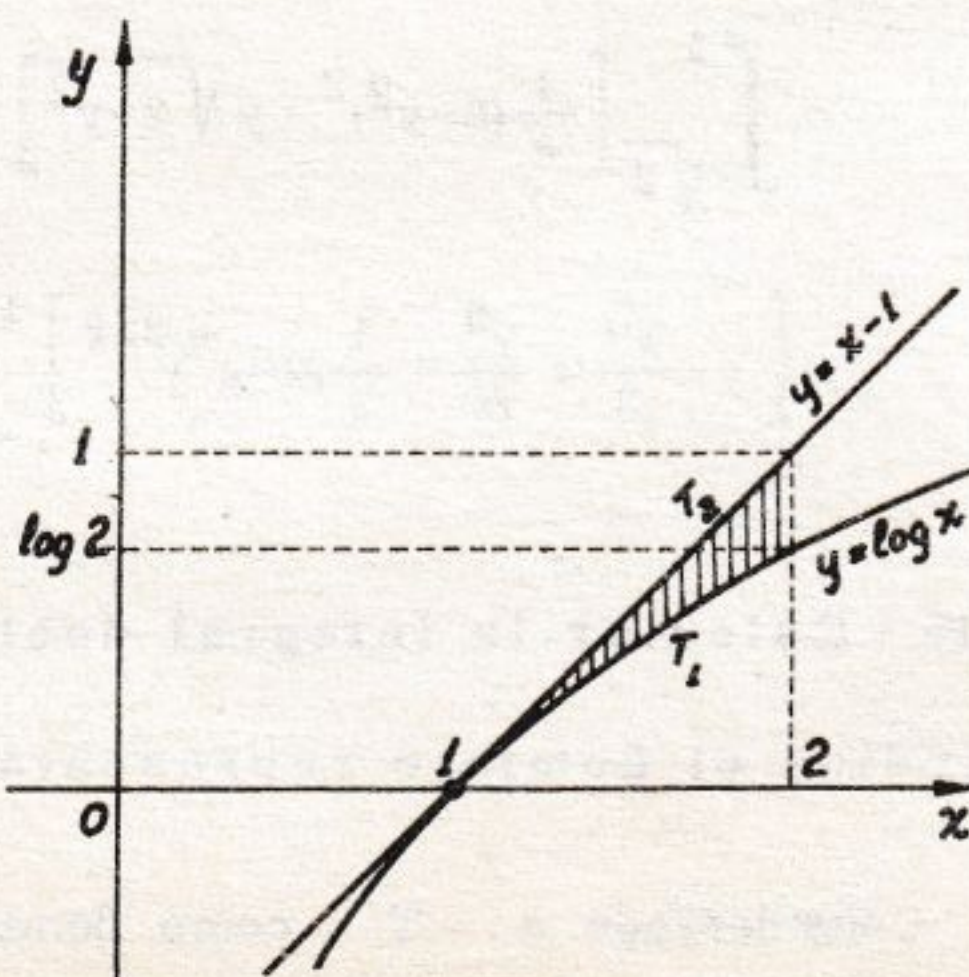


Fig. 23

$$T_1) \quad 0 \leq y \leq \log 2 \quad ; \quad y+1 \leq x \leq e^y \quad ,$$

$$T_2) \quad \log 2 \leq y \leq 1 \quad ; \quad y+1 \leq x \leq 2 \quad .$$

Por lo tanto la integral (1) es igual a

$$\int_0^{\log 2} dy \int_{y+1}^{e^y} f(x, y) dx + \int_{\log 2}^1 dy \int_{y+1}^2 f(x, y) dx \quad .$$

20 - El mismo problema del ejercicio precedente para la integral

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) dy \quad . \quad (1)$$

Se trata de la integral $\iint_T f(x, y) dx dy$ sobre el dominio T de la figura 24. Para invertir el orden de las integraciones es necesario descomponer T en la unión de tres dominios T_1 , T_2 , T_3 (normales respecto del eje y) indicados en la figura.

Adoptando para las funciones \arcsen , \arccos las ramas principales $(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos \leq \pi$)

se llega a que la integral (1) es igual a

$$\int_{-1}^{-1/\sqrt{2}} dy \int_{\arccos y}^{2\pi - \arccos y} f(x, y) dx +$$

$$+ \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{\arccos y}^{\pi - \arcsen y} f(x, y) dx +$$

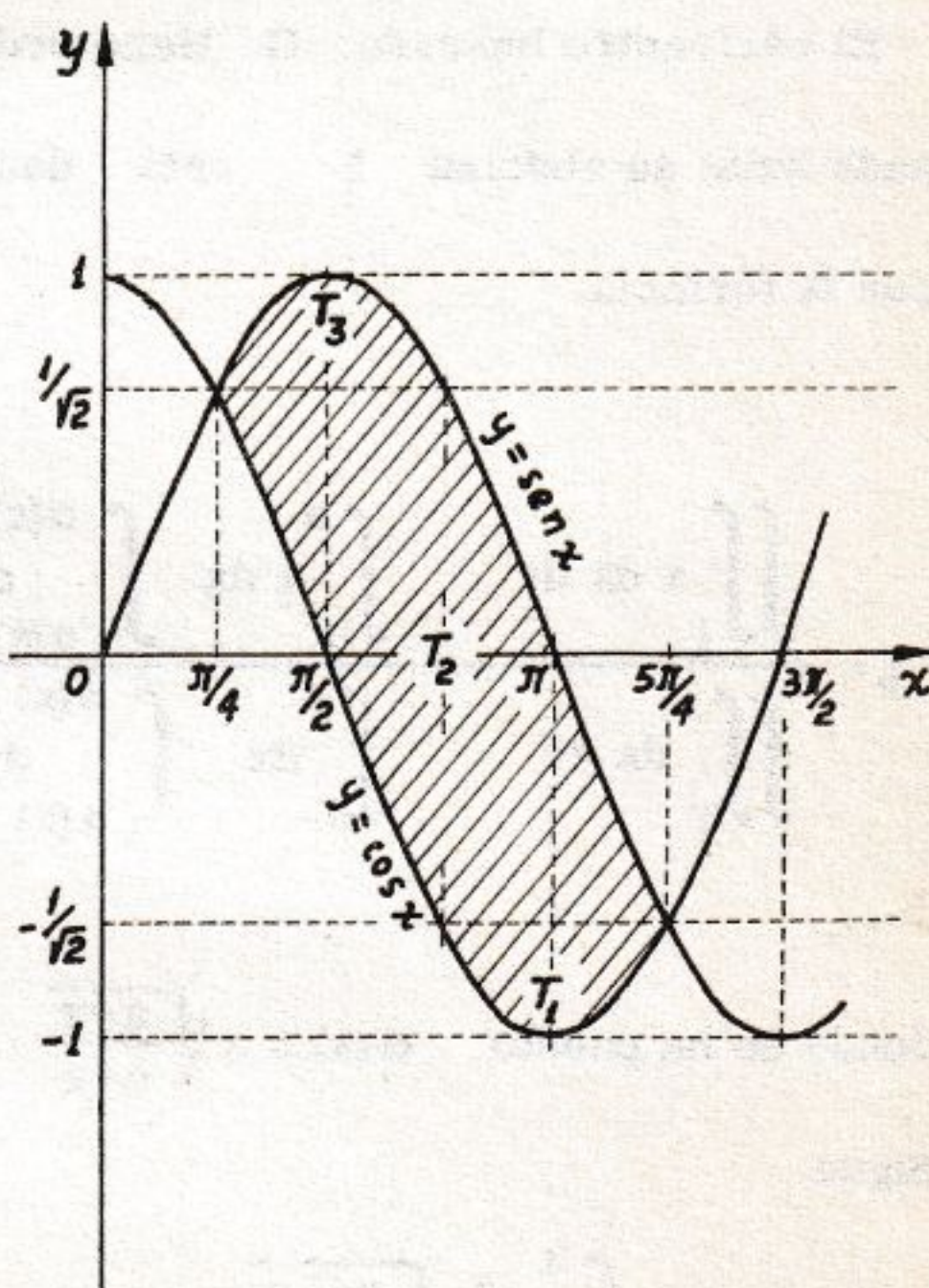


Fig. 24

$$+ \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_{\arcsen y}^{\pi - \arcsen y} f(x, y) dx .$$

21 - Rehágase el cálculo de las integrales dobles consideradas en los ejercicios 13, 14, 15, 17, 18 invirtiendo el orden de las integraciones.

22 - Determinar el baricentro del lazo de la estrofoide

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

considerándolo como una lámina plana homogénea.

El baricentro buscado G tiene ordenada nula; su abscisa ξ está dada por la fórmula

$$\xi = \frac{\iint_T x \, dx \, dy}{\iint_T dx \, dy} = \frac{\int_0^a x \, dx \int_{-\alpha(x)}^{\alpha(x)} dy}{\int_0^a dx \int_{-\alpha(x)}^{\alpha(x)} dy}$$

donde se ha puesto $\alpha(x) = x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

Sigue

$$\xi = \frac{\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx}{\int_0^a x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx}$$

y, realizando la sustitución $x = a \cos t$:

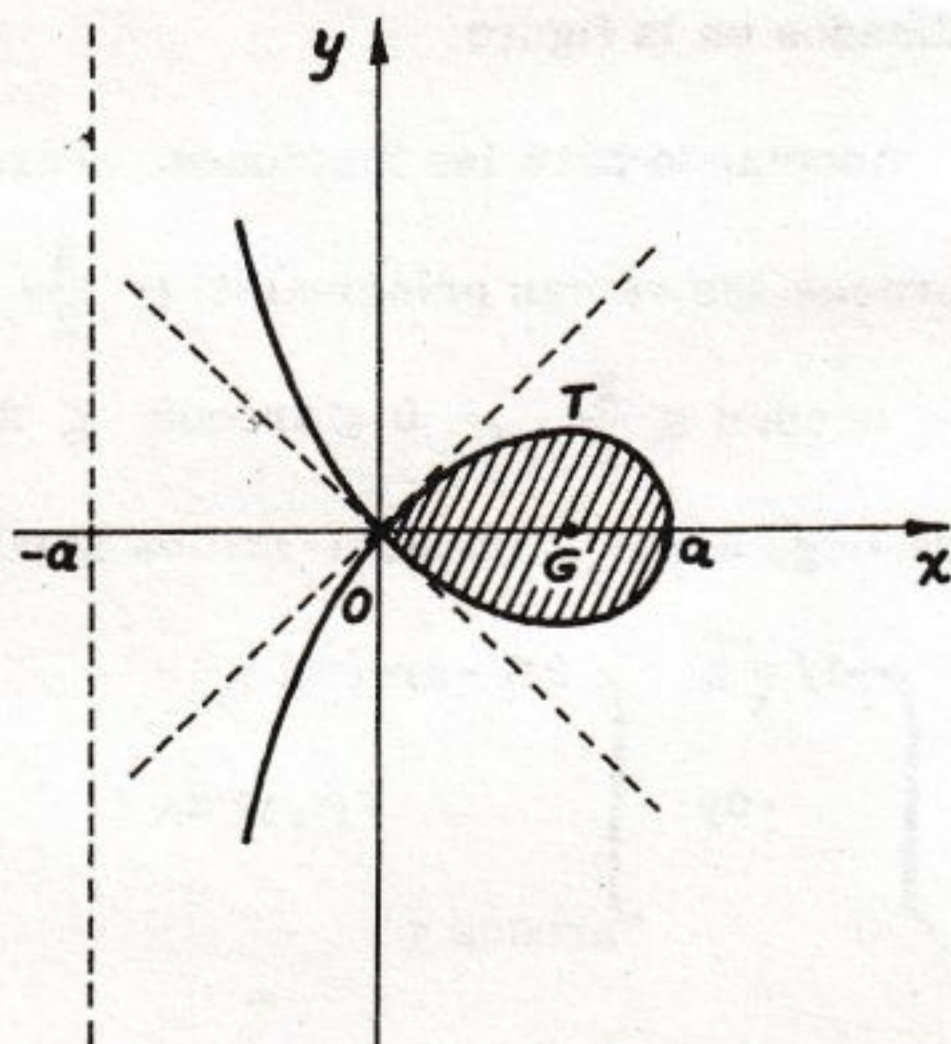


Fig. 25

$$\xi = a \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 \frac{t}{2} dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 \frac{t}{2} dt} = a \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt}{\int_0^{\pi/2} \cos t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt} =$$

$$= a \frac{3\pi - 8}{12 - 3\pi}.$$

23 - Calcular la integral doble $\iint_T e^{x-y} dx dy$, con T representando el triángulo limitado por las rectas $x+y=4$, $3x+y=4$, $x+3y=4$.

El triángulo considerado tiene los vértices en los puntos $(4, 0)$, $(0, 4)$, $(1, 1)$ [ver fig. 26] y, considerándolo como unión de dos dominios normales respecto del eje x se obtiene:

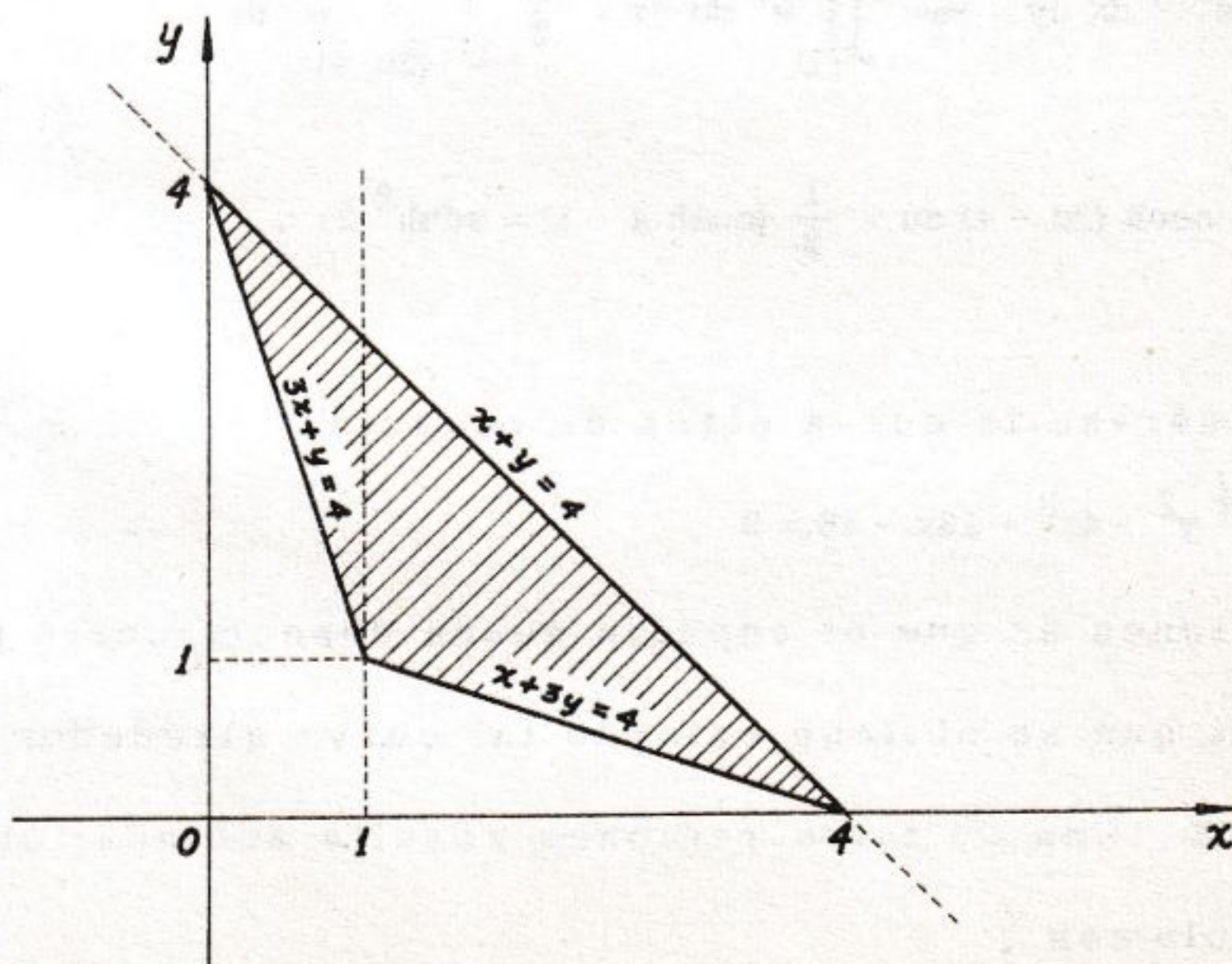


Fig. 26

$$\begin{aligned}
\iint_T e^{x-y} dx dy &= \int_0^1 e^x dx \int_{4-3x}^{4-x} e^{-y} dy + \int_1^4 e^x dx \int_{\frac{4-x}{3}}^{4-x} e^{-y} dy = \\
&= \int_0^1 (e^{4x-4} - e^{2x-4}) dx + \int_1^4 (e^{\frac{4x-4}{3}} - e^{2x-4}) dx = \\
&= \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{4} e^{-4} - \frac{1}{2} = \sinh^2 2 .
\end{aligned}$$

Obsérvese que el cálculo puede simplificarse realizando primero el cambio de variable $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, que transforma al triángulo T del plano xy en un triángulo U del plano uv con los vértices $(4, 4)$, $(4, -4)$ $(2, 0)$.

Teniendo en cuenta que $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$ se encuentra, en efecto,

$$\begin{aligned}
\iint_T e^{x-y} dx dy &= \frac{1}{2} \iint_U e^v du dv = \frac{1}{2} \int_{-(2u-4)}^{2u-4} e^v dv = \\
&= \int_2^4 \sinh(2u-4) du = \frac{1}{2} (\cosh 4 - 1) = \sinh^2 2 .
\end{aligned}$$

24 - Considérese la curva plana de ecuación

$$x^4 - x^2 y^2 - 4x^3 + 16x - 16 = 0 \quad (1)$$

y las regiones en que el espacio queda descompuesto por la superficie que se obtiene rotando tal curva alrededor de la recta $x=3$. Una de tales regiones resulta acotada; calcúlese su volumen.

Resolviendo la (1) con respecto a la y se obtiene

$$y = \pm \frac{x-2}{x} \sqrt{x^2-4} \quad (2)$$

de lo que es fácil deducir que la curva en estudio tiene el comportamiento indicado en la fig. 27.

La región acotada R a que se refiere el enunciado es la obtenida haciendo rotar el dominio T sombreado en la figura.

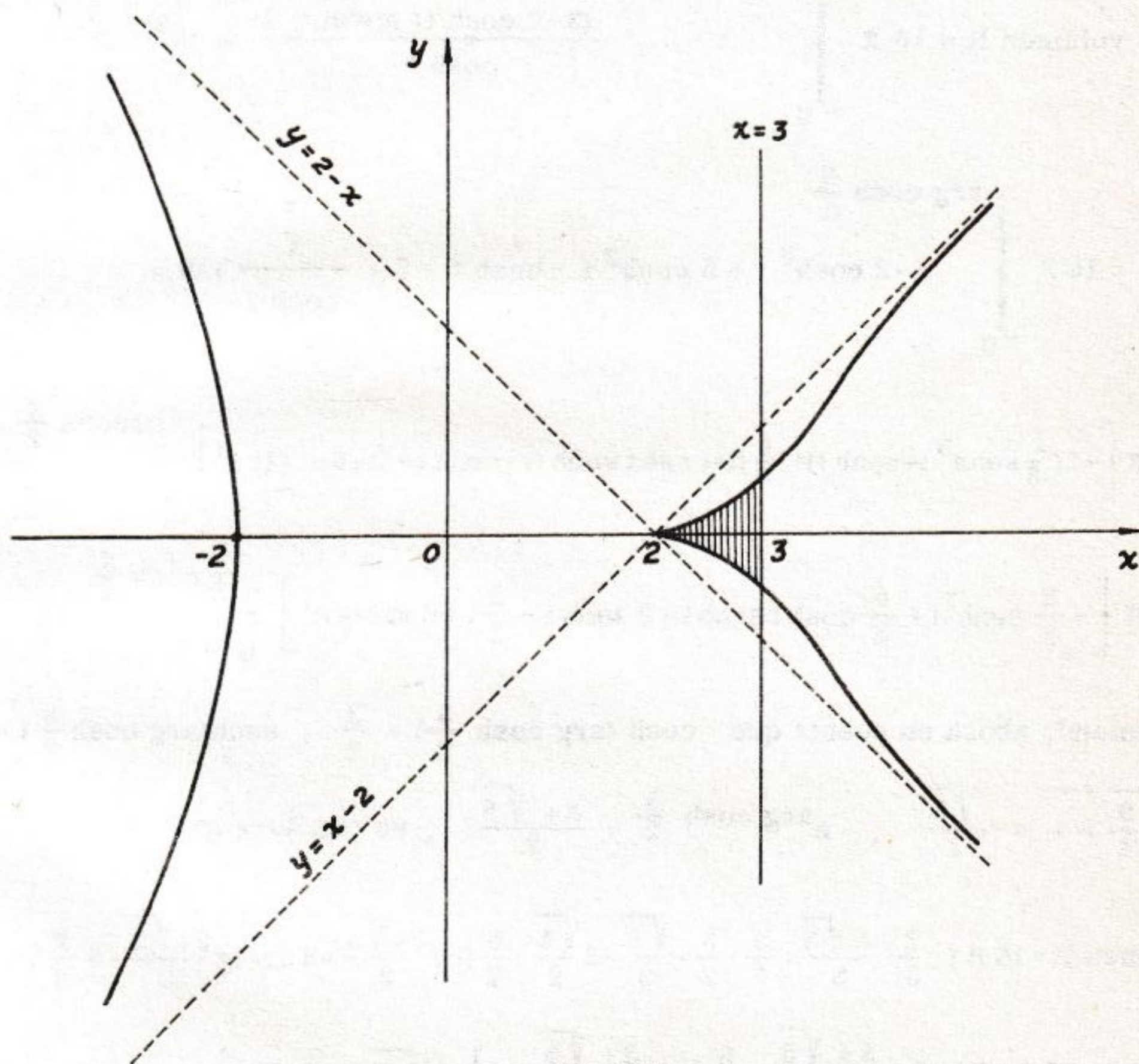


Fig. 27

Entonces, por una conocida fórmula ("Lecciones", Cap. XXII, n° 10) se tiene

$$\text{volumen } R = 2\pi \iint_T (3-x) \, dx \, dy = 2\pi \int_2^3 (3-x) \, dx \int_{-\frac{x-2}{x}\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x-2}{x}\sqrt{x^2-4}} dy =$$

$$= 4 \pi \int_2^3 \frac{(3-x)(x-2)}{x} \sqrt{x^2-4} dx$$

Para calcular esta última integral realizamos la sustitución $x = 2 \cosh t$, no tando que los límites de integración 2 y 3 se transforman en 0 y en $\arg \cosh \frac{3}{2} = \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, respectivamente; haciendo así se encuentra

$$\begin{aligned} \text{volumen } R &= 16 \pi \int_0^{\arg \cosh \frac{3}{2}} \frac{(3-2 \cosh t)(\cosh t-1)}{\cosh t} \sinh^2 t dt = \\ &= 16 \pi \int_0^{\arg \cosh \frac{3}{2}} \left(-2 \cosh^3 t + 5 \cosh^2 t - \cosh t - 5 + \frac{3}{\cosh t} \right) dt = \\ &= 16 \pi \left[-2 \left(\frac{1}{3} \sinh^3 t + \sinh t \right) + \frac{5}{2} (t + \cosh t \sinh t) - \sinh t - 5t + 6 \operatorname{arctg} e^t \right]_0^{\arg \cosh \frac{3}{2}} = \\ &= 16 \pi \left[-\frac{2}{3} \sinh^3 t + \frac{5}{2} \cosh t \sinh t - 3 \sinh t - \frac{5}{2} t + 6 \operatorname{arctg} e^t \right]_0^{\arg \cosh \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta que $\cosh(\arg \cosh \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$, $\sinh(\arg \cosh \frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $e^{\arg \cosh \frac{3}{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, se concluye que

$$\begin{aligned} \text{volumen } R &= 16 \pi \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{5 \sqrt{5}}{8} + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} - 3 \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + 6 \operatorname{arctg} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 6 \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 16 \pi \left(6 \operatorname{arctg} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{5}{2} \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{24} \sqrt{5} - \frac{3}{2} \pi \right) \end{aligned}$$

25 - Sea $f(x, y)$ una función continua en cierto campo del plano xy . Supóngase que cada una de sus líneas de nivel $f(x, y) = \alpha$ sea cerrada y encierre un dominio E_α cuya área $S(\alpha)$ sea una función continua conocida de α . Llamando

$E_{\beta, \gamma}$ al dominio limitado por dos líneas de nivel $f(x, y) = \beta$, $f(x, y) = \gamma$, demostrar que se tiene

$$\iint_{E_{\beta, \gamma}} f(x, y) \, dx \, dy = \left[\alpha S(\alpha) \right]_{\beta}^{\gamma} - \int_{\beta}^{\gamma} S(\alpha) \, d\alpha, \quad (1)$$

o también, con la hipótesis que $S(\alpha)$ admita derivada continua:

$$\iint_{E_{\beta, \gamma}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\beta}^{\gamma} \alpha S'(\alpha) \, d\alpha. \quad (2)$$

Basta demostrar la (1) ya que la (2) se deduce de la anterior mediante una integración por partes. Recordemos (ver ej. 6) que, dividido el intervalo $[\beta, \gamma]$ en intervalos parciales, de longitud máxima δ , mediante los puntos $c_0 = \beta$, c_1 , c_2 , ..., c_{n-1} , $c_n = \gamma$, se tiene

$$\int_{E_{\beta, \gamma}} f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n c_i [S(c_i) - S(c_{i-1})]. \quad (3)$$

Esta última suma, con una oportuna asociación de términos, puede también escribirse

$$\begin{aligned} & -c_0 S(c_0) - (c_1 - c_0)S(c_0) - (c_2 - c_1)S(c_1) - \dots - (c_n - c_{n-1})S(c_{n-1}) + c_n S(c_n) = \\ & = \gamma S(\gamma) - \beta S(\beta) - \sum_{i=1}^n (c_i - c_{i-1}) S(c_{i-1}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esto, de la (3) sigue inmediatamente la (1), que es lo que queríamos demostrar.

Realicemos ahora una aplicación de la (1) proponiéndonos el cálculo de la integral doble

$$\iint_E \left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right] \, dx \, dy, \quad (4)$$

donde E es el dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{b^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La función que se integra. $f(x, y) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ representa obviamente la suma de las distancias del punto genérico (x, y) de E a los dos focos de la elipse considerada. Por otra parte, el dominio E puede considerarse como limitado por dos líneas de nivel $f(x, y) = \alpha$; con más precisión: por el segmento focal de dicha elipse que corresponde a $\alpha = 2c$ y por la propia elipse, que corresponde a $\alpha = 2\sqrt{b^2+c^2}$. Observemos después que la línea de nivel genérica, $f(x, y) = \alpha$, es una elipse (homofocal a la dada) que tiene el semieje mayor igual a $\frac{\alpha}{2}$ y el semieje menor igual a $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - c^2}$, encerrando entonces un dominio de área $S(\alpha) = \frac{1}{4}\pi\alpha\sqrt{\alpha^2 - 4c^2}$.

Según la (1) se llegará entonces a que la integral (4) vale

$$\left[\frac{1}{4}\pi\alpha^2\sqrt{\alpha^2 - 4c^2} \right]_{2c}^{2\sqrt{b^2+c^2}} - \frac{1}{4}\pi \int_{2c}^{2\sqrt{b^2+c^2}} \alpha\sqrt{\alpha^2 - 4c^2} d\alpha =$$

$$= \dots = \frac{2}{3}\pi b(2b^2 + 3c^2).$$

26 - Calcular la integral doble $\iint_T (x^2 - y^2) dx dy$, donde T es el cuadrante de círculo definido por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Conviene usar las coordenadas polares ρ , φ ; conocidas propiedades, permiten transformar la integral en estudio en la siguiente:

$$\iint_U (\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi = \iint_U \rho^5 \cos^2 2\varphi d\rho d\varphi,$$

donde U designa el rectángulo $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ del plano (ρ, φ) .

φ) .

Se obtiene después

$$\begin{aligned} \iint_U \rho^5 \cos^2 2\varphi \, d\rho \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^5 \, d\rho = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{24} . \end{aligned}$$

27 - Calcular la integral doble $\iint_T \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \, dx \, dy$ siendo T el cuadrante de corona circular definido por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

Tras pasar a coordenadas polares ρ , φ se encuentra para la integral considerada:

$$\begin{aligned} \iint_U \frac{\rho \sin \varphi \cdot e^{\rho}}{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_r^R e^{\rho} \, d\rho = \\ &= e^R - e^r , \end{aligned}$$

donde se ha indicado como U al rectángulo $r \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ del plano (ρ, φ) .

28 - Calcular el volumen V del sólido limitado por el paraboloide hiperbólico $rz = xy$, los planos $z = 0$, $x = 0$, $y = r$ y el cilindro $x^2 + y^2 - 2ry = 0$.

El sólido referido está representado en la fig. 28 a (donde se han representado algunas generatrices del paraboloide hiperbólico); se trata de un cilindroide relativo a la función $z = \frac{xy}{r}$ y base el cuadrante de círculo T de la fig 28 b).

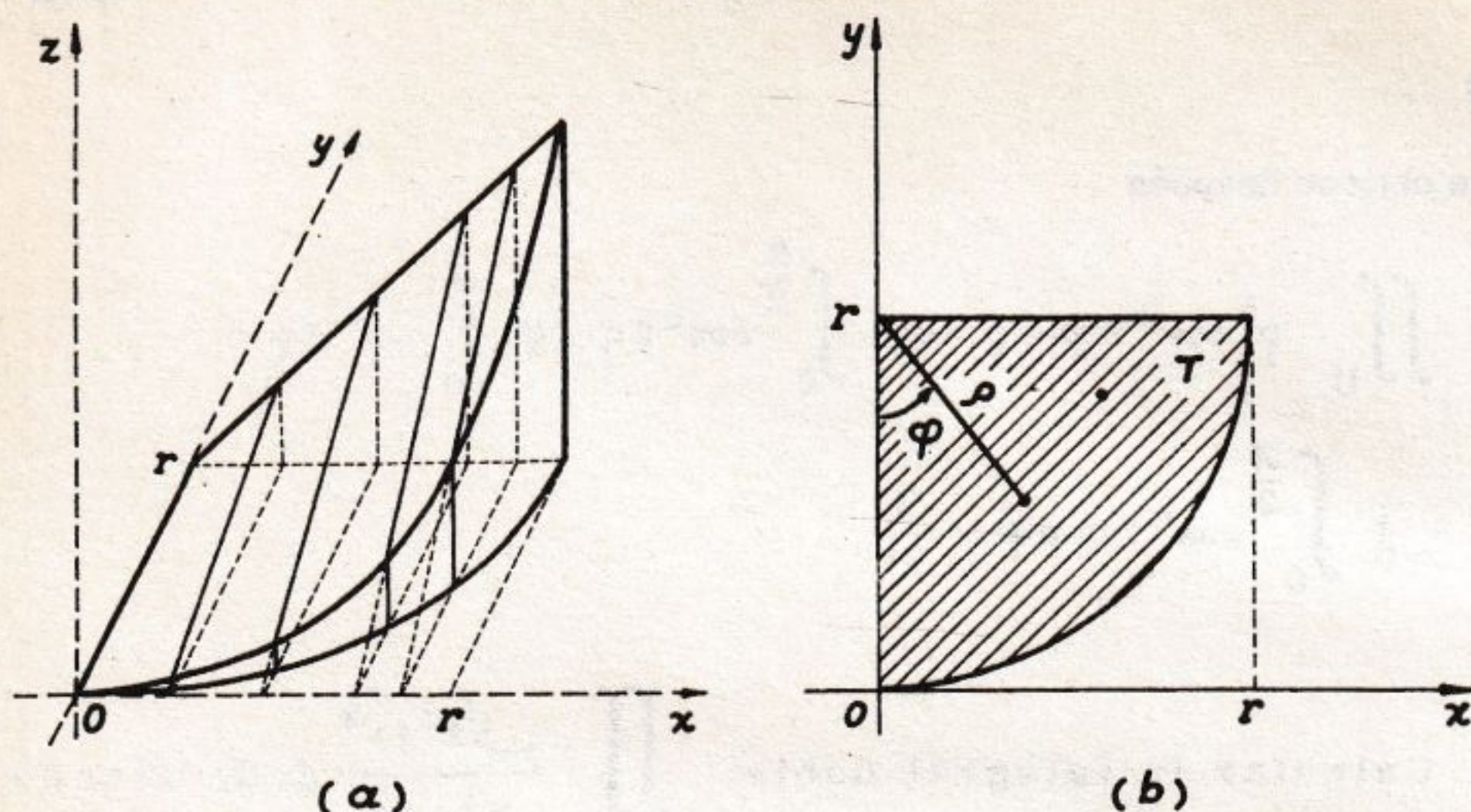


Fig. 28

Se tiene entonces $V = \iint_T \frac{xy}{r} dx dy$; introduciendo las coordenadas polares ρ, φ de la fig. 28 b ($x = \rho \sin \varphi$, $y = r - \rho \cos \varphi$):

$$V = \iint_U \frac{\rho \sin \varphi \cdot (r - \rho \cos \varphi)}{r} \rho d\rho d\varphi \left[\text{con } U(0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \right]$$

de lo que sigue

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{r} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^r \rho^2 (r - \rho \cos \varphi) d\rho = \\ &= r^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{5}{24} r^3 . \end{aligned}$$

El resultado puede fácilmente reencontrarse considerando las secciones del sólido con los planos $x = \text{cte.}$; tales secciones resultan trapecios cuyas áreas son iguales a

$$\frac{1}{2} \left[x + \frac{x(r - \sqrt{r^2 - x^2})}{r} \right] \sqrt{r^2 - x^2},$$

etc., etc.

29 - Determinar el baricentro de un sector circular, bajo la hipótesis que la densidad superficial sea función de la distancia al centro.

En las condiciones de la fig. 29, de —
signando $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ a la densidad,
las coordenadas (ξ, η) del baricentro
estarán dadas por las fórmulas

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\iint_S x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy}{\iint_S f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy} = \dots = \\ &= \frac{\int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi \int_0^r \varphi^2 f(\varphi) d\varphi}{\int_0^\alpha d\varphi \int_0^r \varphi f(\varphi) d\varphi}, \end{aligned}$$

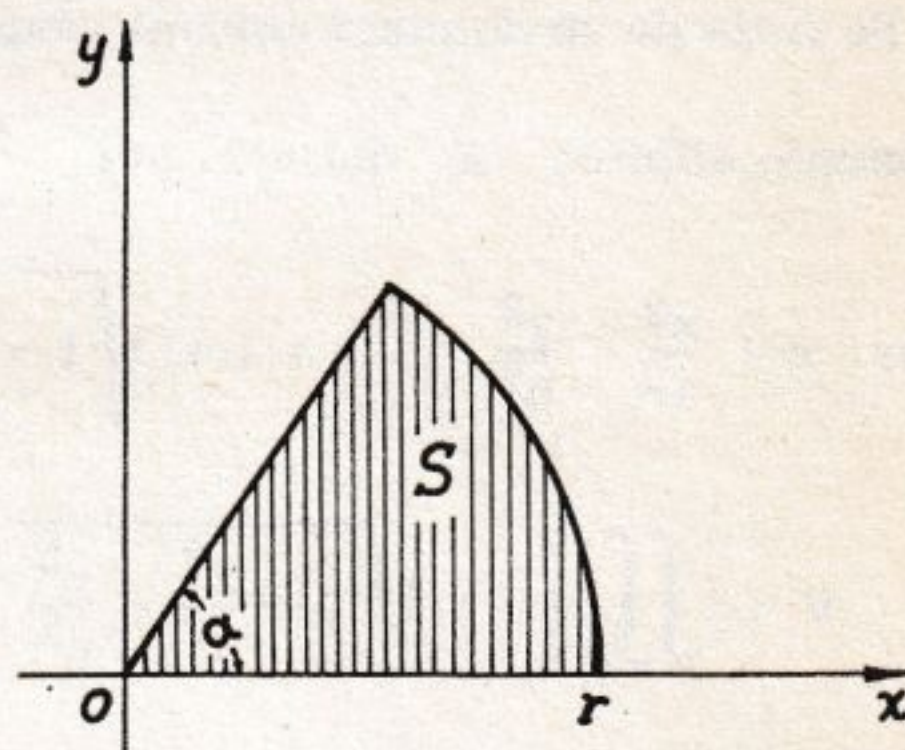


Fig. 29

$$\eta = \frac{\iint_S y f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy}{\iint_S f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy} = \dots = \frac{\int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^r \varphi^2 f(\varphi) d\varphi}{\int_0^\alpha d\varphi \int_0^r \varphi f(\varphi) d\varphi}$$

o sea

$$\xi = k \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \eta = k \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} \quad \text{con} \quad k = \frac{\int_0^r \varphi^2 f(\varphi) d\varphi}{\int_0^r \varphi f(\varphi) d\varphi}.$$

Se deduce fácilmente que las coordenadas polares del baricentro están dadas por

$$\varphi = k \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}, \quad \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Examine el lector los tres casos particulares $f(\varphi) = \mu$, $f(\varphi) = \mu \frac{\varphi}{r}$, $f(\varphi) = \mu (1 - \frac{\varphi}{r})$ (con μ constante) en los que llegará a $k = \frac{2}{3} r$, $k = \frac{3}{4} r$, $k = \frac{1}{2} r$, respectivamente.

30 - Calcular el volumen V del sólido limitado por el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ y el semielipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$.

Se trata de un dominio normal respecto del plano xy , que tiene por base el dominio elíptico E definido por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ y relativo a las dos funcio-

nes $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z = 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$; resultará así

$$V = \iint_E \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right] dx dy$$

En el cambio de variables $x = a \xi$, $y = b \eta$ (jacobiano = ab) se obtiene

$$V = \iint_C \left[1 + \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} - \xi^2 - \eta^2 \right] ab d\xi d\eta$$

donde C representa al círculo $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ del plano $\xi \eta$.

Pasando a las coordenadas polares habituales se tendrá

$$V = ab \iint_R \left[1 + \sqrt{1 - \varphi^2} - \varphi^2 \right] \varphi d\varphi d\varphi$$

donde R es el rectángulo $0 \leq \varphi \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ del plano $\varphi \varphi$

De la última fórmula sigue fácilmente

$$V = \frac{7}{6} \pi ab.$$

31 - Calcular el volumen V del sólido limitado por el paraboloide circular $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$.

El cilindro en consideración tiene como sección (con el plano xy) una cardioide cuya ecuación, en las coordenadas polares habituales ρ, φ se escribe $\rho = 1 + \cos \varphi$.

El sólido a que se refiere el enunciado es un cilindroide que tiene por base el dominio T encerrado por la cardioide, relativo a la función $z = x^2 + y^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_T (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi = \dots = \frac{35}{16} \pi. \end{aligned}$$

32 - Dado un disco circular de material homogéneo, calcúlese el potencial que el mismo genera en los puntos Q de la recta perpendicular al plano del disco que pasa por el centro de éste.

En las condiciones de la fig. 30, la distancia del punto potenciado $Q(0, 0, z)$ al punto genérico $P(x, y, 0)$ del disco C está dada por $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y entonces, llamando μ a la densidad superficial (constante), el potencial buscado $V(Q) = V(z)$ queda expresado por

$$V(z) = \iint_C \frac{\mu dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

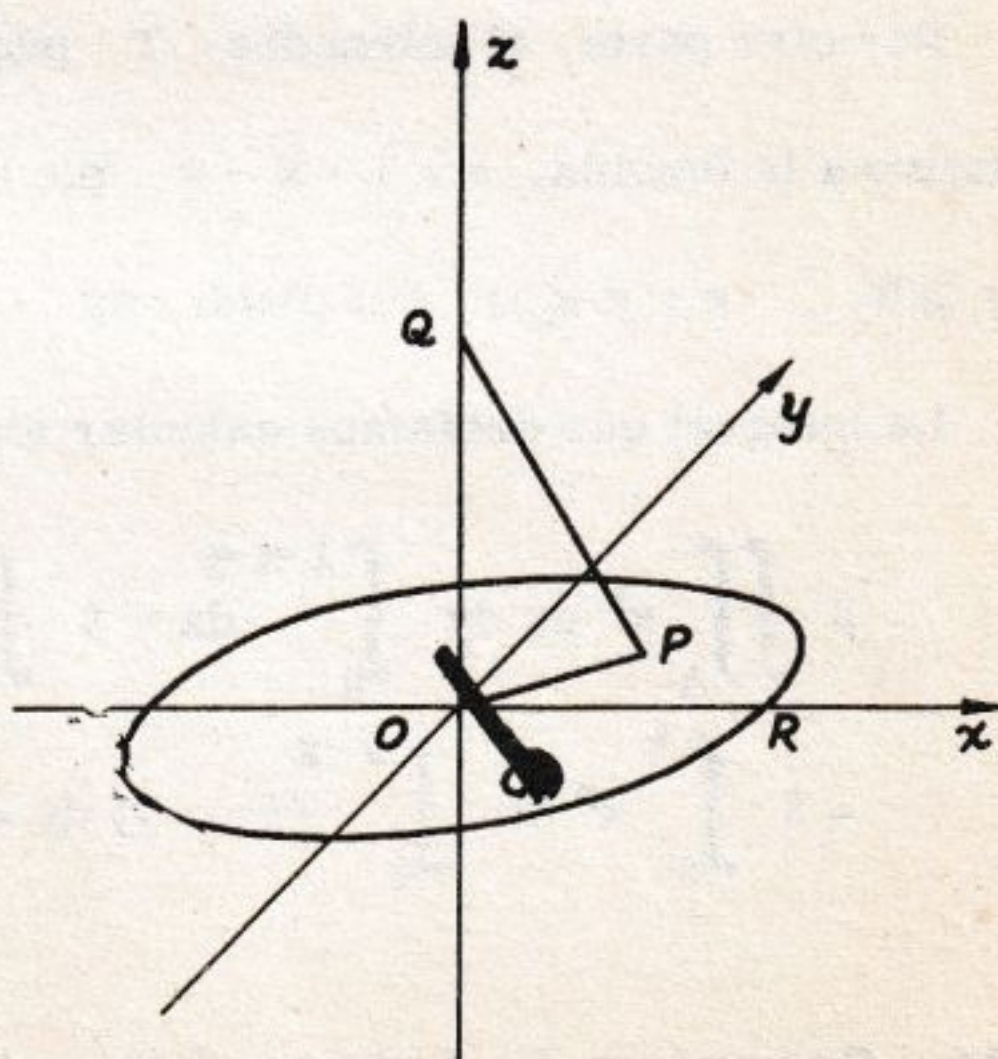


Fig. 30

$$= \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}} = 2\pi\mu \left[\sqrt{\varrho^2 + z^2} \right]_{\varrho=0}^{\varrho=R} =$$

$$= 2\pi\mu (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|) .$$

Obsérvese que la derivada $\frac{dV}{dz}$ resulta discontinua en el punto $z = 0$, con salto igual a $-4\pi\mu$.

33 - CALCULO DE INTEGRALES TRIPLES (ver "Lecciones", Cap. XXII, n^o 3, 6, 8, 9, 10).

Calcular la integral triple $\iiint_T (x^n + y^n + z^n) dx dy dz$, siendo T el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$, y n un entero positivo.

Puesto que el dominio T no varía si se efectúa una permutación cualquiera de las coordenadas x, y, z , puede ya escribirse

$$\iiint_T (x^n + y^n + z^n) dx dy dz = 3 \iiint_T x^n dx dy dz$$

Por otra parte, el tetraedro T puede considerarse como un cilindroide relativo a la función $z = 1 - x - y$ que tenga por base el triángulo A ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$) del plano xy .

La integral que debíamos calcular toma entonces la forma

$$\begin{aligned} 3 \iint_A x^n dx dy \int_0^{1-x-y} dz &= 3 \iint_A x^n (1-x-y) dx dy = \\ &= 3 \int_0^1 x^n dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{3}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^2 dx = \frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)} . \end{aligned}$$

34 - Calcular la integral triple $\iiint_T e^{x+y+z} dx dy dz$ donde T

representa la pirámide cuadrangular limitada por los planos $x = 0$, $y = a$, $z = 0$, $x = y$, $z = x + y$. (fig. 31)

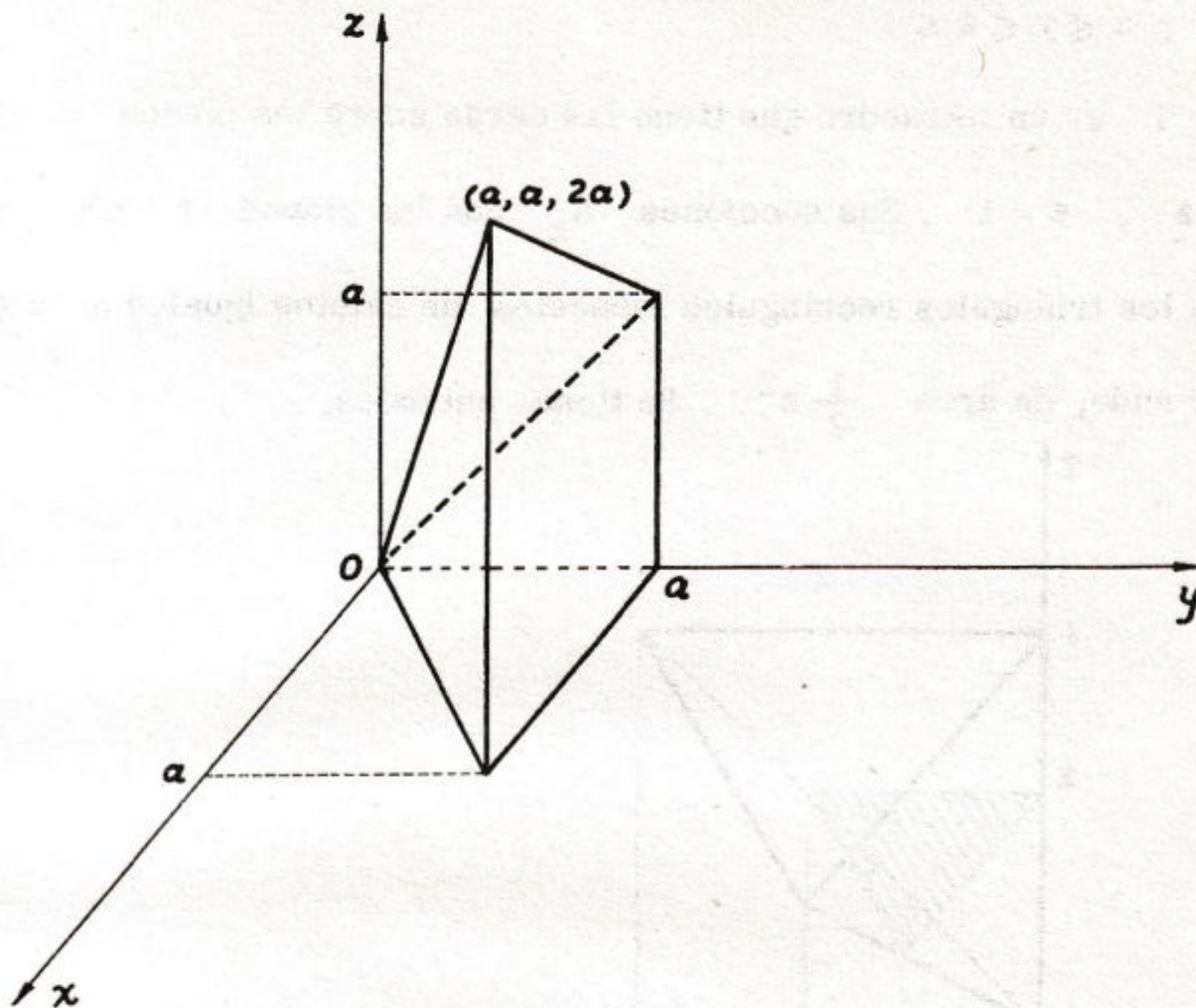


Fig. 31

La pirámide T puede considerarse como un cilindroide relativo a la función $z = x + y$ que tenga por base el triángulo A ($0 \leq y \leq a$, $0 \leq x \leq y$) del plano xy . Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned}
 \iiint_T e^{x+y+z} dx dy dz &= \iint_A e^{x+y} dx dy \int_0^{x+y} e^z dz = \\
 &= \iint_A e^{x+y} (e^{x+y} - 1) dx dy = \int_0^a dy \int_0^y (e^{2x+2y} - e^{x+y}) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a (e^{4y} - 3e^{2y} + 2e^y) dy = \frac{1}{8} [(e^{4a} - 1) - 6(e^{2a} - 1) + 8(e^a - 1)] = \\
 &= \frac{1}{8} (e^a - 1)^3 (e^a + 3) .
 \end{aligned}$$

35 - Transformar en una integral simple la integral triple

$\iiint_T f(z) \, dx \, dy \, dz$. donde T es el dominio del espacio definido por $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$.

El dominio T es un tetraedro que tiene las caras sobre los planos $x = 0$, $x = y$, $y = z$, $z = 1$. Sus secciones A_z con los planos $z = \text{cte.}$ ($0 \leq z \leq 1$) son los triángulos rectángulos isósceles de catetos iguales a z (ver fig. 32) y, por ende, de área $\frac{1}{2} z^2$. Se tiene, entonces,

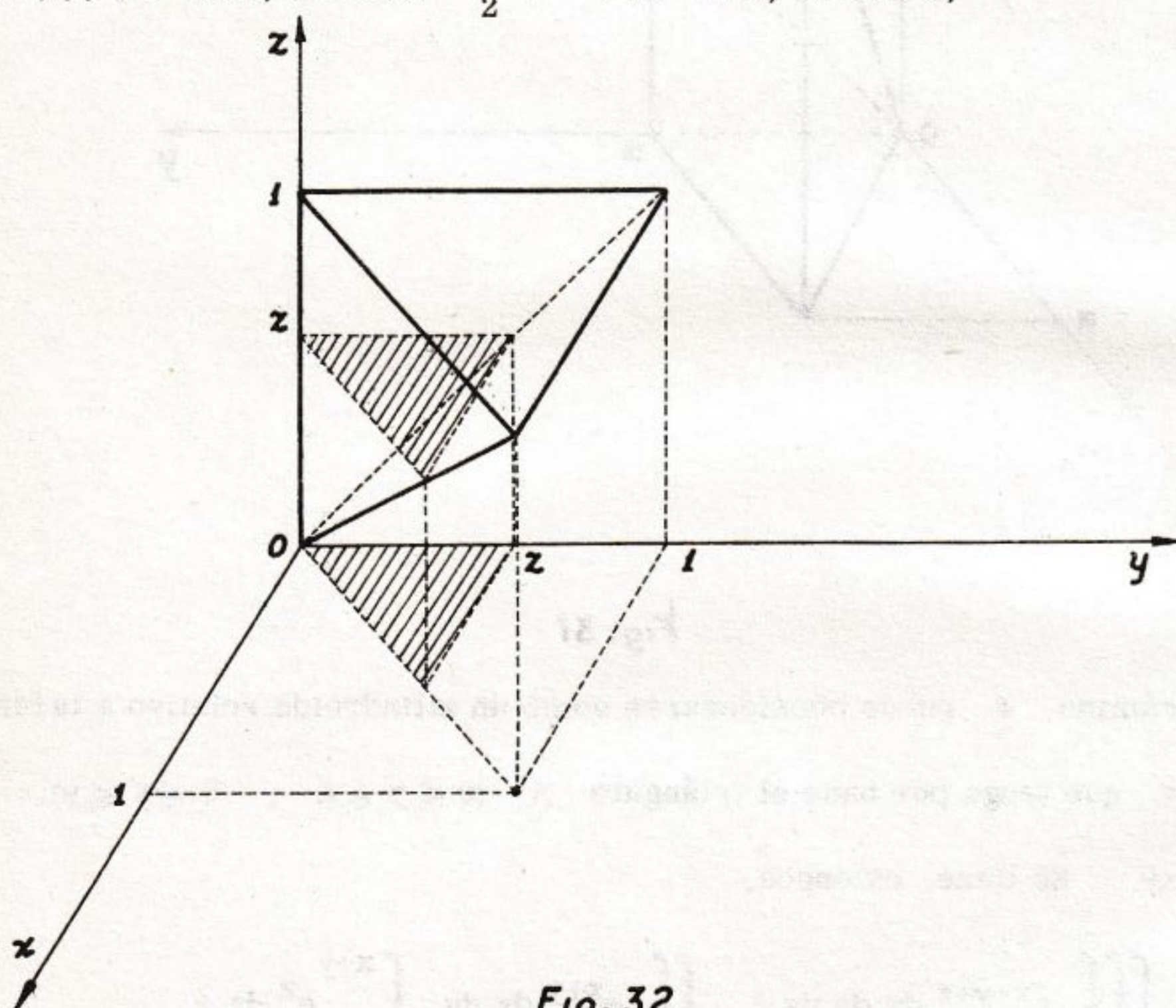


Fig. 32

$$\iiint_T f(z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 f(z) \, dz \iint_A dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 f(z) \, dz .$$

36 - Calcular los momentos de inercia del sólido T (supuesto homogéneo con densidad 1) limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + z^2 = r^2$.

Comencemos a calcular el momento de inercia I_1 respecto del plano yz .

Se encuentra

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iiint_T x^2 dx dy dz = \iint_C x^2 dx dy \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dz = \\
 &= 2 \iint_C x^2 \sqrt{r^2-x^2} dx dy = 2 \int_{-r}^r x^2 \sqrt{r^2-x^2} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \\
 &= 4 \int_{-r}^r x^2 (r^2-x^2) dx = \frac{16}{15} r^5
 \end{aligned}$$

Los momentos de inercia I_2 , I_3 respecto de los planos zx , xy resultan iguales entre sí, ya que, intercambiando y con z , el dominio T no se altera. Tal valor común viene dado por

$$\begin{aligned}
 I_2 = I_3 &= \iiint_T y^2 dx dy dz = \iint_C y^2 dx dy \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dz = \\
 &= 2 \iint_C y^2 \sqrt{r^2-x^2} dx dy = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2 dy = \\
 &= \frac{4}{3} \int_{-r}^r (r^2-x^2)^2 dx = \frac{64}{45} r^5
 \end{aligned}$$

37 - Calcular la integral triple $\iiint_T (x+y+z)^n xyz dx dy dz$, donde T es el tetraedro limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ y n es un entero positivo.

Conviene efectuar el siguiente cambio de variables

$$x = u(1-v)$$

$$y = uv(1-w)$$

$$z = uvw$$

que tiene por jacobiano a

$$J = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

que transforma al tetraedro T en el paralelepípedo $P(0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1)$ como es fácil verificar. La integral considerada resulta así igual a

$$\begin{aligned} \iiint_P [u(1-v)+uv(1-w)+uvw]^n \cdot u(1-v) \cdot uv(1-w) \cdot uvw \cdot u^2 v \, du \, dv \, dw = \\ = \int_0^1 w(1-w) \, dw \int_0^1 v^3(1-v) \, dv \int_0^1 u^{n+5} \, du = \frac{1}{120(n+6)}. \end{aligned}$$

38 - Sea C un cono que tiene por base un dominio plano, acotado, medible T y altura h . Admitiendo que esté constituido por un material homogéneo, demostrar que la cota de su baricentro, respecto del plano de la base, vale $\frac{h}{4}$.

Tomando como plano base al plano xy y orientando al eje z hacia el vértice del cono, la cota ζ del baricentro queda expresada por

$$\zeta = \frac{\iiint_C z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_C dx \, dy \, dz} = \frac{\int_0^h z \, dz \int \int_{T_z} dx \, dy}{\int_0^h dz \int \int_{T_z} dx \, dy},$$

donde T_z indica la sección del cono con el plano de cota z .

La integral doble $\int \int_{T_z} dx \, dy$ representa el área de T_z . Una propiedad conocida nos dice que las áreas de T_z y T guardan la misma relación

que los cuadrados de las distancias de sus planos al vértice, es decir,

$$\frac{\text{área } T_z}{\text{área } T} = \frac{(h-z)^2}{h^2}, \text{ de donde, } \text{área } T_z = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \text{ área } T$$

Sigue

$$\zeta = \frac{\int_0^h z \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz}{\int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz} = \frac{\frac{h^2}{12}}{\frac{h}{3}} = \frac{h}{4}$$

39 - Determinar el baricentro de un semielipsoide que se supone constituido por un material homogéneo.

El semielipsoide considerado S puede definirse por las $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, $z \geq 0$. Su baricentro G se encuentra sobre el eje z y para su cota ζ se llega a

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\iiint_S z \, dx \, dy \, dz}{\frac{2}{3} \pi abc} = \frac{\int_0^c z \, dz \iint_{T_z} dx \, dy}{\frac{2}{3} \pi abc} = \frac{\pi ab \int_0^c z \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz}{\frac{2}{3} \pi abc} = \\ &= \dots = \frac{3}{8} c, \end{aligned}$$

donde con T_z se ha indicado la sección de S con el plano de cota z , que

es una elipse de semiejes $a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$.

40 - Considérese el sólido T de la fig. 33 constituido por una semiesfera S de radio r sobre la que se apoya un cono C , con r como radio de la base y h por altura. Determinar h de modo que el baricentro de T , supuesto homogéneo, coincida con el centro

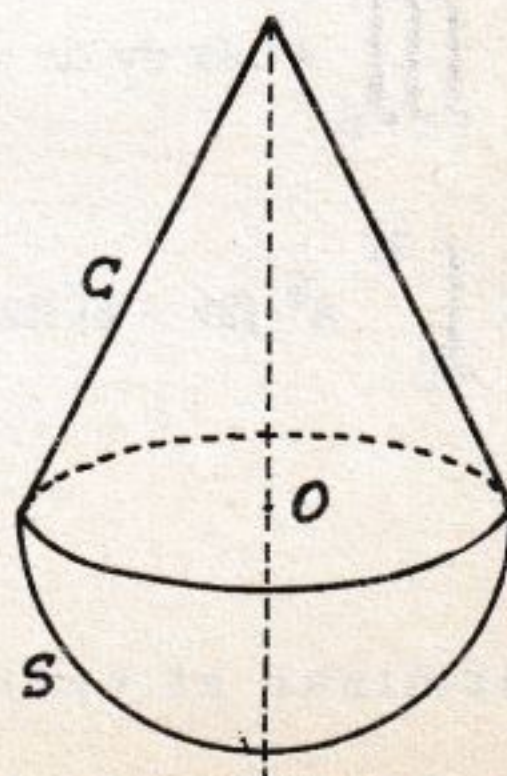


Fig. 33

O de la semiesfera .

Con respecto al plano de la base del cono el baricentro de C tiene cota $\frac{h}{4}$ (ver ej. 38) y el baricentro de S tiene cota $-\frac{3}{8}r$ (ver ej. 39). Recordando que el producto del volumen de un dominio por la cota de su baricentro es una función aditiva de dicho dominio, la condición impuesta en el problema se traduce en la relación

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h \cdot \frac{h}{4} + \frac{2}{3} \pi r^3 \left(-\frac{3}{8}r\right) = 0$$

de donde $h = \sqrt{3} r$.

41 - Calcular el momento de inercia de una esfera (homogénea, con densidad 1) respecto de uno de sus planos tangentes .

Sea $x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0$ la superficie esférica (de radio r) que limita la esfera S considerada. Estudiemos el momento de inercia I con respecto al plano xy (que es tangente a la esfera en el origen). Se tiene, indicando con T_z la sección de la esfera con el plano de cota z ($0 \leq z \leq 2r$) que es un círculo de radio $\sqrt{z(2r - z)}$:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_S z^2 dx dy dz = \int_0^{2r} z^2 dz \iint_{T_z} dx dy = \\ &= \pi \int_0^{2r} z^3 (2r - z) dz = \frac{8}{5} \pi r^5 \end{aligned}$$

42 - Determinar el baricentro del sólido S , supuesto homogéneo, limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} -$

$-\frac{z^2}{c^2} = 1$ y los dos planos $z = 0$, $z = h$.

Las secciones de S con los planos $z = \text{cte.}$ son elipses de área $\pi ab (1 + \frac{z^2}{c^2})$; de ahí que el volumen V de S venga dado por

$$V = \pi ab \int_0^h (1 + \frac{z^2}{c^2}) dz = \pi ab h (1 + \frac{h^2}{3c^2})$$

y la cota ζ del baricentro (que está sobre el eje z) sea

$$\zeta = \frac{1}{V} \iiint_S z dx dy dz = \dots = \frac{3}{4} h \frac{2c^2 + h^2}{3c^2 + h^2}$$

43 - Determinar el baricentro de un octante esférico homogéneo.

Sea T ($x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) el octante considerado. Las tres coordenadas ξ , η , ζ de su baricentro son, evidentemente, iguales entre sí y se tiene, por ejemplo,

$$\zeta = \frac{\iiint_T z dx dy dz}{\frac{1}{6} \pi R^3}$$

Conviene transformar la integral triple precedente mediante el uso de coordenadas polares ρ , θ , φ .

Se tiene $\iiint_T z dx dy dz = \iiint_U \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$ donde

U indica el paralelepípedo ($0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) del espacio $\rho \theta \varphi$ y, por ende,

$$\zeta = \frac{\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho}{\frac{1}{6} \pi R^3} = \frac{\frac{1}{16} \pi R^4}{\frac{1}{6} \pi R^3} = \frac{3}{8} R .$$

44 - Determinar el baricentro de un sector esférico homogéneo.

En las condiciones de la fig. 34, el baricentro se encuentra sobre el eje z y, haciendo uso de las coordenadas polares ρ, θ, φ su cota ζ queda expresada por

$$\zeta = \frac{\iiint_S \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\iiint_S \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}$$

donde S indica el paralelepípedo $0 \leq$

$$\leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

del espacio ρ, θ, φ . Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho} = \frac{\frac{1}{4} \pi R^4 \sin^2 \alpha}{\frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos \alpha)} = \\ &= \frac{3}{8} R (1 + \cos \alpha) = \frac{3}{8} (R + h) \end{aligned}$$

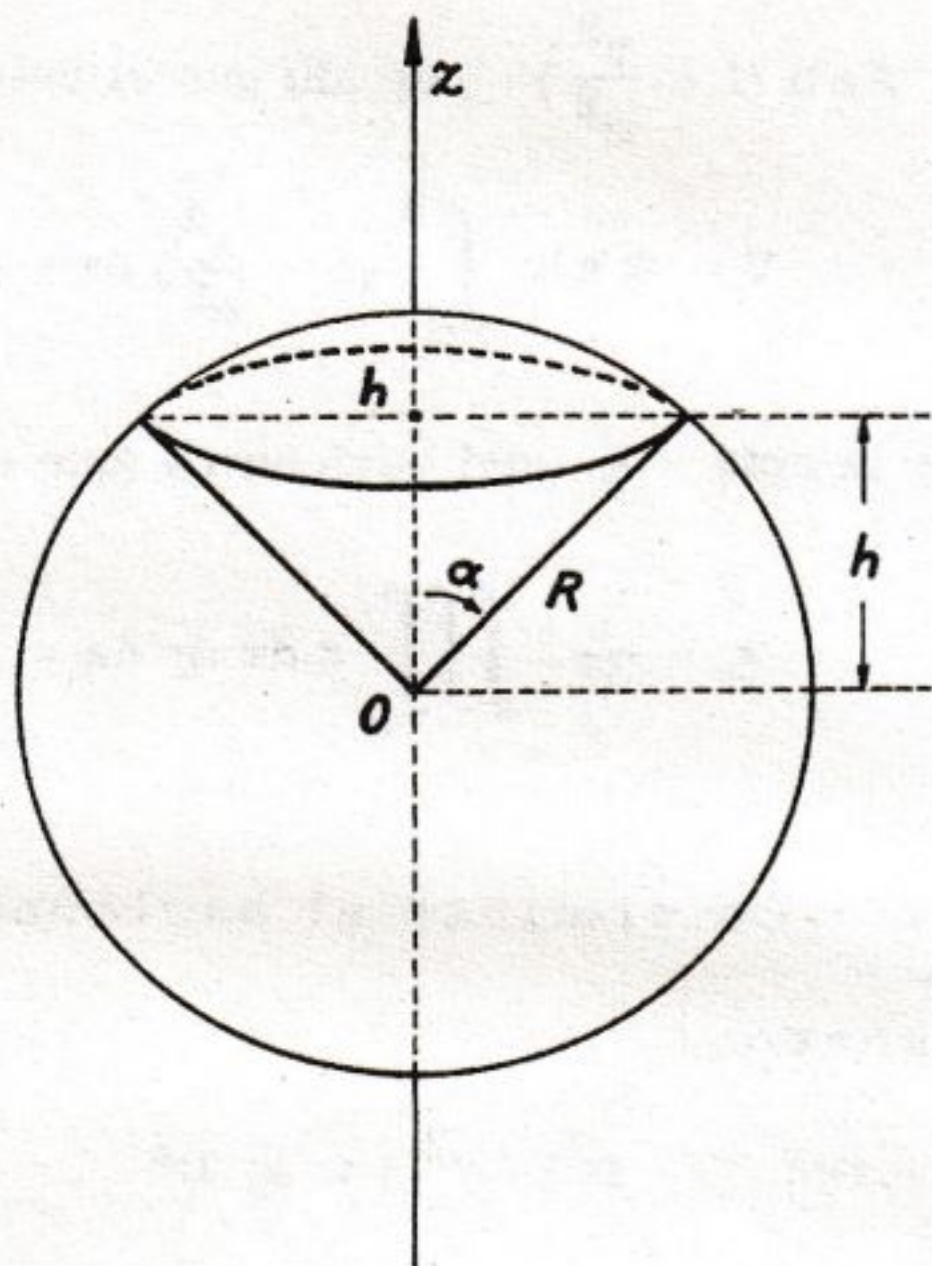


Fig. 34

45 - Calcular el momento de inercia respecto del eje z del sólido S (homogéneo con densidad 1) limitado por el plano xy , la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$; (con $r < R$; ver fig. 35).

Tal momento de inercia I está dado por la fórmula

$$I = \iiint_S (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Para hacer el cálculo conviene usar las coordenadas cilíndricas ρ, φ, z observando que nuestro sólido S queda definido por $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}$; se encuentra así

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} dz = \\ &= 2\pi \int_0^r \rho^3 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \end{aligned}$$

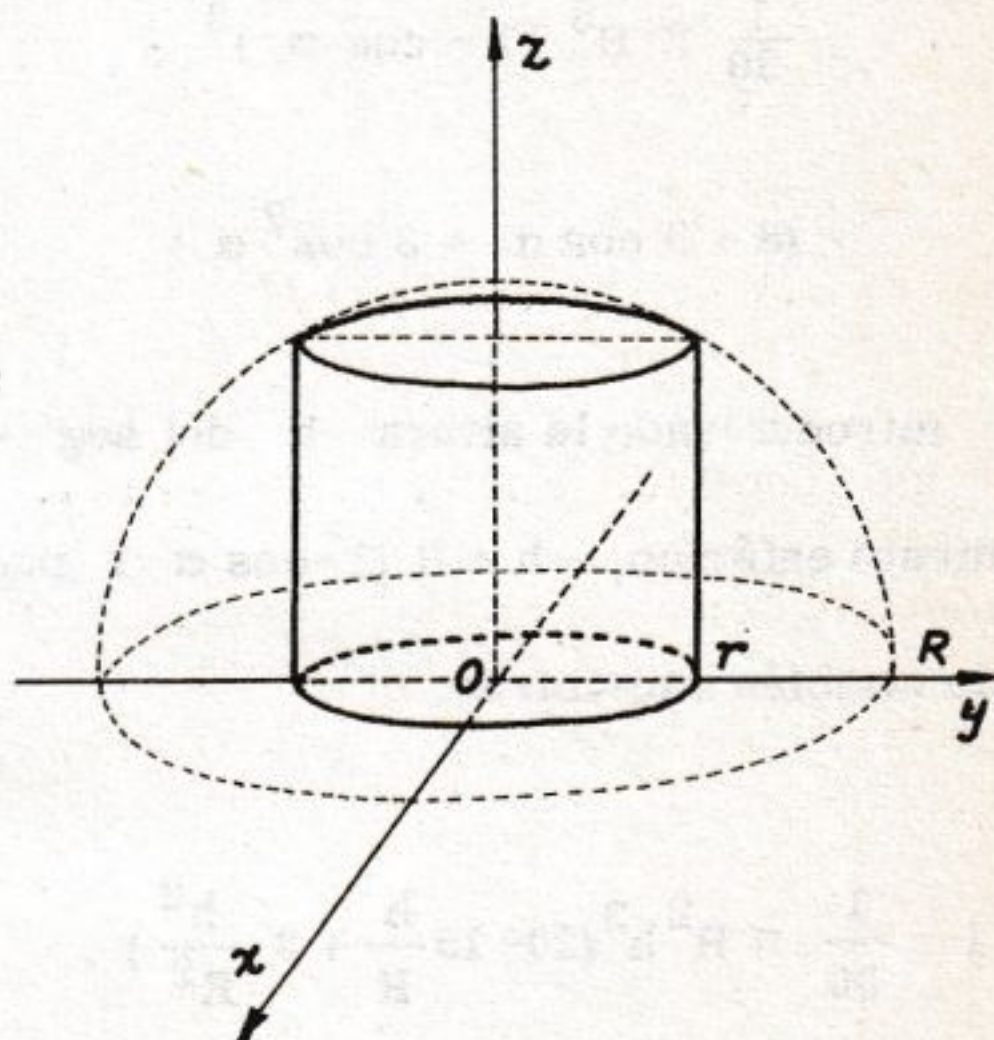


Fig. 35

Realizando en esta última integral la sustitución $R^2 - \rho^2 = t^2$ se llega finalmente a

$$I = 2\pi \int_{\sqrt{R^2 - r^2}}^R \frac{t^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} (R^2 - t^2) dt = \frac{2\pi}{15} R^5 \left[2 - \left(2 + 3 \frac{r^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2} \right]$$

46 - Calcular el momento de inercia de un segmento esférico con una base (homogéneo, de densidad 1) con respecto a su eje.

En las condiciones de la figura 36 y con el uso de las coordenadas polares ρ, θ, φ , se encuentra fácilmente

$$I = \iiint_S (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sin^3 \theta d\theta \int_R^{\frac{R \cos \alpha}{\cos \theta}} \rho^4 d\rho =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\pi}{5} R^5 \int_0^\alpha \sin^3 \theta \left(1 - \frac{\cos^5 \alpha}{\cos^5 \theta}\right) d\theta = \\
 &= \frac{1}{30} \pi R^5 (1 - \cos \alpha)^3 \cdot \\
 &\quad \cdot (8 + 9 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha)
 \end{aligned}$$

Introduciendo la altura h del segmento esférico, $h = R(1 - \cos \alpha)$, puede también escribirse

$$I = \frac{1}{30} \pi R^2 h^3 \left(20 - 15 \frac{h}{R} + 3 \frac{h^2}{R^2}\right).$$

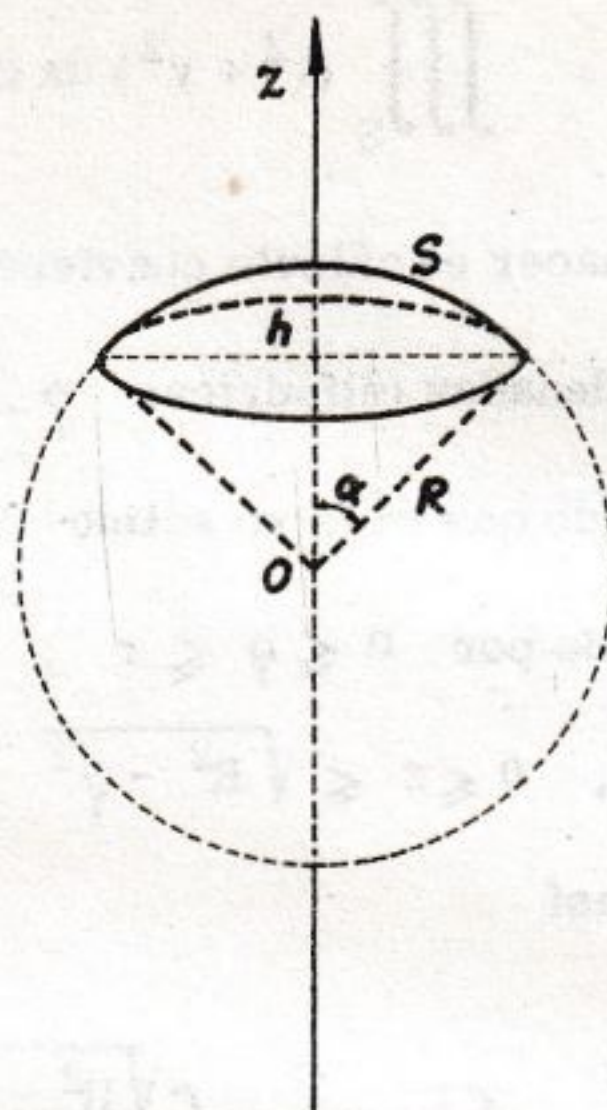


Fig. 36

47 - Calcular el momento de inercia de un cono circular recto (homogéneo, con densidad 1) con respecto a una de sus generatrices.

Dispuesto el cono como en la fig. 37, refirámonos a la generatriz g situada en el semiplano $y = 0$, $x \geq 0$, que en el plano xz tiene $\frac{x}{r} = \frac{z}{h}$ por ecuación, o también, $x \cos \alpha - z \sin \alpha = 0$. La distancia de un punto genérico (x, y, z) de C a la recta g queda expresada por

$$\sqrt{(x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 + y^2}$$

y entonces se trata de calcular la integral triple

$$I = \iiint_C \left[(x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 + y^2 \right] dx dy dz.$$

Pasemos a las coordenadas polares φ , θ , φ notando que la superficie la-

teral del cono tiene ecuación $\theta = \alpha$ mientras que el plano de la base tiene $\rho = \frac{h}{\cos \theta}$ por ecuación. Resulta así

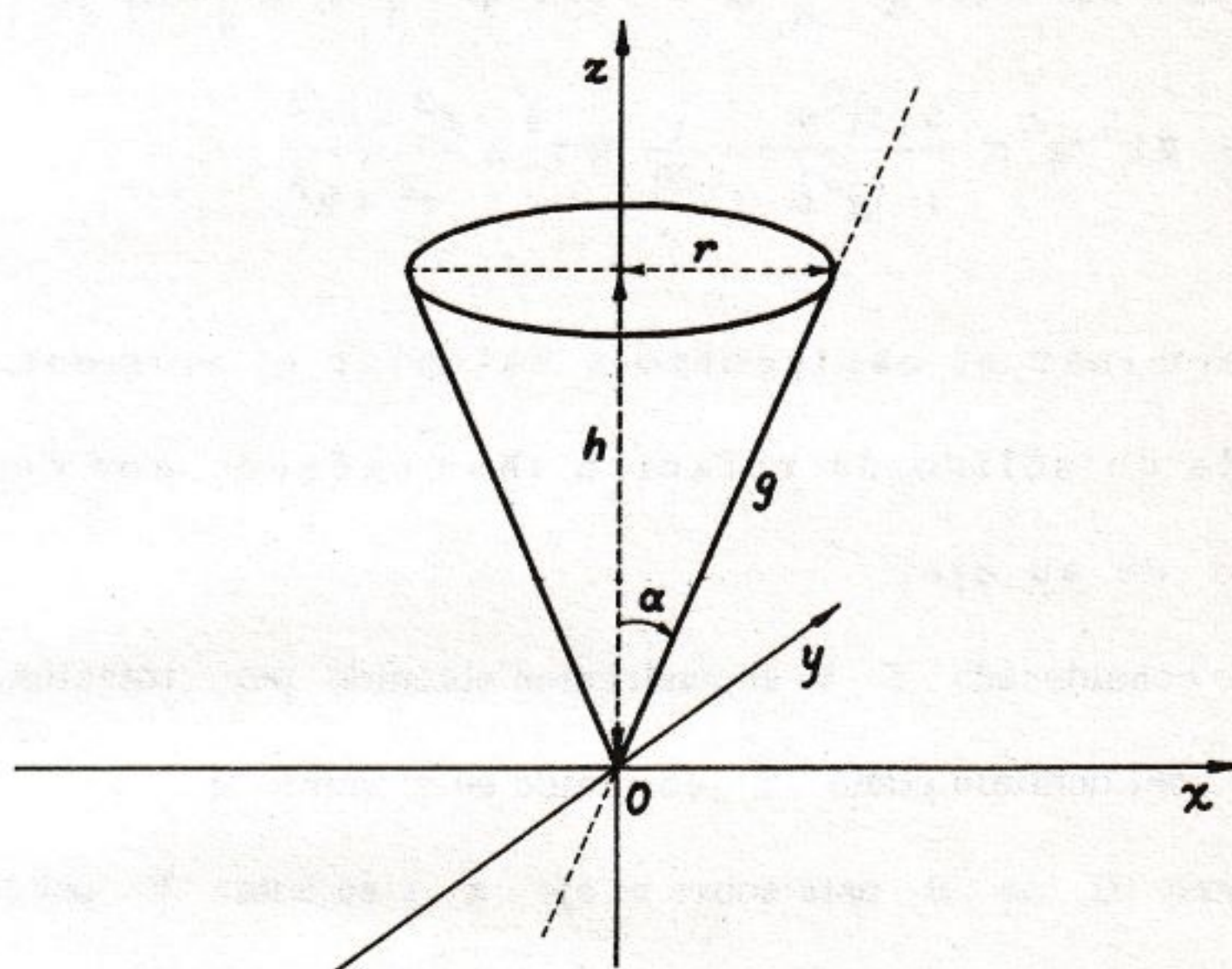


Fig. 37

$$I = \iiint_T \left[(\rho \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha - \rho \cos \theta \sin \alpha)^2 + \right. \\ \left. + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right] \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$$

donde T indica el dominio $0 \leq \rho \leq \frac{h}{\cos \theta}$; $0 \leq \theta \leq \alpha$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ del espacio $\rho \theta \varphi$; se tendrá, en consecuencia

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \left[(\sin \theta \cos \varphi \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha)^2 + \right. \\ \left. + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right] \sin \theta d\theta \int_0^{h/\cos \theta} \rho^4 d\rho = \frac{h^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi \int_0^\alpha \frac{\sin^3 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta + \right. \\ \left. + \sin^2 \alpha \int_0^\alpha \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta - 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi \int_0^\alpha \frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta} d\theta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2 \varphi \int_0^\alpha \frac{\sin^3 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta \Big] = \frac{h^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi \cdot \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha - \right. \\
& \quad \left. - 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi \cdot \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha + \sin^2 \varphi \cdot \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha \right] d\varphi = \\
& = \frac{1}{20} \pi h^5 \operatorname{tg}^4 \alpha \frac{6 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{20} \pi r^4 h \frac{r^2 + 6h^2}{r^2 + h^2} .
\end{aligned}$$

48 - Determinar el baricentro y calcular el momento de inercia de un sólido de rotación (homogéneo, con densidad 1) respecto de su eje.

El sólido considerado S lo supondremos obtenido por rotación alrededor del eje z del dominio plano T contenido en el semiplano $y = 0$, $x \geq 0$. El baricentro G de S está sobre el eje z y su cota ζ puede expresarse (usando coordenadas cilíndricas ρ, φ, z):

$$\zeta = \frac{\iiint_S z \rho d\rho d\varphi dz}{\iiint_S \rho d\rho d\varphi dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{T_\varphi} \rho z d\rho dz}{\int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{T_\varphi} \rho d\rho dz} ,$$

donde T_φ indica la sección de S con el semiplano que pasa por el eje z y tiene longitud φ . Pero T_φ es independiente de φ y entonces las integrales dobles recién indicadas pueden calcularse suponiendo $\varphi = 0$ y, por ende, $T_\varphi = T$, $\rho = x$. Se llega así a

$$\zeta = \frac{\iint_T xz dx dz}{\iint_T x dx dz} . \tag{1}$$

Análogamente para el momento de inercia I de S con respecto al eje z se encuentra

$$I = \iiint_S \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{T_\varphi} \rho^3 \, d\rho \, dz$$

$$I = 2\pi \iint_T x^3 \, dx \, dz \quad (2)$$

Aplicando la (1), por ejemplo, para determinar el baricentro del sector esférico generado por la rotación de un sector circular T en las condiciones de la fig. 38 se encontrará sin dificultad:

$$\zeta = \frac{3}{8} R \left[\cos \omega + \cos(\omega + \alpha) \right] =$$

$$= \frac{3}{8} (z_1 + z_2) \quad .$$

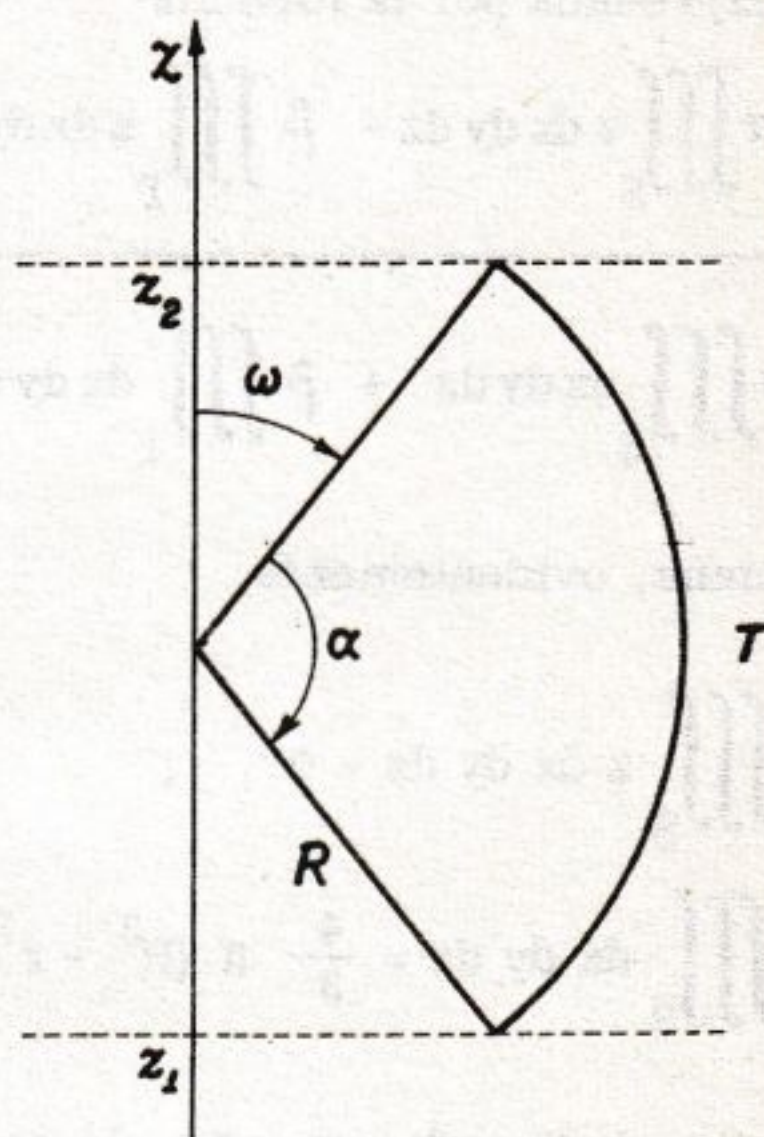


Fig. 38

Aplicando la (2) para calcular el momento de inercia del toro generado por la rotación del círculo $(x - d)^2 + z^2 \leq r^2$ (con $d \geq r$), se encuentra

$$I = \frac{1}{2} \pi^2 r^2 d (3r^2 + 4d^2) \quad .$$

49 - Considérese una esfera hueca, de radios r, R ($r < R$) constituida con material de densidad α en cuya cavidad se vierte un líquido de densidad β . Determinése la altura a la que debe llegar el líquido para que el baricentro del sistema recipiente-líquido sea el más bajo posible.

Pongamos el origen en el centro de la esfera y adoptemos el eje z vertical y orientado hacia arriba. Supongamos que el líquido llegue hasta la cota $z = h$

(con $-r \leq h \leq r$) y procedamos a calcular la cota ζ del baricentro. Con las notaciones de la fig. 39 tal cota que dará expresada por la fórmula

$$\zeta = \frac{\alpha \iiint_S z \, dx \, dy \, dz + \beta \iiint_T z \, dx \, dy \, dz}{\alpha \iiint_S dx \, dy \, dz + \beta \iiint_T dx \, dy \, dz}$$

Se tiene, evidentemente,

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = 0,$$

$$\iiint_S dx \, dy \, dz = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3),$$

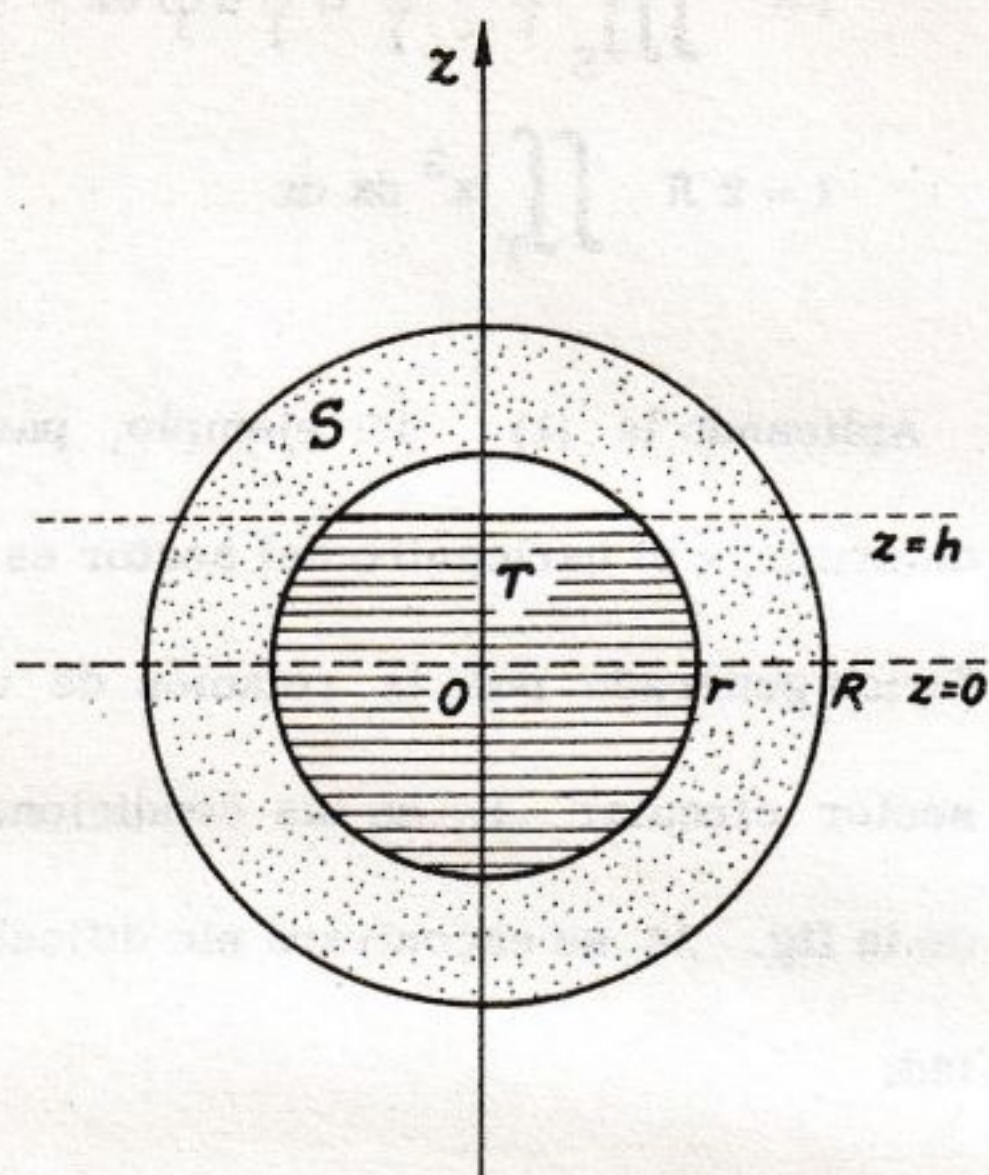


Fig. 39

mientras, indicando con A_z la sección de T con el plano de cota z :

$$\begin{aligned} \iiint_T dx \, dy \, dz &= \int_{-r}^h dz \iint_{A_z} dx \, dy, & \iiint_T z \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \int_{-r}^h z \, dz \iint_{A_z} dx \, dy, \end{aligned}$$

o también, teniendo en cuenta que A_z es un círculo de radio $\sqrt{r^2 - z^2}$, por ende, de área $\pi (r^2 - z^2)$:

$$\iiint_T dx \, dy \, dz = \pi \int_{-r}^h (r^2 - z^2) \, dz = \frac{1}{3} \pi (r + h)^2 (2r - h),$$

$$\iiint_T z \, dx \, dy \, dz = \pi \int_{-r}^h z (r^2 - z^2) \, dz = -\frac{1}{4} \pi (r^2 - h^2)^2.$$

Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{-\frac{1}{4} \pi \beta (r^2 - h^2)^2}{\frac{4}{3} \pi \alpha (R^3 - r^3) + \frac{1}{3} \pi \beta (r + h)^2 (2r - h)} = \\ &= -\frac{3}{4} \frac{(r^2 - h^2)^2}{4k (R^3 - r^3) + (r + h)^2 (2r - h)},\end{aligned}$$

donde se puso $\frac{\alpha}{\beta} = k$ y se trata de determinar el mínimo absoluto de esta función $\zeta = \zeta(h)$ en el intervalo $[-r, r]$.

Por una parte tengamos en cuenta que $\zeta(-r) = \zeta(r) = 0$; por otra parte, con fácil cálculo se llega a que la ecuación $\frac{d\zeta}{dh} = 0$ equivale a la

$$(r^2 - h^2) [16k (R^3 - r^3) h + (r + h)^3 (3r - h)] = 0,$$

de modo que, prescindiendo de las raíces $h = \pm r$, que caen en los extremos del intervalo, queda por estudiar la ecuación

$$\frac{(r + h)^3 (3r - h)}{h} = -16k (R^3 - r^3) \quad (1)$$

Es evidente que una eventual raíz situada en $[-r, r]$ debe ser negativa; basta entonces buscarla en $[-r, 0]$. En este intervalo la función

$$f(h) = \frac{(r + h)^3 (3r - h)}{h}$$

decrece de 0 a $-\infty$ y entonces asumirá ciertamente (y una sola vez) el valor negativo $-16k (R^3 - r^3)$

Entonces la $\frac{d\zeta}{dh}$ se anula una y solamente una vez en el intervalo $[-r, r]$ para cierto valor $h = h_0$, con $-r < h_0 < 0$

Se reconoce inmediatamente que para $h = h_0$ se tiene, efectivamente el mínimo absoluto de la función $\zeta(h)$, por lo que h_0 es la cota buscada.

La determinación de h_0 puede hacerse ágilmente mediante procedimiento gráfico recurriendo a la (1). Pero es mejor introducir el cociente $x = \frac{h}{r}$ y reducir la (1) a la forma

$$\frac{(1+x)^3 (3-x)}{x} = -16k \left[\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1 \right]$$

Se traza entonces en $[-1, 0]$ el gráfico de la función $y = \frac{(1+x)^3 (3-x)}{x}$ (que no depende de los datos del problema) y se lo corta con la recta $y = -16k \left[\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 1 \right]$; la abscisa del punto de encuentro proporciona el valor de $\frac{h_0}{r}$

50 - Calcular el potencial de una esfera homogénea en un punto exterior a la misma.

Llamemos S ($x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$) a la esfera dada y μ a la densidad (constante). Por evidentes razones de simetría, el potencial en un punto Q depende solamente de la distancia de Q al centro de la esfera; podemos entonces suponer Q sobre el semieje positivo de las z . Poniendo $\overline{OQ} = r$

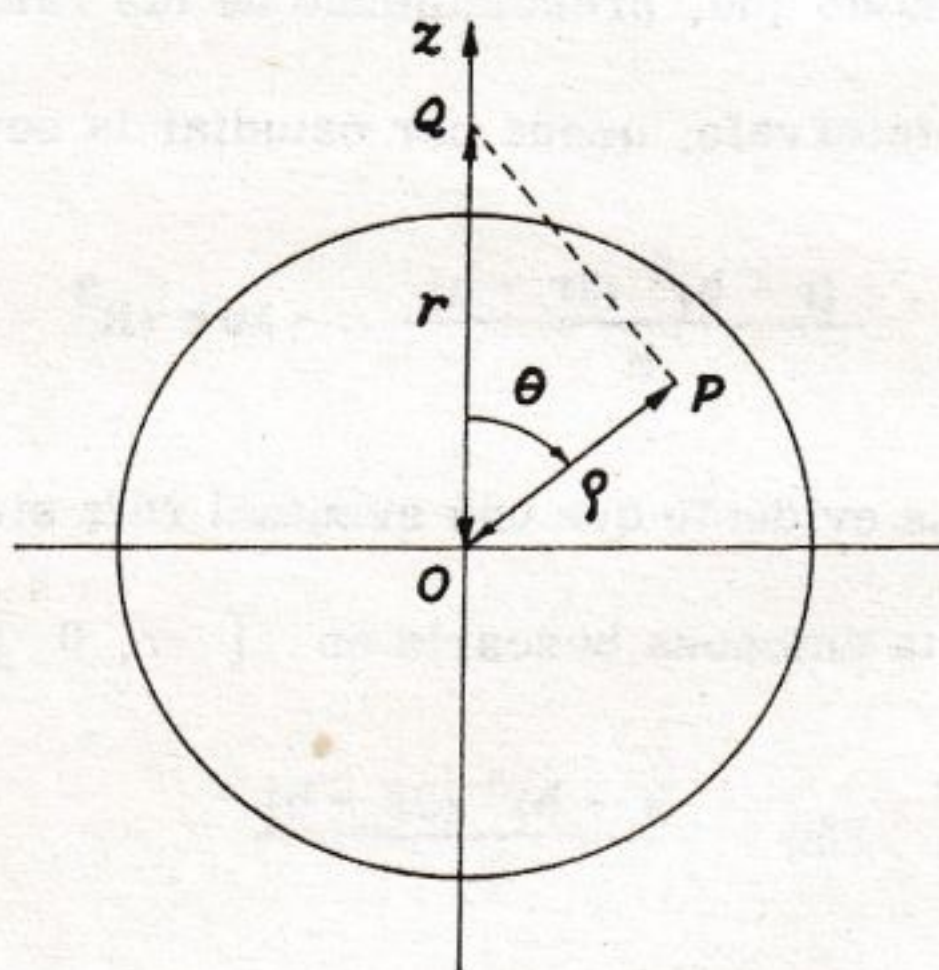


Fig. 40

(con $r > R$) refiramos los puntos P de la esfera a las coordenadas polares ρ, θ, φ de costumbre y observemos que resulta

$$\overline{PQ}^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta ;$$

entonces el potencial buscado será

$$V(r) = \mu \iiint_S \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}},$$

de donde,

$$\begin{aligned} V(r) &= \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} = \\ &= 2\pi\mu \int_0^R \rho^2 d\rho \left[\frac{1}{r\rho} \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{2\pi\mu}{r} \int_0^R \rho [(r+\rho) - (r-\rho)] d\rho = \frac{4\pi\mu}{r} \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{4\pi\mu R^3}{3r} \end{aligned}$$

Puesto que $\frac{4}{3}\pi R^3\mu$ representa la masa total M de la esfera, puede escribirse

$$V(r) = \frac{M}{r}$$

concluyéndose que la esfera actúa como si toda su masa estuviese concentrada en el centro.

51 - APLICACIONES AL CALCULO DE VOLUMENES (ver "Lecciones", Cap. XXII, n^o 10).

Considérese el dominio plano encerrado por la lemnisca - ta de Bernouilli $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ y calcúlese el volumen del sólido generado por la rotación del mismo respecto del eje x .

De la ecuación de la curva se obtiene

$$y^2 = \frac{a}{2} \sqrt{8x^2 + a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}$$

por lo que el volumen buscado es

$$2 \cdot \pi \int_0^a \left(\frac{a}{2} \sqrt{8x^2 + a^2} - x^2 - \frac{a^2}{2} \right) dx = \dots = \pi a^3 \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{6} \right]$$

52 - Considérese el lazo formado por la curva de ecuación

$$(x - 12a)^3 + 27a \left[(x - 8a)^2 + y^2 \right] = 0$$

y calcúlese el volumen del sólido generado por la rotación del mismo alrededor del eje x

La curva ya fue estudiada en el Vol I, Cap. IX, ej. 44. Se ve fácilmente que el volumen buscado está dado por

$$\pi \int_0^{9a} \frac{x^2 (9a - x)}{27a} dx = \dots = \frac{81}{4} \pi a^3$$

53 - Llamando C al lazo formado por la curva (estrofoide) de ecuación $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$ ($a > 0$) calcular el volumen del sólido S que se obtiene haciendo rotar C alrededor del eje x

La curva fue estudiada en el Cap. XX, ej. 12. Se tiene

$$\begin{aligned} \text{volumen } S &= \pi \int_0^a x^2 \frac{a-x}{a+x} dx = \pi \int_0^a \left(-x^2 + 2ax - 2a^2 + \frac{2a^3}{a+x} \right) dx = \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 2a^2x + 2a^3 \log(a+x) \right]_0^a = \pi a^3 \left(2 \log 2 - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

54 - Calcular el volumen de la cuña cónica.

Dada una circunferencia γ y, exterior a su plano, una recta t paralela al mismo que se proyecte ortogonalmente sobre el mismo según un diámetro de

γ , tracemos por cada punto M de γ el segmento MN perpendicular a t .

Los infinitos segmentos MN generan una superficie σ que, junto al plano de γ , limitan un sólido S que se denomina cuña cónica.

Dispuestas las cosas como en la fig. 41, las secciones de S con los planos $y = \text{cte.}$ son triángulos isósceles cuyas áreas resultan iguales a $h \sqrt{r^2 - y^2}$,

donde r es el radio de γ y h la distancia de t al plano de γ .

Se tiene, entonces,

$$\text{volumen } S = 2 \int_0^r h \sqrt{r^2 - y^2} dy = \dots = \frac{1}{2} \pi r^2 h.$$

El lector reencontrará el resultado si considera, en cambio, las secciones con los planos $z = \text{cte.}$ [elipses de semiejes $r(1 - \frac{z}{h})$, r]

55 - Dado un cilindro circular recto, no acotado en un sentido, trácese por un diámetro de la base un plano no paralelo a las generatrices del mismo. Calcúlese el volumen del sólido S que tal plano separa del cilindro (ver fig. 42).

Las secciones de S con los planos $x = \text{cte.}$ son triángulos rectángulos de catetos (r : radio del cilindro; α : ángulo agudo que el plano considerado forma con el plano de la base) $\sqrt{r^2 - x^2}$, $\sqrt{r^2 - x^2} \operatorname{tg} \alpha$.

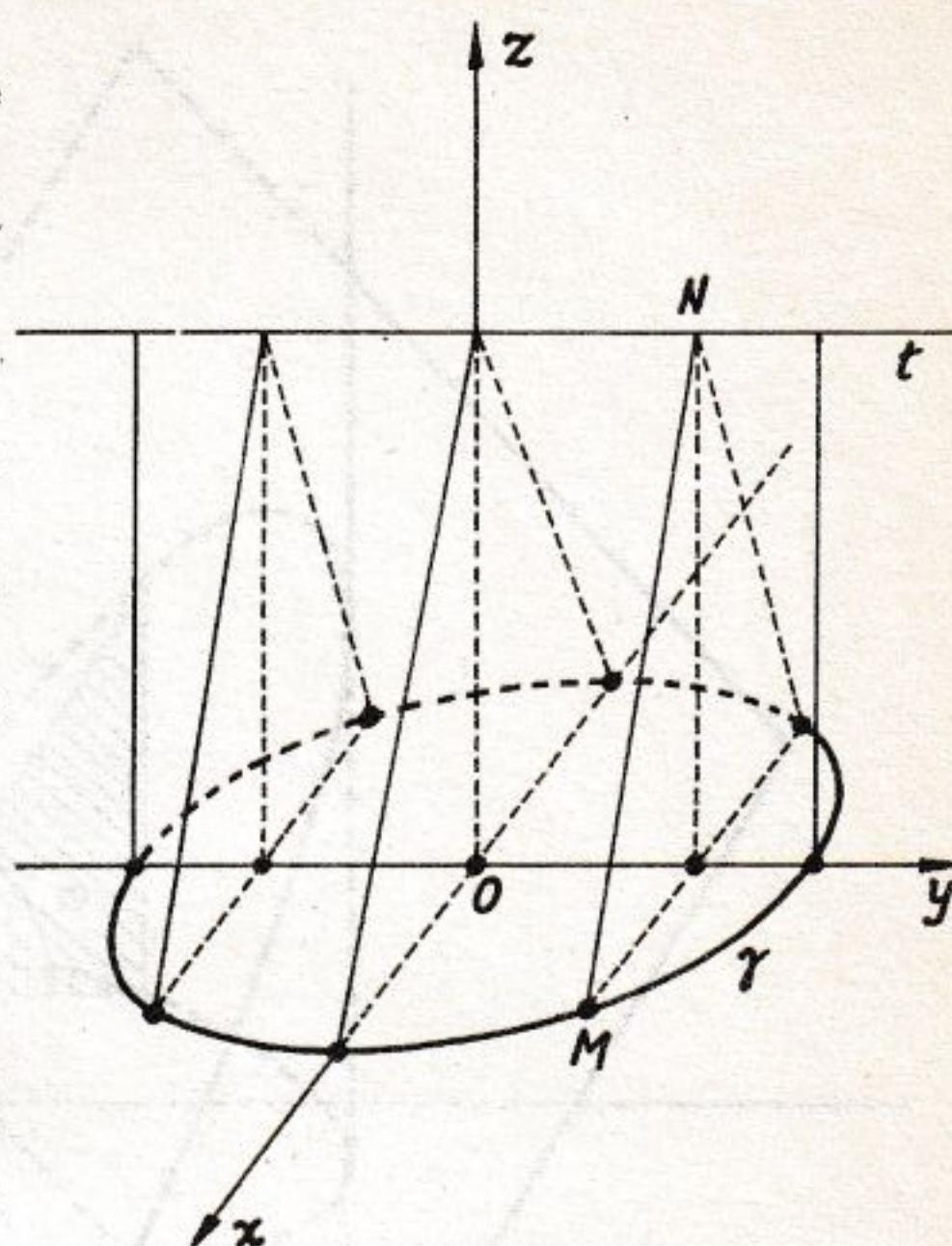


Fig. 41

por debajo del eje x viene dado por

$$2\pi \int_0^{a\sqrt{3}} (a - \sqrt{4a^2 - x^2})^2 dx = \dots = 2\pi a^3 \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right);$$

mientras que el del otro sólido está, en cambio, dado por

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_0^{a\sqrt{3}} (a + \sqrt{4a^2 - x^2})^2 dx + 2\pi \int_{a\sqrt{3}}^{2a} \left[(a + \sqrt{4a^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{4a^2 - x^2})^2 \right] dx = \\ & = 2\pi \int_0^{2a} (a + \sqrt{4a^2 - x^2})^2 dx - 2\pi \int_{a\sqrt{3}}^{2a} (a - \sqrt{4a^2 - x^2})^2 dx = \\ & = \dots = 2\pi a^3 \left(3\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi \right). \end{aligned}$$

57 - APLICACIONES DEL TEOREMA DE GULDIN SOBRE EL VOLUMEN DE UN SOLIDO DE ROTACION (Ver "Lecciones", Cap. XXII, n° 10).

Determinar el baricentro de una semiellipse homogénea.

En las condiciones de la fig. 43 el baricentro buscado G se encuentra sobre el eje y bastando, entonces calcularle la ordenada η . Haciendo rotar la semiellipse alrededor del eje x , se obtiene un elipsoide de semiejes a , b , b cuyo volumen será $\frac{4}{3}\pi a b^2$.

Por otra parte, por el teorema de Guldin, tal volumen también viene dado por el producto del área $\frac{1}{2}\pi ab$ de la

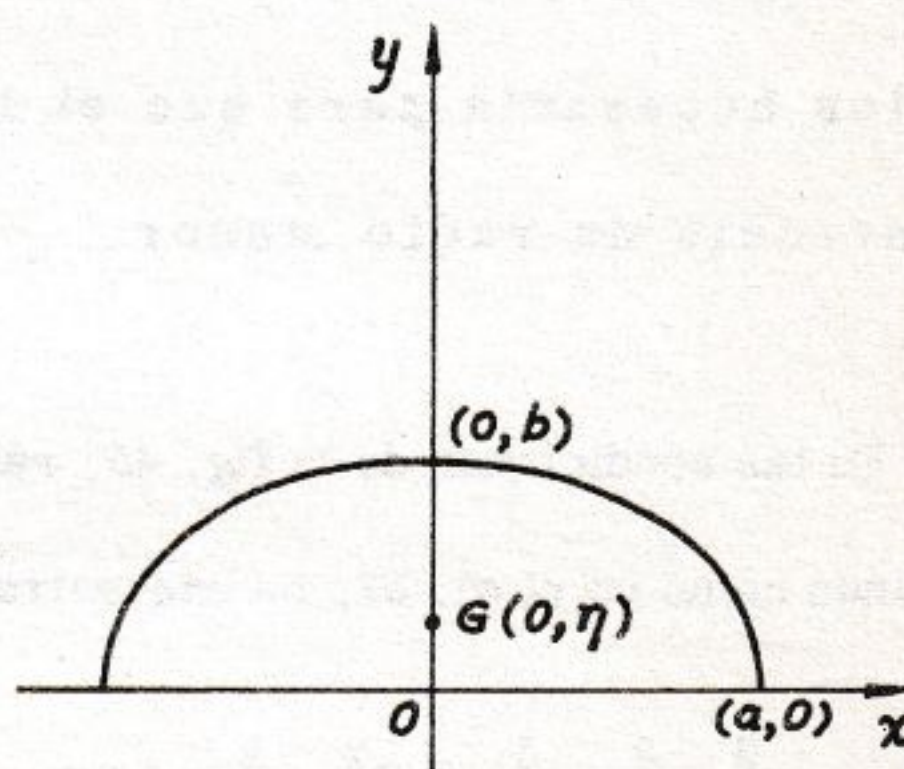


Fig. 43

semiellipse por la longitud $2\pi\eta$ de la circunferencia descrita por G . Debe, entonces, ser $\frac{4}{3}\pi ab^2 = \frac{1}{2}\pi ab \cdot 2\pi\eta$, de donde $\eta = \frac{4}{3\pi}b$.

58 - Determinar el baricentro de un cuarto de elipse (homogénea).

En las condiciones de la fig. 44, haciendo rotar el cuarto de elipse alrededor del eje x se encuentra (cfr. ejercicio precedente):

$$\frac{2}{3} \pi ab^2 = \frac{1}{4} \pi ab \cdot 2\pi \eta$$

mientras que, haciéndolo rotar alrededor del eje y se obtiene

$$\frac{2}{3} \pi a^2 b = \frac{1}{4} \pi ab \cdot 2\pi \xi$$

Tenemos así, $\xi = \frac{4}{3\pi} a$, $\eta = \frac{4}{3\pi} b$.

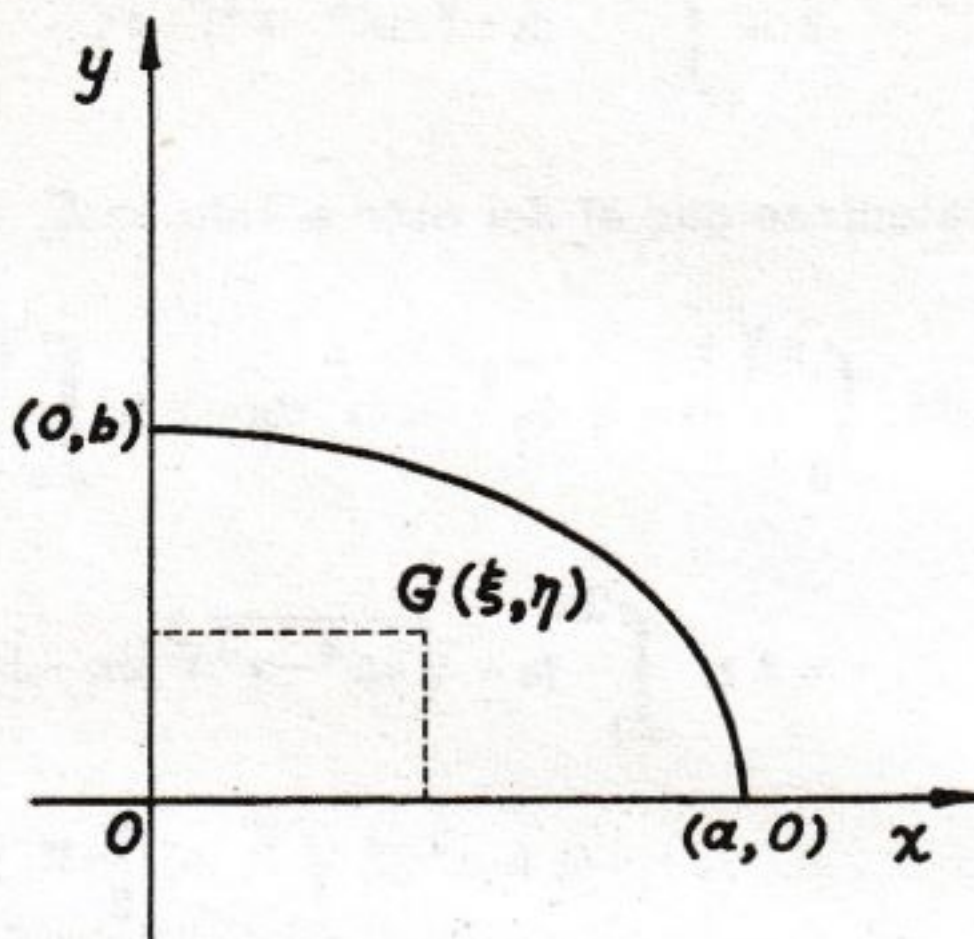


Fig. 44

59 - Determinar el baricentro de una semicorona circular homogénea y calcular el valor de la relación entre los radios necesaria para que el baricentro esté sobre la circunferencia de radio menor.

En las condiciones de la fig. 45, razonando como en el ej. 57, se encuentra

$$\frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) \cdot 2\pi \eta$$

y entonces

$$\eta = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$$

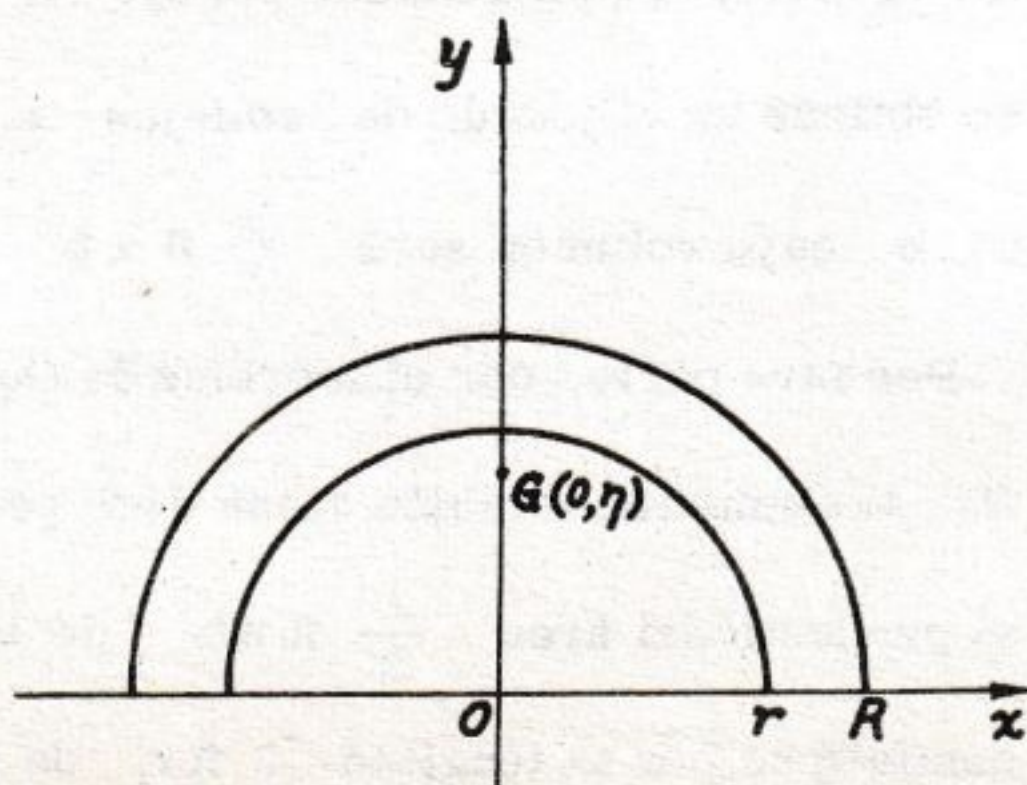


Fig. 45

Por otra parte resultará $\eta = r$ cuando la relación $\frac{r}{R}$ verifique la ecuación de 2º grado

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right) - \frac{4}{3\pi - 4} = 0,$$

la que presenta dos raíces reales, una negativa (a descartar) y otra positiva, menor que 1 (aceptable). Debe, entonces, ser

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3\pi - 4}} \right) = 0,493 \text{ aprox.}$$

60 - Una semielipse E rota alrededor de una recta r de su plano, paralela a la base de ésta y situada, respecto de la misma, en la parte opuesta de E . Calcular el volumen del sólido que se genera.

Adoptando las notaciones de la fig. 46 y teniendo en cuenta que por el ej. 57, el baricentro G de E tiene una distancia al eje de rotación igual a $d + \frac{4}{3\pi} b$ se encuentra inmediatamente que el volumen buscado vale

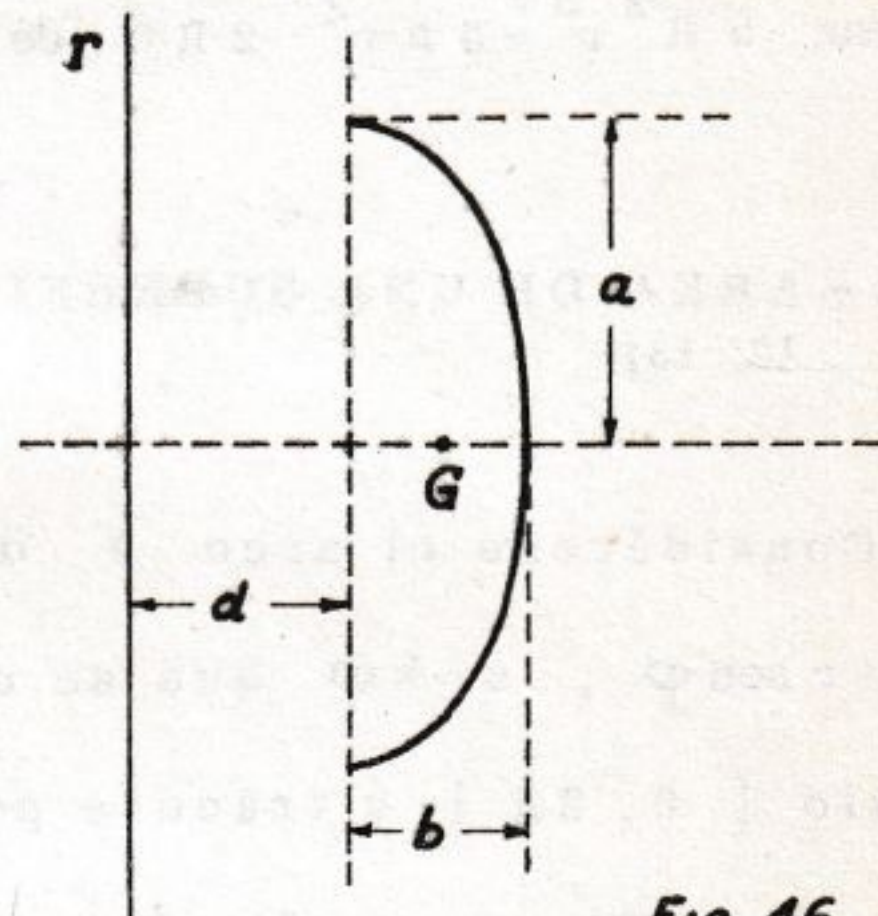


Fig. 46

$$\frac{1}{2} \pi ab \cdot 2\pi \left(d + \frac{4}{3\pi} b \right) = \pi^2 abd + \frac{4}{3} \pi ab^2$$

61 - Determinar el baricentro del dominio plano (ver fig. 47) limitado por el eje x y el arco de cicloide definido por

$$x = 4(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

El dominio D considerado es simétrico respecto de la recta $x = \pi r$; so-

bre esta recta se encuentra entonces el baricentro G del que será suficiente determinar la ordenada η .

El volumen V generado por la rotación de D alrededor del eje x viene dado por

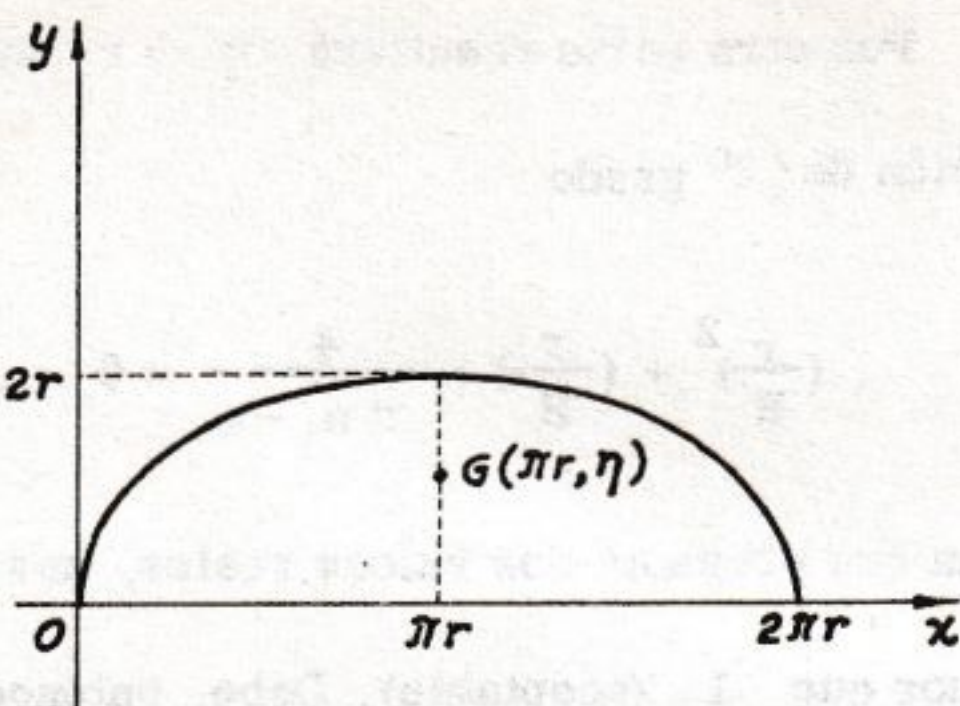


Fig. 47

$$V = \pi \int_0^{2\pi r} y^2(x) dx =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)^2 \cdot r(1 - \cos t) dt = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \dots = 5 \pi^2 r^3.$$

Por otra parte el área de D vale $3 \pi r^2$ por lo que (Teor. de Guldin) se tiene $5 \pi^2 r^3 = 3 \pi r^2 \cdot 2 \pi \eta$ de donde $\eta = \frac{5}{6} r$.

62 - AREA DE UNA SUPERFICIE (ver "Lecciones", Cap. XXII, n^{os} 11, 12, 13).

Considérese el arco γ de la hélice circular $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = k \varphi$ que se obtiene al variar φ en el intervalo $[0, 2\pi]$ y trácese por cada punto P de γ el segmento PP' perpendicular al eje z . Cuando P varía en γ el segmento PP' describe una superficie S ; calcúlese el área de S .

Las ecuaciones paramétricas de S son evidentemente

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = k \varphi,$$

variando los parámetros ρ , φ en el dominio base A ($0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = k$$

y entonces $E = 1$, $F = 0$, $G = \rho^2 + k^2$. Se llega así a

$$\begin{aligned} \text{área } S &= \iint_A \sqrt{\rho^2 + k^2} d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sqrt{\rho^2 + k^2} d\rho = \\ &= \pi \left(r \sqrt{r^2 + k^2} + k^2 \log \frac{r + \sqrt{r^2 + k^2}}{k} \right) \end{aligned}$$

63 - Calcular el área de la parte de superficie cónica $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ que está contenida en el tetraedro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$.

La superficie cónica intercepta las caras $x = 0$ e $y = 0$ del tetraedro se-

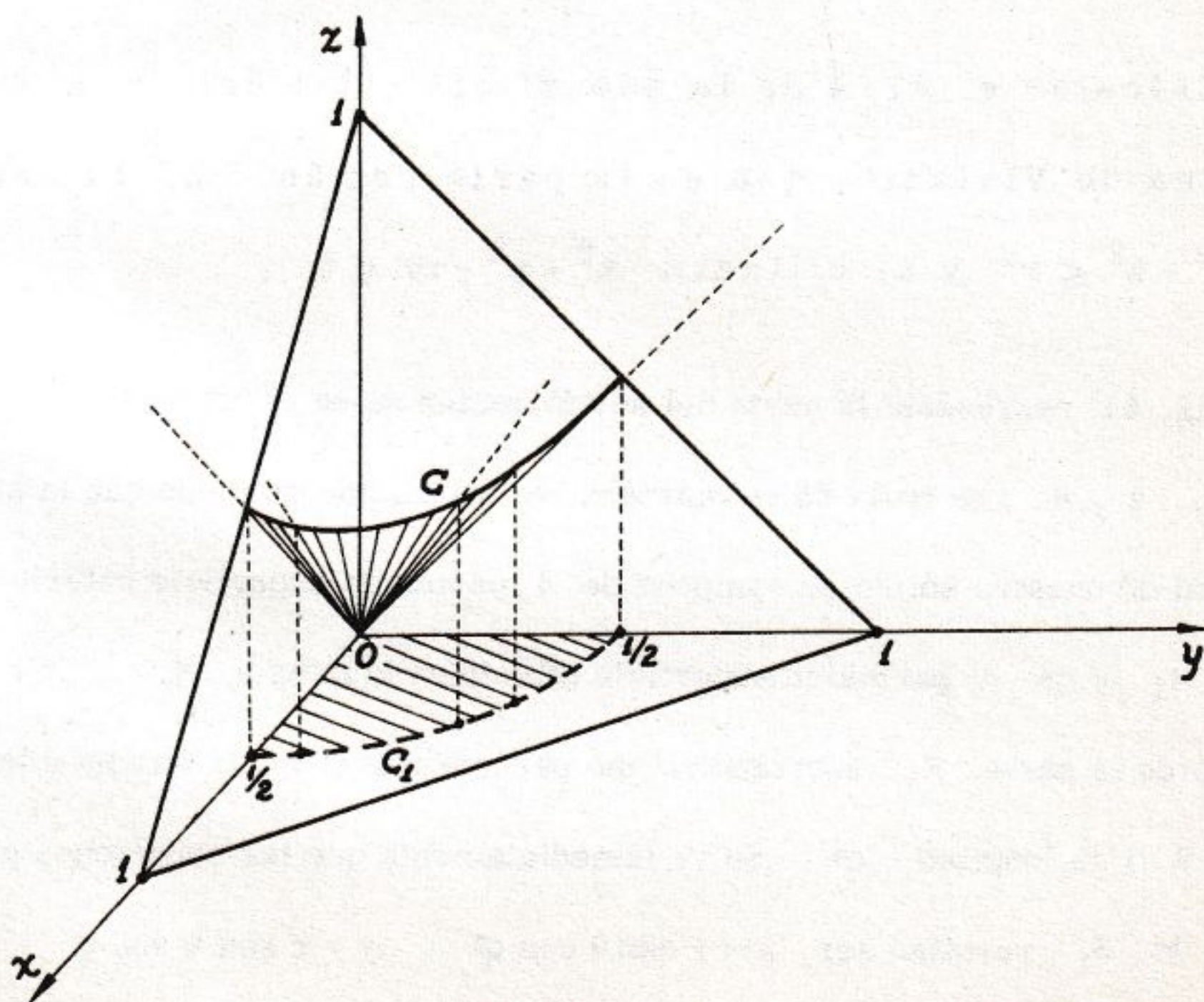


Fig. 48

gún dos generatrices; la cara $z = 0$ sólo en el vértice O y, por último, a la otra cara $x + y + z = 1$ según una curva C que se proyecta ortogonalmente sobre el plano xy en la curva C_1 de ecuación $y = 1 + \frac{1}{2(x-1)}$ (se ha eliminado z entre las dos ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x + y + z = 1$). Se ve entonces, (cfr. fig. 48) que la parte S de superficie cónica que se considera coincide con la parte de superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que se proyecta sobre el plano xy en el dominio A definido por $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq y \leq 1 + \frac{1}{2(x-1)}$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2$, se obtiene

$$\text{área } S = \iint_A \sqrt{2} \, dx \, dy = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{1 + \frac{1}{2(x-1)}} dy = \dots = \frac{1 - \log 2}{2}.$$

64 - Calcular el área de la superficie total del "sólido o ventana de Viviani", que es la parte común a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ y al cilindro $x^2 + y^2 - ry \leq 0$.

La fig. 51 representa la parte del sólido contenida en el octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; se trata de la cuarta parte del mismo de modo que la superficie total de nuestro sólido se compone de 4 partes de superficie esférica iguales a S_1 y de 4 partes de superficie cilíndrica iguales a S_2 . Calculemos el área de la parte S_1 adoptando como parámetros sobre la misma a la colatitud θ y la longitud φ . Se ve inmediatamente que las ecuaciones paramétricas de S_1 resultan ser $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ (con $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) y puesto que, tras fácil cálculo se llega a $E = r^2$, $F = 0$, $G = r^2 \sin^2 \theta$, se concluye que

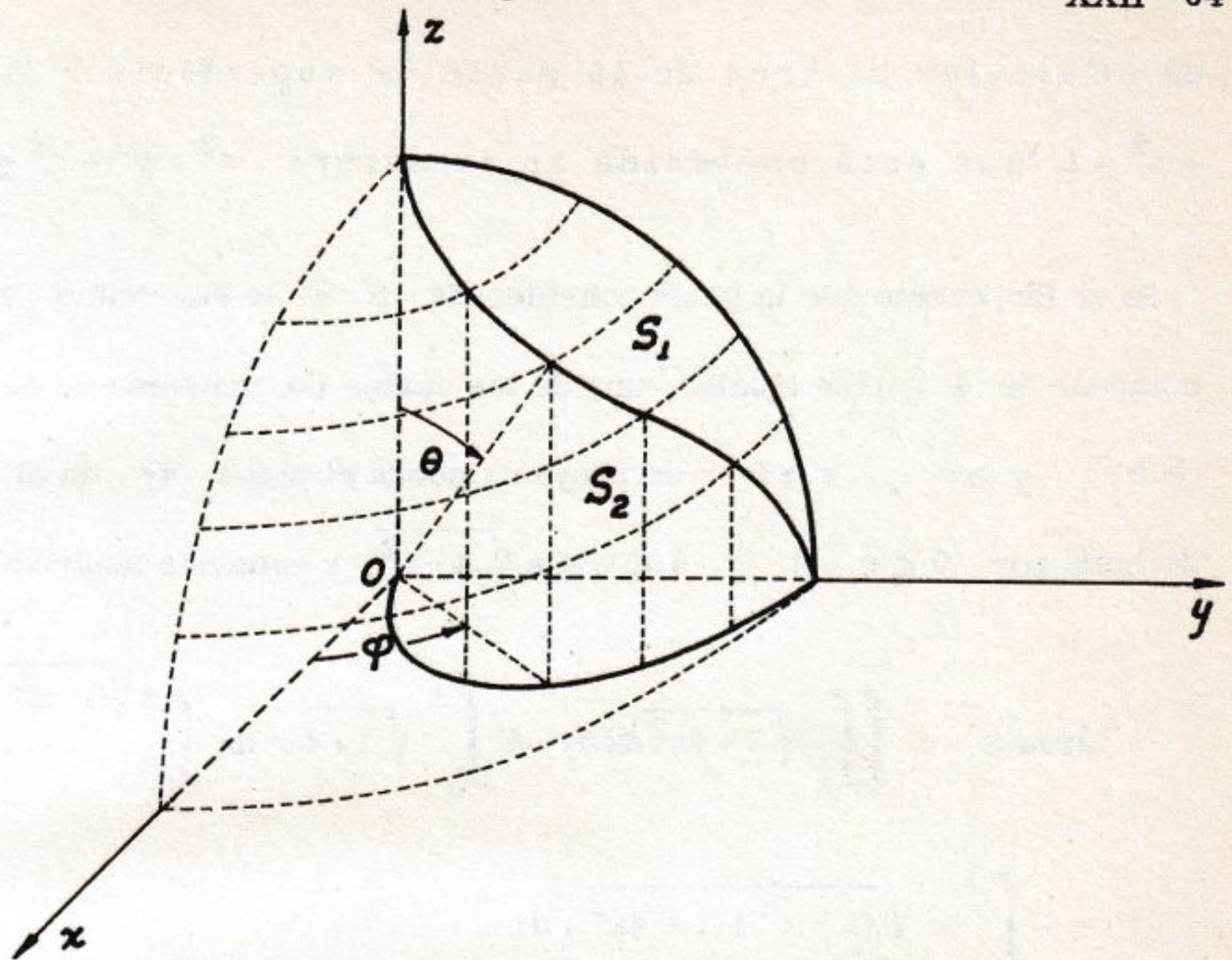


Fig. 49

$$\text{área } S_1 = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\varphi} \sin \theta d\theta = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Calculemos ahora el área de la parte S_2 asumiendo como parámetros sobre la misma la longitud φ y la cota z . Las ecuaciones de S_2 son $x = r \sin \varphi \cos \varphi$, $y = r \sin^2 \varphi$, $z = z$ (con $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq z \leq r \cos \varphi$) y, puesto que resulta $E = r^2$, $F = 0$, $G = 1$ se concluye que

$$\text{área } S_2 = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r \cos \varphi} dz = r^2.$$

Por lo tanto, el área de la superficie total del sólido considerado es

$$4(\text{área } S_1 + \text{área } S_2) = 2\pi r^2$$

65 - Calcular el área de la parte de superficie cilíndrica $z + x^2 = 1$ que está contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Se ve fácilmente que la parte considerada S de la superficie $z = 1 - x^2$ se compone de 4 partes iguales, una de las cuales (la contenida en el octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) se proyecta sobre el plano xy en el dominio A definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x \sqrt{1-x^2}$ y entonces tendremos

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 4 \iint_A \sqrt{1+4x^2} \, dx \, dy = 4 \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} \, dx \int_0^{x\sqrt{1-x^2}} dy = \\ &= 4 \int_0^1 x \sqrt{(1-x^2)(1+4x^2)} \, dx. \end{aligned}$$

Con la sustitución $x^2 = t$ se obtiene

$$\text{área } S = 2 \int_0^1 \sqrt{(1-t)(1+4t)} \, dt$$

y con la nueva sustitución $\frac{1-t}{1+4t} = u^2$;

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 100 \int_0^1 \frac{u^2 \, du}{(1+4u^2)^3} = \frac{25}{8} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2u + \frac{4u^3 - u}{(1+4u^2)^2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{25}{16} \operatorname{arctg} 2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

66 - Referido el espacio a una terna de ejes cartesianos ortogonales x, y, z de origen O , considérese en el plano xy la lemniscata de Bernouilli $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ y por cada punto M de la misma trácese el segmento OM y, además, la circunferencia que tiene OM como diámetro y está si —

tuada en el plano que pasa por M y por el eje z (ver fig.50). Calcúlese el área de la superficie S lugar de las circunferencias C .

Introducidas las coordenadas polares ρ , θ , φ según las conocidas fórmulas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

la ecuación de la lemniscata, en el plano xy , resulta ser $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Se tiene entonces $OM = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ y, llamando P a un punto cualquiera de la circunferencia C , se obtiene del triángulo rectángulo OPM :

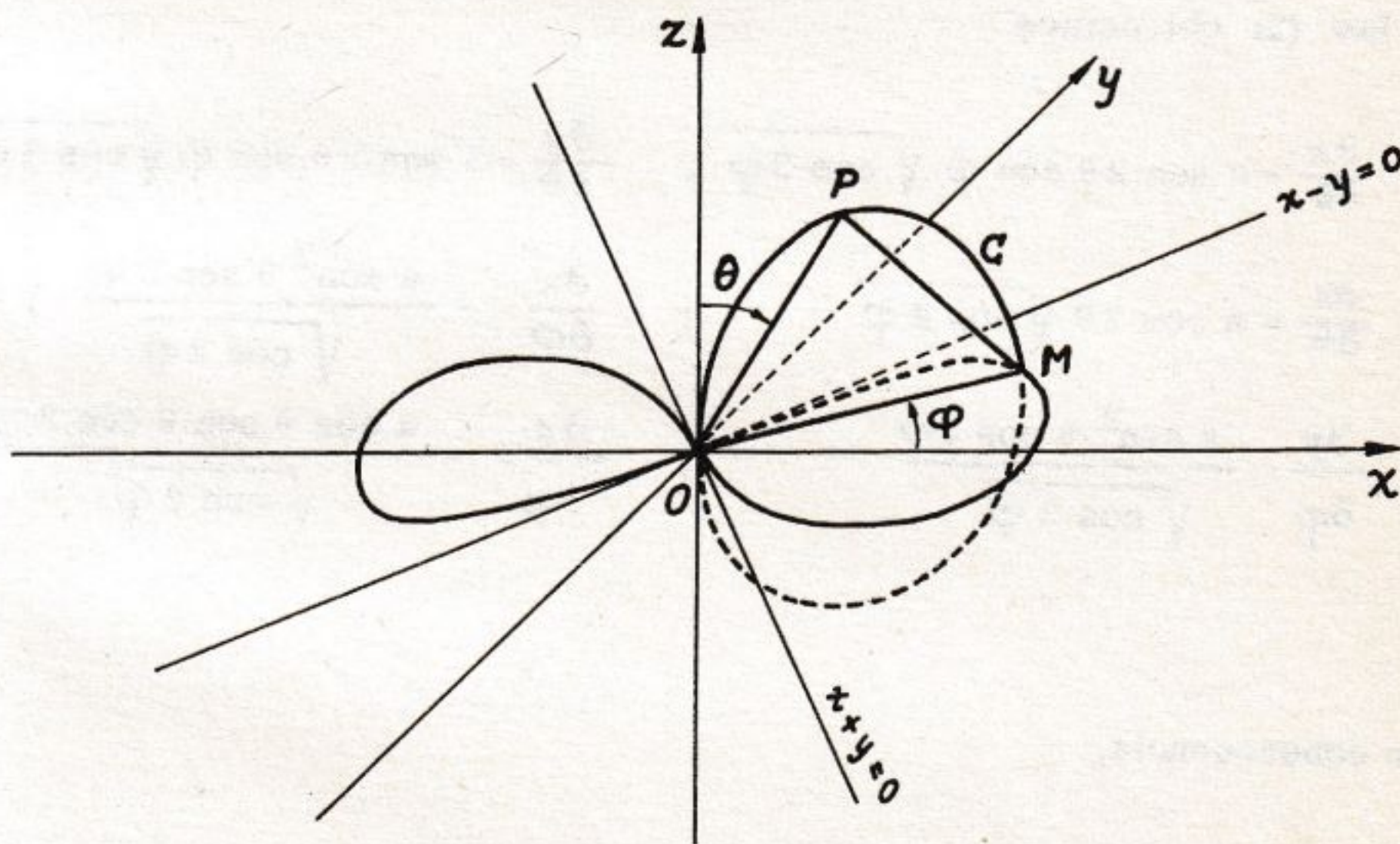


Fig. 50

$$OP = OM \operatorname{sen} \theta.$$

Para cada punto P de la superficie S resulta entonces

$$\rho = a \operatorname{sen} \theta \sqrt{\cos 2\varphi},$$

y ésta es la ecuación de S . Teniendo después en cuenta que de las (1) se ob-

tienen las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen}^2 \theta \cos \varphi \sqrt{\cos 2 \varphi} \\ y = a \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \sqrt{\cos 2 \varphi} \\ z = a \cos \theta \operatorname{sen} \theta \sqrt{\cos 2 \varphi} \end{cases} \quad (2)$$

La S es simétrica respecto de los planos coordenados y la parte S_1 de la misma que está en el octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ se obtiene haciendo variar θ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y φ en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. De aquí sigue

$$\text{área } S = 8 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sqrt{EG - F^2} d\theta \quad (3)$$

De las (2) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \theta} &= a \operatorname{sen} 2\theta \cos \varphi \sqrt{\cos 2 \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= a \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \varphi \sqrt{\cos 2 \varphi}, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= a \cos 2\theta \sqrt{\cos 2 \varphi} & ; & \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{a \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} 3 \varphi}{\sqrt{\cos 2 \varphi}} ; \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{a \operatorname{sen}^2 \theta \cos 3 \varphi}{\sqrt{\cos 2 \varphi}}, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= -\frac{a \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2 \varphi}{\sqrt{\cos 2 \varphi}}, \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$E = a^2 \cos 2 \varphi, \quad F = -a^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2 \varphi,$$

$$G = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos 2 \varphi} (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 2 \varphi), \quad EG - F^2 = a^4 \operatorname{sen}^4 \theta.$$

Con estos elementos, de la (3) sigue inmediatamente

$$\text{área } S = 8a^2 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi^2 a^2$$

67 - Calcular el área de la parte S de superficie cónica $z^2 = 2xy$ cuyos puntos se proyectan sobre el plano xy en puntos del rectángulo A ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$).

La S se compone de dos partes simétricas respecto del plano xy . Refiriéndonos, por ejemplo, a la parte superior, se tiene para la misma $z = \sqrt{2xy}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{2xy}}$, $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{2xy}$. Resulta, en consecuencia, (*)

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 2 \iint_A \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy = \sqrt{2} \int_0^b dy \int_0^a \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx = \\ &= 2 \sqrt{2} \int_0^b \left(\frac{1}{3} a \sqrt{\frac{a}{y}} + \sqrt{ay} \right) dy = \frac{4}{3} (a+b) \sqrt{2ab}. \end{aligned}$$

68 - Calcular el área de la superficie total S del sólido limitado por los dos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + z^2 = r^2$

Restrinjamos el estudio a la octava parte de S ; precisamente nos referiremos a la parte S_1 contenida en el octante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Tal parte S_1 se compone, a su vez, de dos partes S' , S'' , con S' definida por $z = \sqrt{r^2 - x^2}$ y (x, y) variable en el cuadrante de círculo $A(x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2)$; S'' , definida por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y (x, z) variable en el cuadrante de círculo $B(x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq r^2)$. Tales partes S' , S'' son iguales entre sí (una se deduce de la otra intercambiando la y con la z), entonces

(*) En la integral doble que se considera a continuación, el integrando no es función continua sobre los lados $x=0$ e $y=0$ de A ; a pesar de esto la integral tiene significado y resulta un valor finito (ver "Lecciones" Cap. X.XV)

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 16 \text{ área } S' = 16 \iint_A \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx dy = \\ &= 16 r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = 16 r \int_0^r dx = 16 r^2 \quad (*) \end{aligned}$$

69 - Calcular el área de una zona esférica.

Pensando tal zona S como una superficie generada por la rotación alrededor del eje z del arco de círculo AB de la fig. 51; se tiene

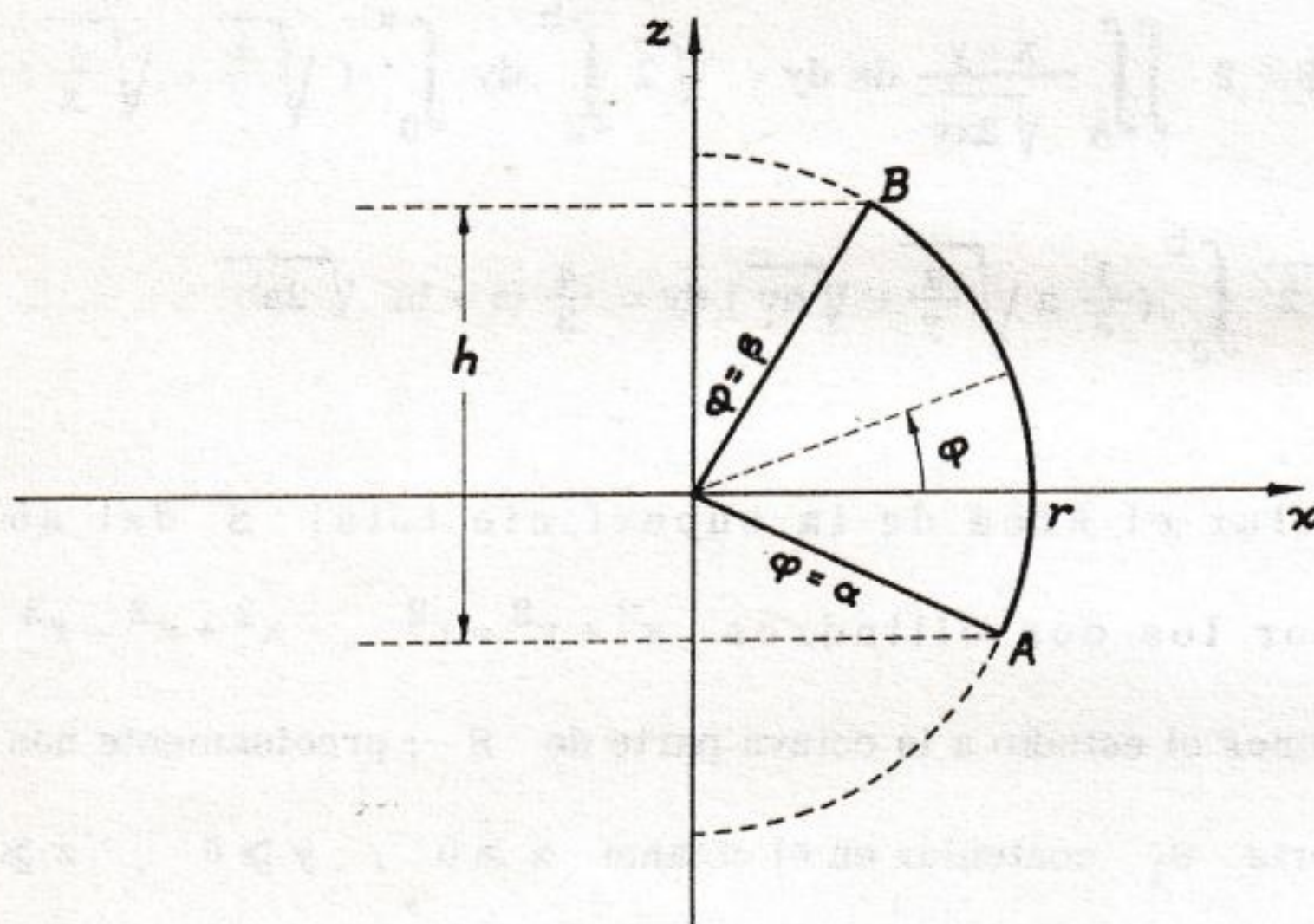


Fig. 51

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 2\pi \int x ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \cos \varphi \cdot r d\varphi = 2\pi r^2 (\sin \beta - \sin \alpha) = \\ &= 2\pi rh. \end{aligned}$$

70 - Calcular el área de la zona de paraboloides $z = x^2 + y^2$ comprendida entre los planos $z = a$ y $z = b$ (con $0 \leq a < b$).

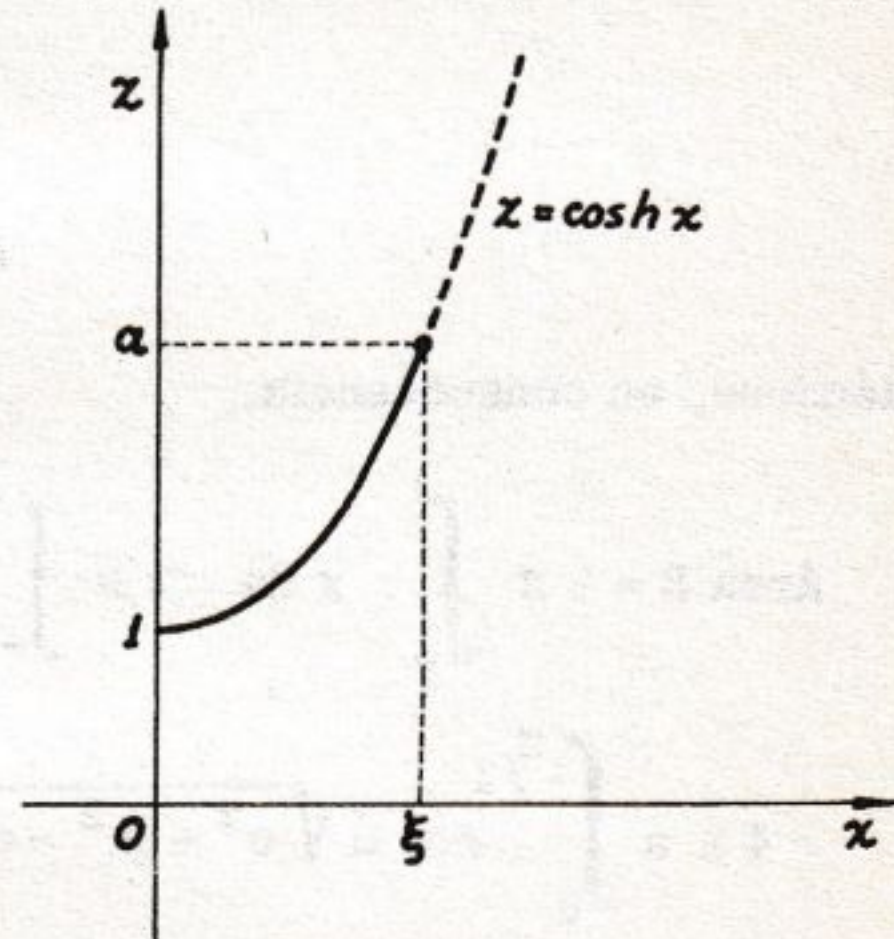
(*) También en este caso debe hacerse una observación análoga a la del ej. precedente.

Considerando tal zona S como una superficie generada por la rotación alrededor del eje z del arco de parábola $x = \sqrt{z}$, $a \leq z \leq b$, se encuentra

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 2\pi \int x \, ds = 2\pi \int_a^b \sqrt{z} \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} \, dz = 2\pi \int_a^b \sqrt{z + \frac{1}{4}} \, dz = \\ &= \frac{4}{3} \pi \left[\left(b + \frac{1}{4}\right)^{3/2} - \left(a + \frac{1}{4}\right)^{3/2} \right]. \end{aligned}$$

71 - Calcular el área de la calota de catenoide $z = \cosh \sqrt{x^2 + y^2}$ determinada por el plano $z = a$ (con $a > 1$).

El catenoide considerado es la superficie que se obtiene haciendo rotar alrededor del eje z la catenaria $z = \cosh x$ (fig. 52). La calota S' en cuestión proviene de la rotación del arco de catenaria definido por $0 \leq x \leq \xi$ [con $\xi = \arg \cosh a = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$].



Se tiene, entonces,

Fig. 52

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 2\pi \int x \, ds = 2\pi \int_0^\xi x \cosh x \, dx = 2\pi (\xi \sinh \xi - \cosh \xi + 1) = \\ &= 2\pi \left[\sqrt{a^2 - 1} \log(a + \sqrt{a^2 - 1}) - a + 1 \right]. \end{aligned}$$

72 - Calcular el área de un elipsoide de rotación.

Siendo S un elipsoide de rotación (respecto del eje z), el semimeridiano situado en el semiplano $y = 0$, $x \geq 0$ será una semielipse en la que indicaremos con a y c los semiejes según el eje x y el eje y , respec-

tivamente (fig. 53).

Tal semielipse γ puede representarse con las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos u, \quad z = c \sin u \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

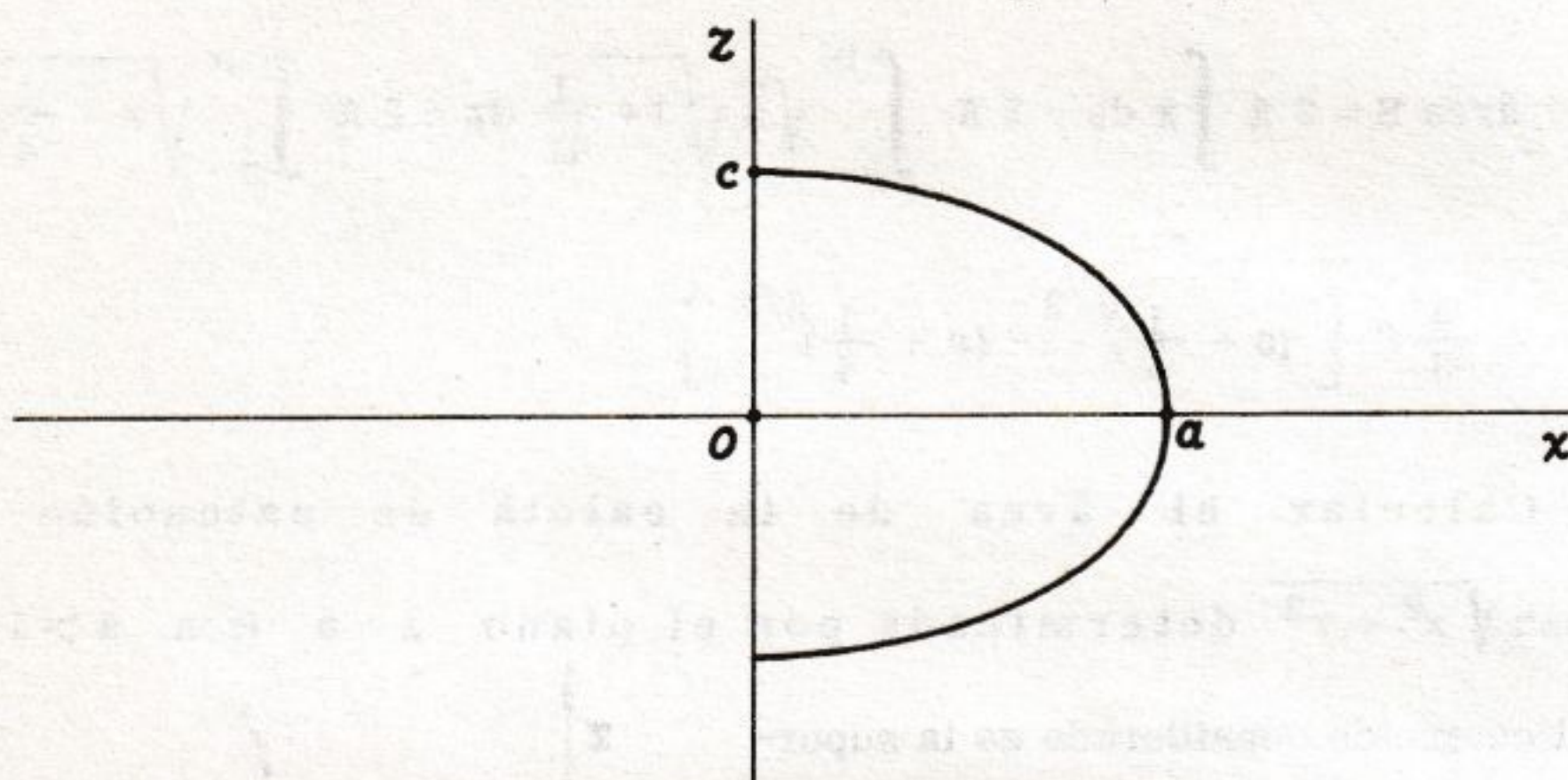


Fig. 53

teniéndose, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{área } S &= 2\pi \int_{\gamma} x \, ds = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos u \sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u} \, du = \\ &= 4\pi a \int_0^{\pi/2} \cos u \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 u} \, du, \end{aligned}$$

o también, realizando la sustitución $\sin u = t$:

$$\text{área } S = 4\pi a \int_0^1 \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2) t^2} \, dt \quad (1)$$

Conviene ahora distinguir dos casos según se tenga $a > c$ o $a < c$.

En el caso $a > c$, introduciendo la excentricidad ϵ de la elipse meridiana, es decir, poniendo $c = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$, se obtiene de la (1)

$$\text{área } S = 4\pi a^2 \epsilon \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon^2} + t^2} \, dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \pi a^2 \epsilon \cdot \frac{1}{2} \left[t \sqrt{\frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} + t^2} + \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} \log(t + \sqrt{\frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} + t^2}) \right]_0^1 = \\
&= 2 \pi a^2 \epsilon \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} \log \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \right]
\end{aligned}$$

y, por último,

$$\text{área } S = 2 \pi a^2 \left[1 + \frac{1-\epsilon^2}{2\epsilon} \log \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right] \quad \text{[para el caso } a > c \text{]}. \quad (2)$$

En el caso $a < c$, procediendo de igual forma, es decir, poniendo $a = c \sqrt{1-\epsilon^2}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{área } S &= 4 \pi c^2 \epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - t^2} dt = \\
&= 4 \pi c^2 \epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} \cdot \frac{1}{2} \left[t \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - t^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \arcsen \frac{t}{\frac{1}{\epsilon}} \right]_0^1 = \\
&= 2 \pi c^2 \epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} \left[\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2} \arcsen \epsilon \right]
\end{aligned}$$

vale decir

$$\text{área } S = 2 \pi c^2 \left[1 - \epsilon^2 + \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon} \arcsen \epsilon \right], \quad \text{[para el caso } a < c \text{]} \quad (3)$$

Es fácil verificar que, para $\epsilon \rightarrow 0$ la (2) o la (3) permiten reencontrar el área de la esfera de radio a o c [o sea, $4 \pi a^2$ o $4 \pi c^2$].

73 - Calcular el área de la parte S de superficie de revolución que se obtiene haciendo rotar alrededor del eje y el arco de semicúbica $y^2 = x^3$ definido por $|y| \leq 1$.

Se tiene, aplicando la fórmula de costumbre,

$$\text{área } S = 4\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

y, realizando la sustitución $1 + \frac{9}{4}x = t^2$;

$$\text{área } S = \frac{128}{81}\pi \int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{13}} (t^4 - t^2) dt = \frac{4}{1215}\pi (247\sqrt{13} + 64)$$

74 - Calcular el área de la parte S de hiperboloide de una hoja $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ que es exterior al cono $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$.

Se trata de dos superficies de revolución respecto del eje y cuyas líneas meridianas (en el plano xy) son la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ y el par de rectas $y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$, respectivamente. La S queda entonces genera

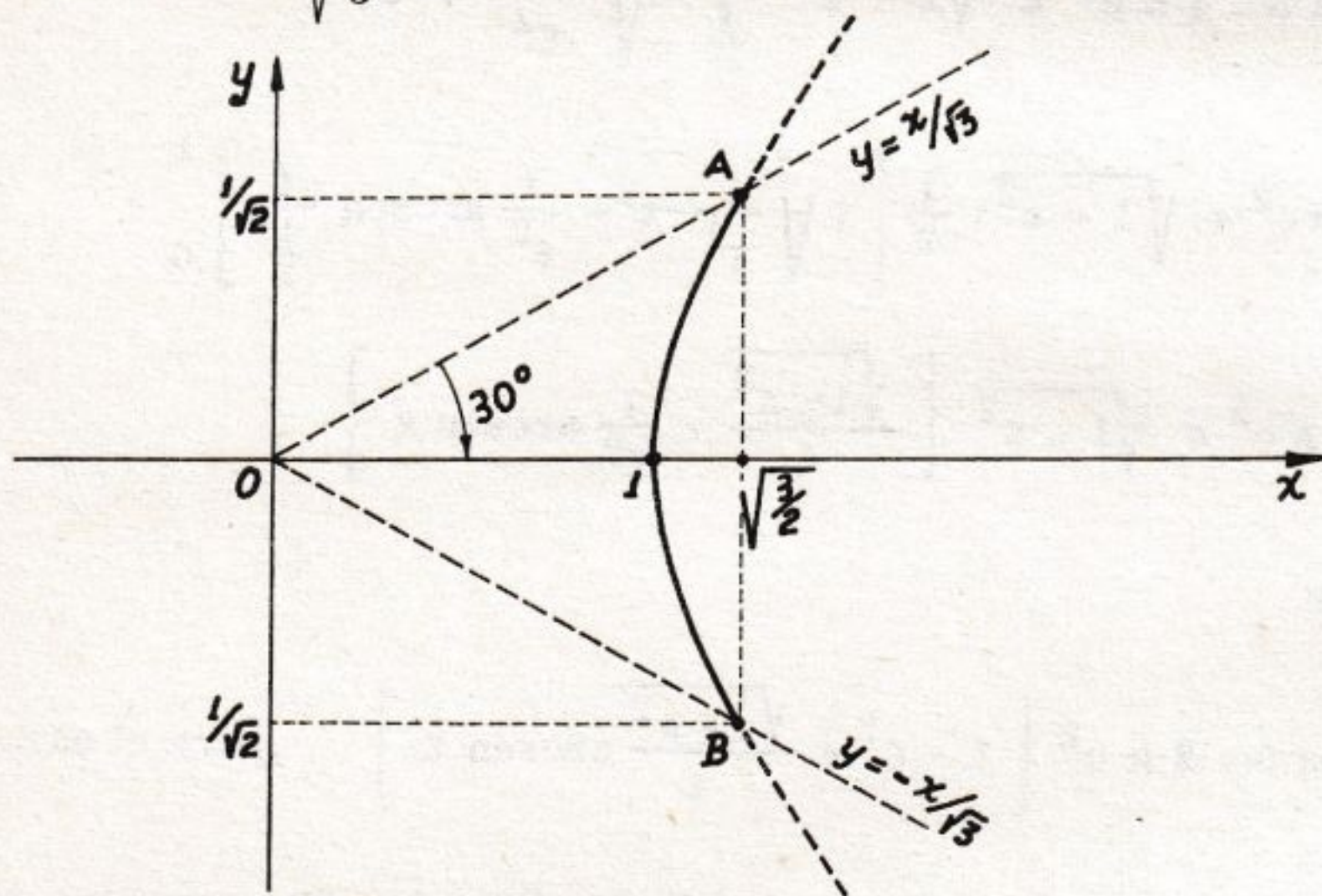


Fig. 54

da por la rotación del arco AB de hipérbola de la fig. 54. Teniendo en cuenta entonces, la simetría de tal arco respecto del eje x , se tiene

$$\text{área } S = 4\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}} dy = 4\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1+2y^2} dy =$$

$$= 2\pi \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log (1 + \sqrt{2}) \right] .$$

75 - Determinar las curvas $y = y(x) \geq 0$ tales que el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de un rectánguloide cualquiera resulte proporcional al área de la superficie generada por el arco de curva correspondiente.

Debe ser $\pi \int_{x_0}^x y^2 dx = \frac{k}{2} 2\pi \int_{x_0}^x y \sqrt{1 + y'^2} dx$, habiendo indicado con $\frac{k}{2} > 0$ el factor de proporcionalidad. Se deduce $y^2 = ky \sqrt{1 + y'^2}$ y de aquí las soluciones $y = 0$ y las de la ecuación $y = k \sqrt{1 + y'^2}$ constituidas por las rectas paralelas al eje x y por las catenarias con eje paralelo al eje y , como se verá en el ej. 36 del Cap. XXIX.

76 - OBSERVACIONES SOBRE LA DEFINICION DE AREA DE UNA SUPERFICIE.

Expondremos aquí el clásico ejemplo debido a Schwarz, relativo a la imposibilidad de definir (sin convenientes restricciones) el área de una superficie S como el límite del área de una superficie poliédrica Σ variable, inscripta en la superficie S dada, al tender a cero el máximo diámetro de las caras de Σ .

Consideremos la superficie lateral S de un cilindro circular recto de radio r y altura h . Fijado un número positivo n dividamos la altura en $2n$ partes iguales y por los puntos de división consideremos planos paralelos a la base. Obtendremos así $2n + 1$ circunferencias, intersecciones de tales planos con la superficie S (contando también las dos de base).

Fijado otro entero positivo m inscribamos en cada una de las citadas cir -

cunferencias un polígono regular de m lados de modo que cada polígono resulte rotado en $\frac{\pi}{m}$ radianes, alrededor del eje del cilindro, respecto del polígono precedente (ver fig. 55, donde $m=4$)

Considerados dos polígonos sucesivos P , P' (inscritos en las circunferencias γ , γ') a cada vértice A de uno puede hacerse corresponder un lado BC del otro: aquél cuyo correspondiente arco BC resulta dividido por mitades por la generatriz del cilindro que pasa por A . Uniendo cada vértice A de P con los extremos

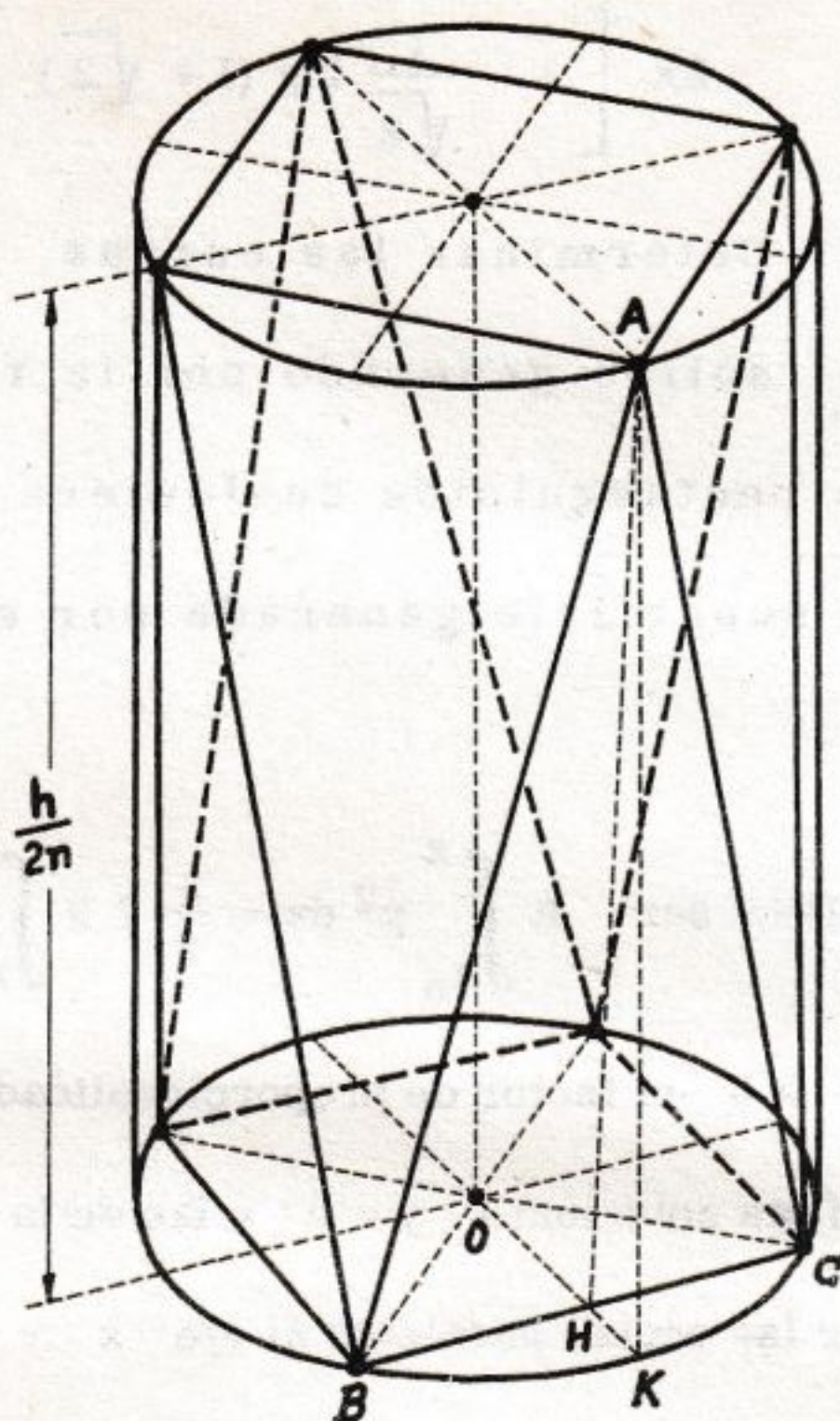


Fig. 55

B , C del lado correspondiente de P' , se obtienen evidentemente $2m$ triángulos (isósceles, iguales entre sí) que constituyen una superficie poliédrica inscrita en la zona de cilindro comprendida entre las circunferencias consecutivas γ , γ' . Repitiendo la construcción para cada una de las $2n$ zonas del cilindro obtenemos por último una superficie poliédrica $S_{m,n}$ inscrita en S constituida por $4mn$ triángulos isósceles iguales entre sí.

Calculemos el área de uno de estos triángulos ABC . De la fig. 55 resulta $BH = r \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}$, $HK = r(1 - \cos \frac{\pi}{m}) = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2m}$, $AH = \sqrt{AK^2 + HK^2} =$
 $= \sqrt{\frac{h^2}{4n^2} + 4r^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{2m}}$ y, por ende,

$$\text{área } ABC = BH \cdot AH = r \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{h^2}{4n^2} + 4r^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

Resulta, entonces,

$$\begin{aligned} \text{área } S_{m,n} &= 4mnr \operatorname{sen} \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{h^2}{4n^2} + 4r^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{2m}} = \\ &= 2\pi rh \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \cdot \sqrt{1 + \pi^4 \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{n}{m^2}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4} \end{aligned}$$

Hagamos ahora variar los enteros m, n de modo que el diámetro de las caras de $S_{m,n}$ tienda a cero; es evidente que es necesario hacer tender a infinito tanto m como n (simultáneamente, pero independientemente el uno del otro).

Ahora, para $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ se tiene $\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \rightarrow 1$, $\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \rightarrow 1$,

mientras la relación $\frac{n}{m^2}$ no tiende a ningún límite determinado (tiene mínimo límite cero y máximo límite $+\infty$) (*).

Se tiene entonces

$$\min_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \lim \text{área } S_{m,n} = 2\pi rh ; \quad \max_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \lim \text{área } S_{m,n} = +\infty . \quad (1)$$

Es también fácil ver que, eligiendo en forma oportuna los números m, n , pueden deducirse de $S_{m,n}$ particulares sucesiones que tienen como límite cualquier número del intervalo $[2\pi rh, +\infty]$. Si, por ejemplo, se asume $n=m$ se obtiene $\lim S_{m,n} = 2\pi rh$; si se asume $n=m^2$ se llega a

$$\lim S_{m,n} = 2\pi rh \sqrt{1 + \pi^4 \frac{r^2}{h^2}} ; \text{ si se asume } n=m^3 \text{ se tiene } \lim S_{m,n} = +\infty, \text{ etc., etc.}$$

(*) Para los conceptos de mínimo y máximo límite véase "Ejercicios", Cap. IV, ej. 17.

Nosotros sabemos que el área de la superficie S considerada vale $2\pi rh$ y vemos [cfr. la (1)] que este valor puede obtenerse como mínimo límite de área $S_{m,n}$. Este es, precisamente, el punto de partida para la definición moderna de área de una superficie debida a Lebesgue; pero no podemos detenernos en este punto.

Observemos, todavía, que el ejemplo precedente no está en contradicción con la definición de área de una superficie dada por nosotros en "Lecciones", Cap. XXII, n° 11. Supongamos que nuestro cilindro tenga por eje al eje z y que el origen coincida con el centro de la base: entonces, usando las coordenadas cilíndricas ρ , θ , φ habituales, la superficie lateral S puede representarse con las ecuaciones paramétricas $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, con el dominio base A ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$). Se ve inmediatamente que los vértices de la superficie poliédrica inscripta $S_{m,n}$ antes construida provienen de los nodos de la red de triángulos, trazada en el dominio base A , indicados en la fig. 56a (donde $n = 2$, $m = 4$), mientras que según lo di-

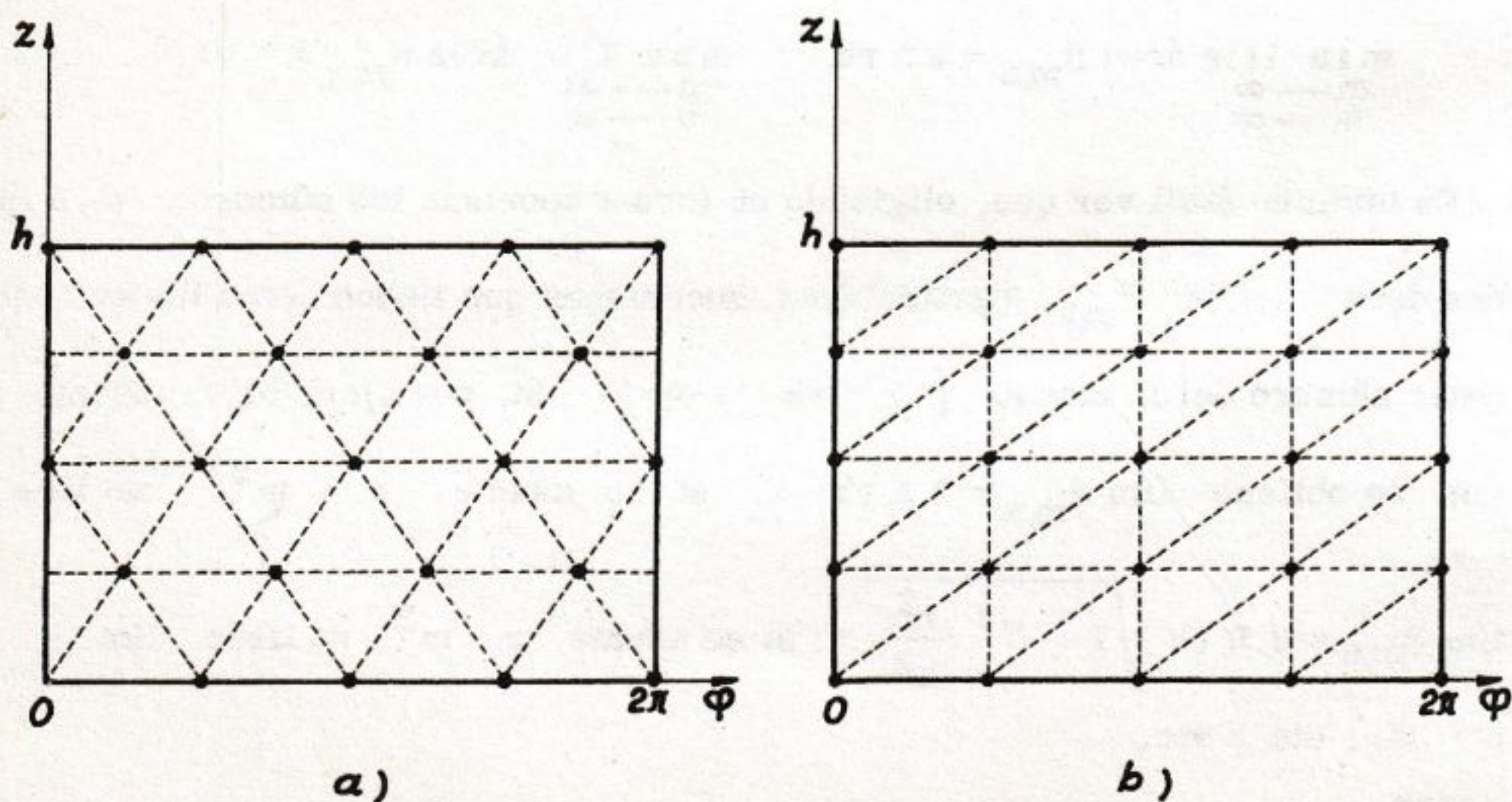


Fig. 56

cho en "Lecciones", tras haber dividido los intervalos $[0, 2\pi]$ del eje φ y $[0, h]$ del eje z en m y $2n$ partes iguales, respectivamente, habríamos debido considerar una red de triángulos como la de la fig. 56b. El lector verá fácilmente que, a partir de esta última, se genera una superficie poliédrica inscripta en S cuya área vale

$$4mn \cdot r \sin \frac{\pi}{m} \cdot \frac{h}{2n} = 2\pi rh \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}$$

y tiende al efectivo valor $2\pi rh$ del área de S .

77 - DEMOSTRACION DEL TEOREMA RELATIVO AL CAMBIO DE VARIABLES EN LAS INTEGRALES MULTIPLES.

Nos referiremos, para fijar las ideas, a las integrales dobles. Recordemos que en "Lecciones", Cap. XXII, n^o 9 ha sido enunciado, sin demostración, el teorema general sobre el cambio de variables en tales integrales. Retomemos el argumento con el objeto de dar ahora la demostración.

Sea B un campo (conjunto abierto) del plano uv . Supongamos definidas en B dos funciones reales

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{1}$$

que verifiquen las siguientes hipótesis: 1^o) en B son continuas junto con sus derivadas parciales primeras; 2^o) el determinante jacobiano $J(u, v) =$

$$= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \quad \text{se mantiene distinto de cero en } B; \quad 3^o) \text{ llamando } A \text{ al cam-}$$

po del plano xy descrito por el punto (x, y) definido por las (1) cuando (u, v) varía (*) en B , las (1) establecen una correspondencia biunívoca en

(*) Diremos brevemente que A es el campo correspondiente a B ; el hecho de que A sea un campo ha sido probado en "Ejercicios", Cap. XVI, ej. 47.

tre los puntos de B y los puntos de A

Se trata, entonces, de demostrar sucesivamente los siguientes teoremas (cfr. Cap. XXII, n^o 7 en donde se ha tratado el caso particular del pasaje a coordenadas polares):

I - Si R es un intervalo contenido en B , el conjunto R' que le corresponde en A es un dominio acotado y medible (según Jordan) y se tiene

$$\text{área } R' = \iint_R |J(u, v)| \, du \, dv \quad . \quad (2)$$

II - Si T es cualquier dominio acotado y medible contenido en B , el conjunto T' que le corresponde en A es también un dominio acotado y medible y se tiene

$$\text{área } T' = \iint_T |J(u, v)| \, du \, dv \quad .$$

III - En las condiciones del teorema precedente, si $f(x, y)$ es una función continua definida en T' , se tiene

$$\iint_{T'} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_T f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| \, du \, dv \quad .$$

La verdadera dificultad consiste en demostrar el teor. I, porque de éste se deducen inmediatamente los otros dos con razonamientos del todo análogos a los desarrollados en "Lecciones", Cap. XXII, n^o 7, teor. I y II, en el caso de las coordenadas polares.

Ocupémonos, entonces, solamente de la demostración del teor. I y, con tal motivo, realicemos previamente algunas consideraciones elementales sobre las afinidades entre el plano uv y el plano xy , es decir, sobre aquellas transformaciones (1) particulares en las que las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$

del segundo miembro son lineales. Poniendo en evidencia un par de puntos correspondientes $(u_0, v_0), (x_0, y_0)$ las ecuaciones de la afinidad pueden escribirse:

$$\begin{cases} x - x_0 = a(u - u_0) + b(v - v_0) \\ y - y_0 = c(u - u_0) + d(v - v_0) \end{cases}, \quad (a, b, c, d \text{ constantes, con } J = ad - bc \neq 0) \quad (3)$$

Si en el plano uv se considera el intervalo R definido por $|u - u_0| \leq \frac{\alpha}{2}$, $|v - v_0| \leq \frac{\beta}{2}$, se ve fácilmente que las (3) le hacen corresponder el paralelogramo R^* limitado por los dos pares de rectas paralelas

$$d(x - x_0) - b(y - y_0) = \pm J \frac{\alpha}{2}; \quad -c(x - x_0) + a(y - y_0) = \pm J \frac{\beta}{2}, \quad (4)$$

y que resulta

$$\text{área } R^* = |J| \cdot \text{área } R. \quad (5)$$

Si junto al citado intervalo R se considera otro, S , definido por $|u - u_0| \leq k \frac{\alpha}{2}$, $|v - v_0| \leq k \frac{\beta}{2}$ (es decir, concéntrico y homotético a R) a éste las (3) le ponen en correspondencia otro paralelogramo S^* cuyos lados son paralelos a aquellos de R^* , a las distancias de

$$\frac{|J|}{\sqrt{b^2 + d^2}} |1 - k| \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{|J|}{\sqrt{a^2 + c^2}} |1 - k| \frac{\beta}{2}, \quad (6)$$

respectivamente, como se deduce de inmediato teniendo presente las (4).

Tras estas consideraciones comencemos la demostración del teor. I. De la hipótesis 2ª) sigue que las derivadas x_u, y_u no pueden ser nunca simultáneamente nulas y lo mismo puede decirse para las x_v, y_v . Por lo tanto las

funciones $\frac{|J(u, v)|}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}}$, $\frac{|J(u, v)|}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}}$ son continuas y positivas, con lo que ca

da una de ellas admite en R mínimo positivo, lo que permite afirmar que e-

xiste una constante positiva μ tal de tenerse

$$\frac{|J(u, v)|}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} \geq \mu, \quad \frac{|J(u, v)|}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} \geq \mu, \quad (\text{en } R) \quad (7)$$

Fijemos ahora un número positivo ε (con la única condición que sea $\varepsilon < \frac{1}{4} \mu$). Por la continuidad de los x_u, y_u, x_v, y_v en R podemos, en correspondencia con el ε fijado determinar un número positivo $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ tal que, fijado en R arbitrariamente un par de puntos (u, v) , $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ con $|\Delta u| < \sigma$, $|\Delta v| < \sigma$ resulte

$$x_u(u + \Delta u, v + \Delta v) - x_u(u, v) < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} \text{ y análogamente para } y_u, x_v, y_v. \quad (8)$$

Llamando α, β a las dimensiones de R podemos también suponer que sea $\sigma < \varepsilon$, $\sigma < \frac{\alpha}{2}$, $\sigma < \frac{\beta}{2}$. Observemos que, en virtud de estas dos últimas condiciones, ambos intervalos $\left[\frac{\alpha}{2\sigma}, \frac{\alpha}{\sigma}\right]$, $\left[\frac{\beta}{2\sigma}, \frac{\beta}{\sigma}\right]$ resultan tener longitud mayor que 1 y entonces es posible elegir en el interior de cada uno de ellos un número entero (positivo); utilizaremos la notación $m = m(\varepsilon)$, $n = n(\varepsilon)$ para indicar los números enteros respectivamente elegidos, con lo que se tendrá

$$\sigma < \frac{\alpha}{m} < 2\sigma, \quad \sigma < \frac{\beta}{n} < 2\sigma \quad (9)$$

Dividamos el intervalo R en mn intervalos iguales R_i , ($i = 1, 2, \dots, mn$) cada uno de dimensiones $\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{n}$. Si (u_i, v_i) indica el centro de R_i , y (x_i, y_i) el punto del plano xy que las (1) le hacen corresponder, podemos considerar, respecto de R_i la siguiente afinidad entre el plano uv y el plano xy :

$$\begin{cases} x - x_i = x_u(u_i, v_i) \cdot (u - u_i) + x_v(u_i, v_i) \cdot (v - v_i) \\ y - y_i = y_u(u_i, v_i) \cdot (u - u_i) + y_v(u_i, v_i) \cdot (v - v_i) \end{cases} \quad (*) \quad (10)$$

La transformación (1) le hace corresponder al R_i cierto dominio acotado R'_i del plano $xy^{(**)}$, mientras la afinidad (10) lo transforma en un paralelogramo R_i^* del mismo plano. Si dos puntos, P' de R'_i y P^* de R_i^* se consideran como correspondientes cuando provienen de un mismo punto P de R_i surge evidentemente una correspondencia biunívoca entre R'_i y R_i^* ; procuraremos obtener una acotación por exceso de la distancia entre dos puntos correspondientes P' y P^* .

Llamando (u, v) a las coordenadas de P , las de P' estarán dadas por las siguientes expresiones [obtenidas expresando los segundos miembros de las (1) mediante la fórmula de Taylor-Lagrange de punto inicial (u_i, v_i)]:

$$x_i + x_u(p', q')(u - u_i) + x_v(p', q')(v - v_i),$$

$$y_i + y_u(p'', q'')(u - u_i) + y_v(p'', q'')(v - v_i)$$

donde (p', q') , (p'', q'') son ciertos puntos del segmento que une (u_i, v_i) con (u, v) . Las coordenadas de P^* son, en cambio, según las (10)

$$x_i + x_u(u_i, v_i)(u - u_i) + x_v(u_i, v_i)(v - v_i),$$

$$y_i + y_u(u_i, v_i)(u - u_i) + y_v(u_i, v_i)(v - v_i).$$

(*) Estas fórmulas se obtienen a partir de las (1) sustituyendo las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ por las expresiones proporcionadas por la fórmula de Taylor interrumpida en los términos de primer orden. Puede decirse que esta afinidad es una aproximación de orden uno de la transformación (1) en el entorno del punto (u_i, v_i) .

(**) Ya sabíamos que las (1) transforman un campo C interior a B en un campo C' interior a A . Dejamos para el lector la demostración de que la misma también transforma $\mathcal{F}C$ en $\mathcal{F}C'$ y, por ende, al dominio $CU\mathcal{F}C$ en el dominio $C'U\mathcal{F}C'$ (resultando éste acotado si lo es el primero).

Como $P(u, v)$ pertenece a R_i , se tiene $|u - u_i| \leq \frac{\alpha}{2m}$,
 $|v - v_i| \leq \frac{\beta}{2n}$ y entonces, por las (9), $|u - u_i| < \sigma$, $|v - v_i| < \sigma$. Será también $|p' - u_i| < \sigma$, $|q' - v_i| < \sigma$, $|p'' - u_i| < \sigma$, $|q'' - v_i| < \sigma$ con lo que, por las (8), las diferencias entre las coordenadas homónimas de P' y P'' serán, en valor absoluto, ambas menores que $\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}\sigma + \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}\sigma = \frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{2}}$. Sigue $\overline{P'P^*} < \sqrt{\left(\frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}$, o sea,

$$\overline{P'P^*} < \epsilon\sigma \quad (11)$$

Como cuando P' describe la frontera de R_i^* , P^* describe la frontera

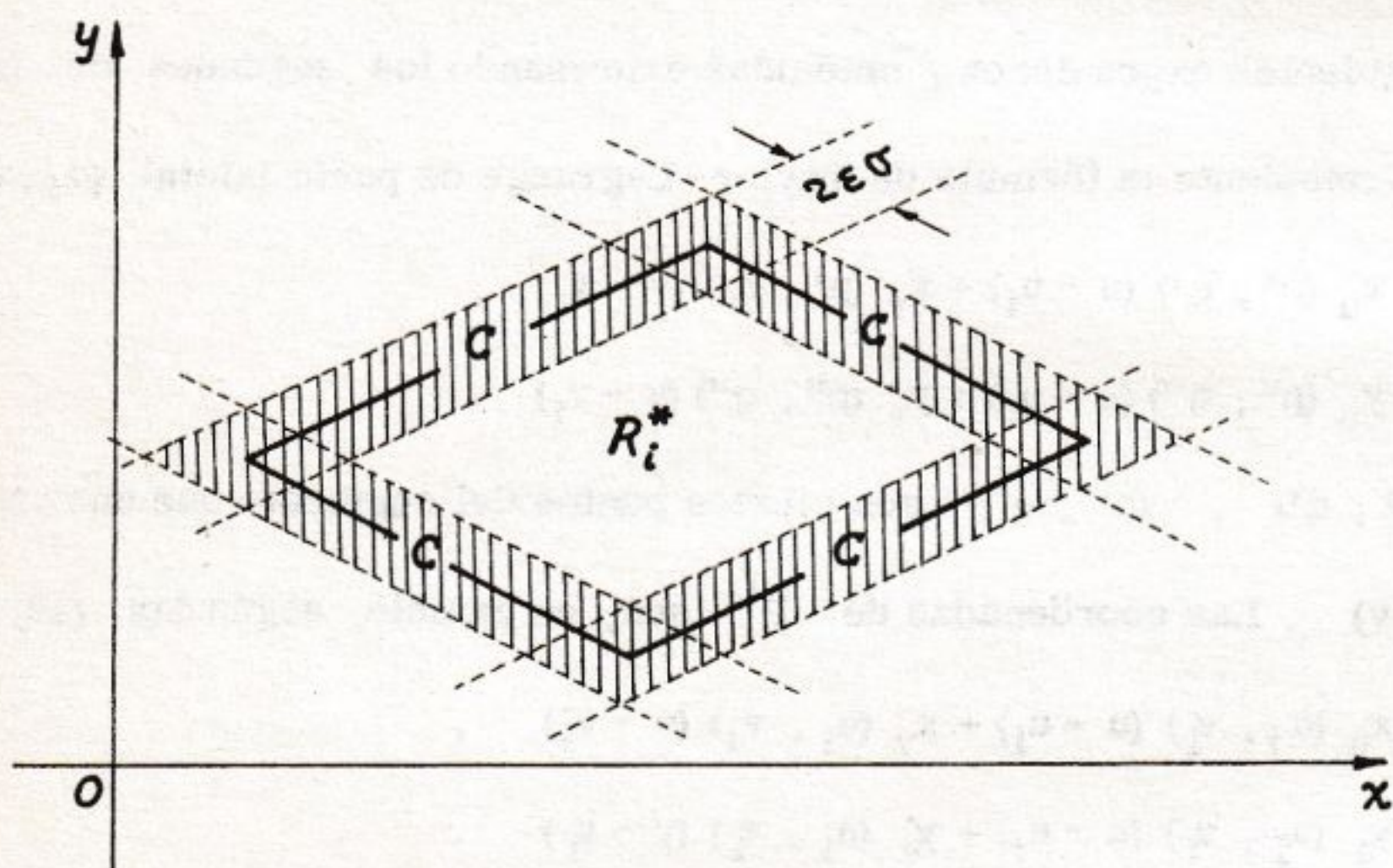


Fig. 57

de R_i^* , la (11) nos asegura que $\mathcal{F}R_i^*$ queda contenida en el "marco" C obtenido (*) trazando las rectas paralelas a los lados de $\mathcal{F}R_i^*$ con distancia

(*) Con esta construcción se logra efectivamente un "marco" puesto que las distancias de dos lados opuestos del paralelogramo R_i^* son [téngase presente las (3), (4), (10)]:

$$\frac{|J(u_i, v_i)|}{\sqrt{x_v^2(u_i, v_i) + y_v^2(u_i, v_i)}} \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{|J(u_i, v_i)|}{\sqrt{x_u^2(u_i, v_i) + y_u^2(u_i, v_i)}} \frac{\beta}{n},$$

$\epsilon \sigma$ (véase fig. 57):

$$\mathcal{F} R_i' \subset C \quad (12)$$

Tras obtener la (12) consideremos, junto a cada intervalo R_i , otros dos intervalos S_i , T_i que tengan el mismo centro (u_i, v_i) que R_i , y las dimensiones $(1 - \frac{4\epsilon}{\mu}) \frac{\alpha}{m}$, $(1 - \frac{4\epsilon}{\mu}) \frac{\beta}{n}$ (para S_i) y $(1 + \frac{4\epsilon}{\mu}) \frac{\alpha}{m}$, $(1 + \frac{4\epsilon}{\mu}) \frac{\beta}{n}$ (para T_i). El rectángulo S_i está contenido en R_i mientras que T_i contiene a R_i . Los dos rectángulos S_i , T_i son transformados, por la afinidad (10) en dos paralelogramos S_i^* , T_i^* y se tiene $S_i^* \subset R_i^* \subset T_i^*$

La distancia entre las dos fronteras $\mathcal{F} S_i^*$, $\mathcal{F} R_i^*$ es igual a la menor entre las distancias de dos lados paralelos correspondientes, distancias que valen [véanse las (6)]

$$\frac{|J(u_i, v_i)|}{\sqrt{x_v^2(u_i, v_i) + y_v^2(u_i, v_i)}} \cdot \frac{4\epsilon}{\mu} \cdot \frac{\alpha}{2m},$$

$$\frac{|J(u_i, v_i)|}{\sqrt{x_u^2(u_i, v_i) + y_u^2(u_i, v_i)}} \cdot \frac{4\epsilon}{\mu} \cdot \frac{\beta}{2n}$$

y que, por las (7), son respectivamente mayores que $\mu \frac{4\epsilon}{\mu} \cdot \frac{\alpha}{2m} = 2\epsilon \frac{\alpha}{m}$, $\mu \cdot \frac{4\epsilon}{\mu} \cdot \frac{\beta}{2n} = 2\epsilon \frac{\beta}{n}$ y, en consecuencia, por las (9), ambas mayores que $2\epsilon \sigma$. Otro tanto puede decirse para las fronteras de R_i^* , T_i^*

Esto demuestra que, si alrededor de la frontera de R_i^* se construye un "marco" Γ de doble ancho del antes considerado C , las fronteras de S_i^* y de T_i^* no penetran en Γ (la primera está en el "hueco" del "marco", la se

cantidades que, por las (7), (9) son ambas mayores que $\mu \sigma$ y, por ende, que $4\epsilon \sigma$ (recuérdese que se ha elegido $\epsilon < \frac{1}{4} \mu$). Por otra parte esto resultará implícitamente de la continuación de la demostración.

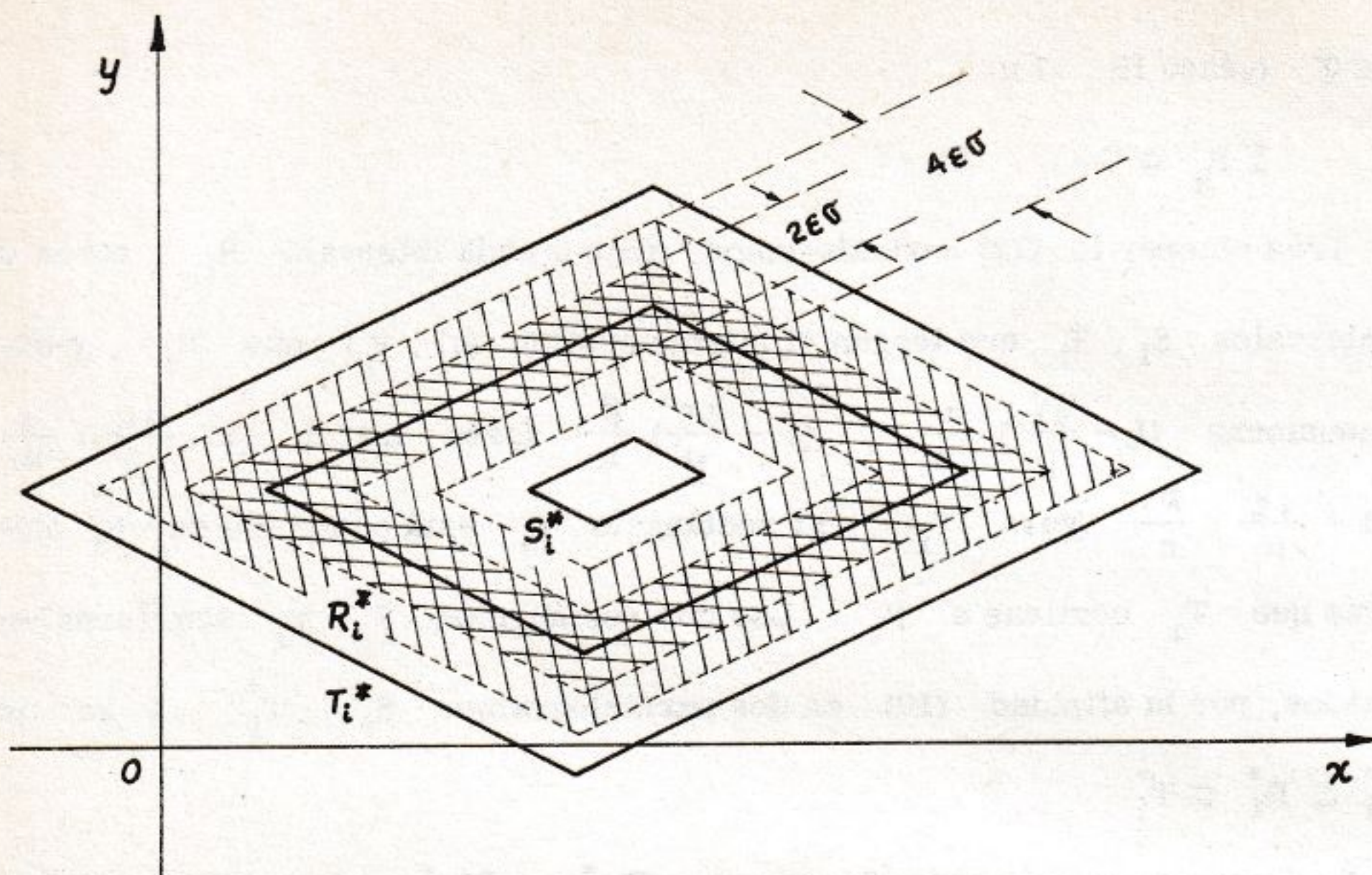


Fig. 58

gunda, "exterior" al mismo; véase fig. 58).

Reuniendo este hecho con el ya expresado por la (12) puede obviamente concluirse que $S_i^* \subset R_i^* \subset T_i^*$. Esto vale para todos los valores del índice i y entonces

$$\bigcup_{i=1}^{mn} S_i^* \subset R' \subset \bigcup_{i=1}^{mn} T_i^*$$

de donde, teniendo en cuenta que, por la (5), se tiene $\text{área } S_i^* = |J(u_i, v_i)|$ $\text{área } S_i = |J(u_i, v_i)| (1 - \frac{4\varepsilon}{\mu})^2 \text{área } R_i$ y, análogamente, $\text{área } T_i^* = |J(u_i, v_i)| (1 + \frac{4\varepsilon}{\mu})^2 \text{área } R_i$ (*):

$$(1 - \frac{4\varepsilon}{\mu})^2 \sum_{i=1}^{mn} |J(u_i, v_i)| \text{área } R_i \leq \text{área}_i R' \leq \text{área}_e R' \leq$$

(*) Téngase también en cuenta que los S_i^* no tienen, dos a dos, puntos comunes, por lo que,

$$\text{área } US_i^* = \sum \text{área } S_i^* ;$$

en cambio

$$\text{área } UT_i^* \leq \sum \text{área } T_i^* .$$

$$\leq \left(1 + \frac{4\varepsilon}{\mu}\right)^2 \sum_{i=1}^{mn} |J(u_i, v_i)| \text{ área } R_i \quad (13)$$

Hagamos tender ahora ε a cero. Recordando que $\sigma < \varepsilon$ resulta de las (9) que m, n tienden ambas a infinito. Entonces, las sumas que aparecen en el primer y el último miembro de (13) tienden ambas a la integral

$$\iint_R |J(u, v)| \, du \, dv. \text{ De la (13) sigue, entonces,}$$

$$\text{área}_i R' = \text{área}_e R' = \iint_R |J(u, v)| \, du \, dv,$$

que es lo que queríamos demostrar

78 - TRANSFORMACION DE LAS INTEGRALES DOBLES O TRIPLES EN COORDENADAS ELIPTICAS.

Comencemos por las integrales dobles recordando primero qué se entiende por coordenadas elípticas de un punto del plano.

Tomado el plano con referencia a coordenadas cartesianas ortogonales x, y , y fijados dos números positivos $a > b$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \quad (1)$$

representa, cuando el parámetro λ varía en $[-a^2, +\infty]$, la familia de las cónicas con centro (reales) que tienen los focos en los puntos $(\pm c, 0)$ con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Por cada punto (x, y) del plano pasan dos de estas cónicas y, precisamente, las que corresponden a los valores de λ que son raíces de la ecuación de 2º grado.

$$f(\lambda) \equiv (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) - x^2(b^2 + \lambda) - y^2(a^2 + \lambda) = 0 \quad (2)$$

Si se observa que $f(-a^2) = -x^2(b^2 - a^2) \geq 0$, $f(-b^2) = -y^2(a^2 - b^2) \leq 0$,

se llega fácilmente a la conclusión que tales raíces son siempre reales. La menor, λ_2 , cae en $[-a^2, -b^2]$; la mayor, λ_1 , en $[-b^2, +\infty]$ ambas coinciden (en $-b^2$) solamente si el punto (x, y) cae en uno de los focos citados.

A la raíz λ_2 le corresponde, en la familia (1), una hipérbola (degenerada si $\lambda_2 = -a^2$ o si $\lambda_2 = -b^2$); a la raíz λ_1 corresponde una elipse (degenerada si $\lambda_1 = -b^2$)

Estos dos números, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, bien determinados en correspondencia con el punto (x, y) se llaman las coordenadas elípticas de tal punto porque, como ahora veremos, individualizan, salvo simetrías respecto de los ejes coordenados, a dicho punto. En efecto; puesto que λ_1, λ_2 son raíces de la (2), vale la identidad

$$(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) - x^2(b^2 + \lambda) - y^2(a^2 + \lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

y si en ésta se pone, sucesivamente, $\lambda = -a^2$, $\lambda = -b^2$, se obtiene inmediatamente

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)}{a^2 - b^2}, \quad y^2 = \frac{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)}{b^2 - a^2} \quad (3)$$

Esto muestra precisamente que una vez fijados λ_1, λ_2 (con $\lambda_1 \geq -b^2$, $-b^2 \geq \lambda_2 \geq -a^2$) quedan determinados solamente los valores absolutos de x y de y .

Los λ_1, λ_2 pueden entonces servir como coordenadas efectivas solamente en un cuadrante prefijado del plano xy

Para salvar este inconveniente conviene observar que, siendo $\sqrt{\frac{a^2 + \lambda_1}{a^2 - b^2}} \geq 1$, existe un número bien determinado $u \geq 0$ tal que $\sqrt{\frac{a^2 + \lambda_1}{a^2 - b^2}} = \cosh u$;

introduciendo este u podrá escribirse

$$a^2 + \lambda_1 = (a^2 - b^2) \cosh^2 u, \quad b^2 + \lambda_1 = (a^2 - b^2) \sinh^2 u. \quad (4)$$

Análogamente, siendo $\sqrt{\frac{a^2 + \lambda_2}{a^2 - b^2}} \leq 1$, existen ángulos φ tales que

$$|\cos \varphi| = \sqrt{\frac{a^2 + \lambda_2}{a^2 - b^2}} \text{ pudiendo elegir } \varphi \text{ de modo que sea } 0 \leq \varphi < 2\pi$$

y que $\cos \varphi$ tenga el signo de x , mientras que $\sin \varphi$ tenga el de y .

Utilizando este ángulo φ podrá escribirse

$$a^2 + \lambda_2 = (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi, \quad b^2 + \lambda_2 = (b^2 - a^2) \sin^2 \varphi. \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en las (3) se obtiene $x^2 = c^2 \cosh^2 u \cos^2 \varphi$, $y^2 = c^2 \sinh^2 u \sin^2 \varphi$ y entonces, recordando la convención hecha sobre los signos de $\cos \varphi$ y $\sin \varphi$:

$$x = c \cosh u \cos \varphi, \quad y = c \sinh u \sin \varphi, \quad (u \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (6)$$

Con la introducción de estas nuevas coordenadas elípticas u, φ se obtiene la correspondencia biunívoca entre (x, y) y (u, φ) .

Las curvas $u = \text{cte.}$ (o $\lambda_1 = \text{cte.}$) son las elipses

$$\frac{x^2}{(c \cosh u)^2} + \frac{y^2}{(c \sinh u)^2} = 1$$

y las $\varphi = \text{cte.}$ (o $\lambda_2 = \text{cte.}$) son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{(c \cos \varphi)^2} - \frac{y^2}{(c \sin \varphi)^2} = 1;$$

tales elipses e hipérbolas pertenecen a la familia (1) y es fácil demostrar que se cortan según ángulos rectos.

En algunos problemas es conveniente usar las coordenadas elípticas bajo una

tercer forma, sustituyendo la coordenada u por el número φ definido por

$$\varphi = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} e^u. \text{ Se encuentra así que las (6) se modifican como sigue}$$

$$x = \left(\frac{a+b}{2} \varphi + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{\varphi} \right) \cos \varphi, \quad y = \left(\frac{a+b}{2} \varphi - \frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{\varphi} \right) \sin \varphi,$$

$$\left(\varphi \geq \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right); \quad (7)$$

bajo esta forma las coordenadas elípticas φ, φ aparecen como una extensión de las coordenadas polares [en el caso límite $b = a = 1$, las (7) toman la forma $x = \varphi \cos \varphi, \quad y = \varphi \sin \varphi$]

En la transformación de las integrales dobles las fórmulas más cómodas son las (6); se encuentra

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, \varphi)} = c^2 (\cosh^2 u - \cos^2 \varphi) = c^2 (\sinh^2 u + \sin^2 \varphi)$$

teniéndose, en consecuencia,

$$\iint_{T'} f(x, y) dx dy =$$

$$= c^2 \iint_T f(c \cosh u \cos \varphi, c \sinh u \sin \varphi) (\cosh^2 u - \cos^2 \varphi) du d\varphi,$$

donde T, T' son dominios que se corresponden en los dos planos u, φ y xy

* * *

Análogamente puede procederse en el espacio, considerando el sistema de cuádricas homofocales representado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad (a > b > c > 0) \quad (8)$$

y asociando a cada punto (x, y, z) las tres raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [con $\lambda_1 \geq -c^2$, $-c^2 \geq \lambda_2 \geq -b^2$, $-b^2 \geq \lambda_3 \geq -a^2$] de la ecuación de 3^{er} grado

$$f(\lambda) \equiv (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) - x^2(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) - y^2(c^2 + \lambda)(a^2 + \lambda) - z^2(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) = 0$$

Con idéntico procedimiento al usado en el caso del plano se encuentran las fórmulas

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)(a^2 + \lambda_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 = \frac{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_3)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \\ z^2 = \frac{(c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}, \end{array} \right. \quad (9)$$

que individualizan solamente los valores absolutos x, y, z .

Se ve después que es posible introducir, en lugar de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tres nuevas coordenadas u, θ, φ poniendo:

$$\frac{a^2 + \lambda_1}{a^2 - c^2} = \cosh^2 u, \quad \frac{b^2 + \lambda_2}{b^2 - c^2} = \sen^2 \theta, \quad \frac{a^2 + \lambda_3}{a^2 - b^2} = \cos^2 \varphi,$$

lo que transforma a las (9) en las

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cosh u \cdot \sqrt{(a^2 - c^2) - (b^2 - c^2) \cos^2 \theta} \cdot \cos \varphi, \\ y = \sqrt{(b^2 - c^2) \cosh^2 u + (a^2 - b^2) \sen^2 u} \cdot \sen \theta \cdot \sen \varphi, \\ z = \senh u \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{(a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$(u \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Las superficies $u = \text{cte.}$, $\theta = \text{cte.}$, $\varphi = \text{cte.}$ son, respectivamente:

$$\frac{x^2}{(a^2 - c^2) \cosh^2 u} + \frac{y^2}{(b^2 - c^2) \cosh^2 u + (a^2 - b^2) \sinh^2 u} + \frac{z^2}{(a^2 - c^2) \sinh^2 u} = 1 ,$$

(elipsoides) ,

$$\frac{x^2}{(a^2 - c^2) - (b^2 - c^2) \cos^2 \theta} + \frac{y^2}{(b^2 - c^2) \sin^2 \theta} - \frac{z^2}{(b^2 - c^2) \cos^2 \theta} = 1 ,$$

(hiperbolides de una hoja) ,

$$\frac{x^2}{(a^2 - b^2) \cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{(a^2 - b^2) \sin^2 \varphi} - \frac{z^2}{(a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi} = 1 ,$$

(hiperbolides de dos hojas) .

Se trata, naturalmente, de cuádricas de la familia (8) .

En lugar de la coordenada u se puede también introducir otra, φ , poniendo $\varphi = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} \cdot e^u$. En este caso las (10) se transforman en

$$\left\{ \begin{array}{l} x = p(\varphi) \sqrt{1 - h^2 \cos^2 \theta} \cos \varphi , \\ y = \sqrt{h^2 p^2(\varphi) + k^2 q^2(\varphi)} \sin \theta \sin \varphi , \\ z = q(\varphi) \cos \theta \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} , \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left(\varphi \geq \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} , \quad 0 \leq \theta \leq \pi , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \right) ,$$

donde, por brevedad, se ha puesto

$$p(\varphi) = \frac{a+c}{2} \varphi + \frac{a-c}{2} \frac{1}{\varphi} , \quad q(\varphi) = \frac{a+c}{2} \varphi - \frac{a-c}{2} \frac{1}{\varphi} ,$$

$$h^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} , \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} , \quad (h^2 + k^2 = 1) .$$

Las (11) permiten considerar a las coordenadas elípticas φ , θ , φ como una extensión de las polares; en efecto, pasando al límite primero para $b \rightarrow a$

y, sucesivamente, para $c \rightarrow a = 1$ se obtiene $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$

En las transformaciones de las integrales triples las fórmulas más cómodas son las (10). El cálculo del jacobiano lleva al siguiente resultado

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, \theta, \varphi)} = \frac{[(a^2 - c^2) \sinh^2 u + (b^2 - c^2) \cos^2 \theta] [(a^2 - c^2) \cosh^2 u - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi] [(b^2 - c^2) \sin^2 \theta + (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi]}{\sqrt{(b^2 - c^2) \cosh^2 u + (a^2 - b^2) \sinh^2 u} \sqrt{(a^2 - c^2) - (b^2 - c^2) \cos^2 \theta} \sqrt{(a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}}$$

por lo que se tiene.....

79 - NOCIONES SOBRE LA INTEGRAL DE RIEMANN.

Deseamos exponer brevemente el concepto de integral de Riemann, que vale también para funciones no continuas. Esta integral tiene ahora sólo una importancia histórica, ya que ha sido sustituida por el concepto de integral de Lebesgue (ver Cap. XXV, ej. 50)

Sea A un dominio acotado y medible del espacio S_r y $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ una función real definida y acotada en A ; existirá, entonces, un número $H \geq 0$ tal que

$$|f(P)| \leq H, \quad \text{para } P \in A \quad (1)$$

Realicemos una descomposición \mathcal{D} de A en un número arbitrario n de dominios parciales medibles T_1, T_2, \dots, T_n . Indiquemos con λ_i y Λ_i al extremo inferior y al extremo superior, respectivamente, de la $f(P)$ en T_i . En virtud de la (1) tales extremos resultarán ambos finitos y podemos, entonces, calcular las dos sumas

$$\begin{aligned}
 s &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ med } T_i \\
 S &= \sum_{i=1}^n \wedge_i \text{ med } T_i
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Si se consideran todas las descomposiciones posibles \mathcal{D} del dominio A y en correspondencia a cada una de ellas se calculan las dos sumas s y S , se obtendrán dos clases de números $\{s\}$, $\{S\}$ que, en general, no resultarán contiguas.^(*)

Por definición, el extremo inferior de la clase $\{S\}$ y el extremo superior de la clase $\{s\}$ se denominan la integral superior de Riemann y la integral inferior de Riemann, respectivamente, de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ extendida sobre el dominio A .

Una vez indicadas tales integrales con $\int_A'' f(P) dT$ y $\int_A' f(P) dT$, respectivamente, si ambos valores coincidiesen (o sea, si las clases $\{s\}$ y $\{S\}$ fuesen contiguas) se dirá que la $f(P)$ es integrable según Riemann en A , y el valor común de las dos integrales se denomina integral de Riemann de la $f(P)$ extendida sobre el dominio A y se indicará con el símbolo habitual $\int_A f(P) dT$.

Las funciones $f(P)$ continuas en dominios acotados y medibles proporcionan un ejemplo de funciones integrables según Riemann.

Demostrar que, indicando con δ la norma de la descomposición genérica \mathcal{D} del dominio A , resulta:

(*) Con el mismo razonamiento hecho en "Lecciones", Cap. XXI, n. 5, se prueba que cada suma s no supera a ninguna suma S .

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s = \int_A' f(P) dT$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S = \int_A'' f(P) dT$$

80 - Demostrar que toda función $f(x)$ [de una sola variable], acotada y monótona en un intervalo acotado $[a, b]$, es integrable según Riemann en dicho intervalo.

Supongamos, por ejemplo, que $f(x)$ sea no decreciente. Descompuesto el intervalo $[a, b]$ en intervalos parciales mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, en el intervalo genérico $[x_{i-1}, x_i]$ los extremos inferior y superior de la $f(x)$ coinciden, respectivamente, con $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$.

Se tiene, por lo tanto,

$$S - s = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] (x_i - x_{i-1})$$

y entonces, llamando δ a la máxima amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$:

$$0 \leq S - s \leq \delta \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta [f(b) - f(a)]$$

Sigue $\lim_{\delta \rightarrow 0} (S - s) = 0$, o sea la tesis.

81 - Demostrar que la función de Dirichlet definida por

$$f(x) \begin{cases} = 0 & , \text{ si } x \text{ es racional} , \\ = 1 & , \text{ si } x \text{ es irracional} , \end{cases}$$

no es integrable según Riemann en ningún intervalo acotado $[a, b]$

En efecto; de cualquier modo que se descomponga $[a, b]$ en intervalos parciales, en cada uno de éstos, el extremo inferior de la $f(x)$ vale siempre cero y el extremo superior siempre 1. Sigue que siempre es $S = b - a$, $s = 0$ y, por ende, la integral superior vale $b - a$ y la inferior vale 0.

82 - Demostrar que la función $f(x)$ definida por

$$f(x) \begin{cases} = 0 & (\text{si } x \text{ es irracional}) \\ = \frac{1}{q} & (\text{si } x \text{ es racional} = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \text{ enteros primos entre sí, } q > 0), \end{cases}$$

es integrable según Riemann en el intervalo $[0, 1]$ y que la integral correspondiente vale cero.

Como en el ej. precedente se ve que se tiene siempre $s = 0$, por lo que la integral inferior vale cero. Para probar la tesis se debe entonces hacer ver que también la integral superior vale cero, o sea, que $\lim_{\delta \rightarrow 0} S = 0$. Inclusive será suficiente probarlo para una particular sucesión de descomposiciones \mathcal{D} (con $\delta \rightarrow 0$).

Siendo n un entero positivo dividamos el intervalo $[0, 1]$ en $N = n(n-1) + 1 = 1 + 2 + \dots + (n-1)$ partes iguales y construyamos la suma S correspondiente, que indicaremos con S_n . Se tiene $S_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda_i$, donde Λ_i designa el extremo superior de $f(x)$ en el i -ésimo intervalo parcial; queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y que las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$, interiores del $[0, 1]$, son, como máximo, $q - 1$, vemos que en $[0, 1]$ hay un solo punto donde $f(x) = 1$ y, como máximo, $q - 1$ puntos donde $f(x) = \frac{1}{q}$, ($q = 2, 3, \dots$). Por lo tanto, entre los citados extremos superiores Λ_i , existirá uno igual a 1, existirán a lo sumo $2i$

guales a $\frac{1}{2}$, a lo sumo 4 iguales a $\frac{1}{3}$, a lo sumo 6 iguales a $\frac{1}{4}$, ..., a lo sumo $2(n-1)$ iguales a $\frac{1}{n}$ (*). Entonces, si buscamos los intervalos parciales para los que $\wedge_i = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, serán, en total, $< 1 + 2 \left[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \right]$, es decir, $< N$ y, en los intervalos restantes, será ciertamente $\wedge_i < \frac{1}{n}$. Sigue que

$$\begin{aligned} S_n &\leq \frac{1}{N} \left[1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2(n-1) \frac{1}{n} \right] = \\ &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{2n-1}{N} - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} = \frac{2n+1}{N} - \frac{2}{N} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Para $n \rightarrow \infty$ la fracción $\frac{2n+1}{N}$ tiende a cero porque el numerador es un infinito del 1^{er} orden y el denominador del segundo. También el otro término no tiende a cero porque sabemos que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + O(1)$ (ver "Ejercicios", Cap. IV, ej. 10), de donde sigue la tesis.

83 - TEOREMA DE LEBESGUE-VITALI.

La $f(x)$ considerada en el ej. precedente es continua en todos los puntos x irracionales y discontinua en los puntos racionales (ver "Ejercicios", Cap. VII, ej. 15). Sus puntos singulares forman, entonces, un conjunto numerable que, de acuerdo a lo dicho en el ej. 16 del Cap. XX, resulta de medida nula según Lebesgue. El hecho que tal $f(x)$ sea integrable según Riemann cae dentro de un teorema general, llamado de Lebesgue-Vitali, que nos limitaremos a enunciar:

Condición necesaria y suficiente para que una función acotada $f(P)$ sea integrable según Riemann, en un dominio a

(*) Para explicar el factor 2 téngase en cuenta que un punto $\frac{p}{q}$ puede pertenecer a dos intervalos parciales (cuando es extremo común de los mismos).

cotado y medible (según Jordan) es que el conjunto de sus puntos singulares sea de medida nula (según Lebesgue).

Esto explica también por qué la función de Dirichlet no es integrable.

CAPITULO XXIII

Integración de las formas diferenciales lineales
e integrales curvilíneas1 - INTEGRALES CURVILINEAS DE FORMAS DIFERENCIA —
LES LINEALES: (cfr. "Lecciones", Cap. XXIII, n^o 2)

Calcular la siguiente integral curvilínea:

$$I = \int_{\gamma(P,Q)} (ye^x dx + e^y \cos x dy)$$

donde γ es el arco de la curva $y = \cos x$ que tiene por extremos los puntos $P(0,1)$, $Q(\frac{\pi}{2}, 0)$

Como parámetro sobre γ podemos adoptar la misma x y entonces se obtiene, inmediatamente

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (\cos x \cdot e^x - e^{\cos x} \cos x \sin x) dx = \dots = \\ &= \left[\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) - e^{\cos x} (1 - \cos x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} e^{\pi/2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2 - Calcular la integral curvilínea $\int_{\gamma(P,Q)} \frac{x}{y^3} dy$, siendo γ

el arco de curva $y=e^x$ que tiene por extremos los puntos P, Q de abscisas respectivas $\frac{1}{2}, 0$

Procediendo como en el ej. precedente se encuentra que la integral conside -

rada vale

$$\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{x}{e^{3x}} e^x dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-2x} dx = \dots = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) .$$

3 - Calcular la integral curvilínea

$$I = \int_{\gamma(P,Q)} (y dx + xy dy + xyz dz)$$

donde γ es el arco de cúbica alabeada $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ con extremos sobre los puntos $P(0,0,0)$, $Q(1,1,1)$.

Se tiene

$$I = \int_0^1 (t^2 + t^3 \cdot 2t + t^6 \cdot 3t^2) dt = \dots = \frac{16}{15} .$$

4 - Calcular la integral curvilínea $I = \int_{\gamma(P,Q)} \frac{dx}{y} + x dy$ donde

γ es el arco de cicloide $x=t - \sin t$, $y=1 - \cos t$ con extremos en los puntos $P(0,0)$, $Q(2\pi,0)$.

El lector encontrará sin dificultad $I = -\pi$.

5 - INTEGRACION DE DIFERENCIALES EXACTOS (ver "Lecciones", Cap. XXIII, n° 3).

Estudiar si la siguiente forma diferencial lineal

$$x(16x^2 - 15xy + 2) dx + (3y^2 - 5x^3) dy \quad (1)$$

es o no un diferencial exacto y, en caso afirmativo, calcular su integral.

Indiquemos brevemente con $X dx + Y dy$ la forma (1) y observemos que X , Y son funciones continuas, junto con sus derivadas primeras en todo el plano

xy . Se tiene $\frac{\partial X}{\partial y} = -15x^2$, $\frac{\partial Y}{\partial x} = -15x^2$ quedando entonces satisfecha la condición necesaria para que (1) sea un diferencial exacto; en este caso tal condición es también suficiente (ya que se verifica en todo el plano).

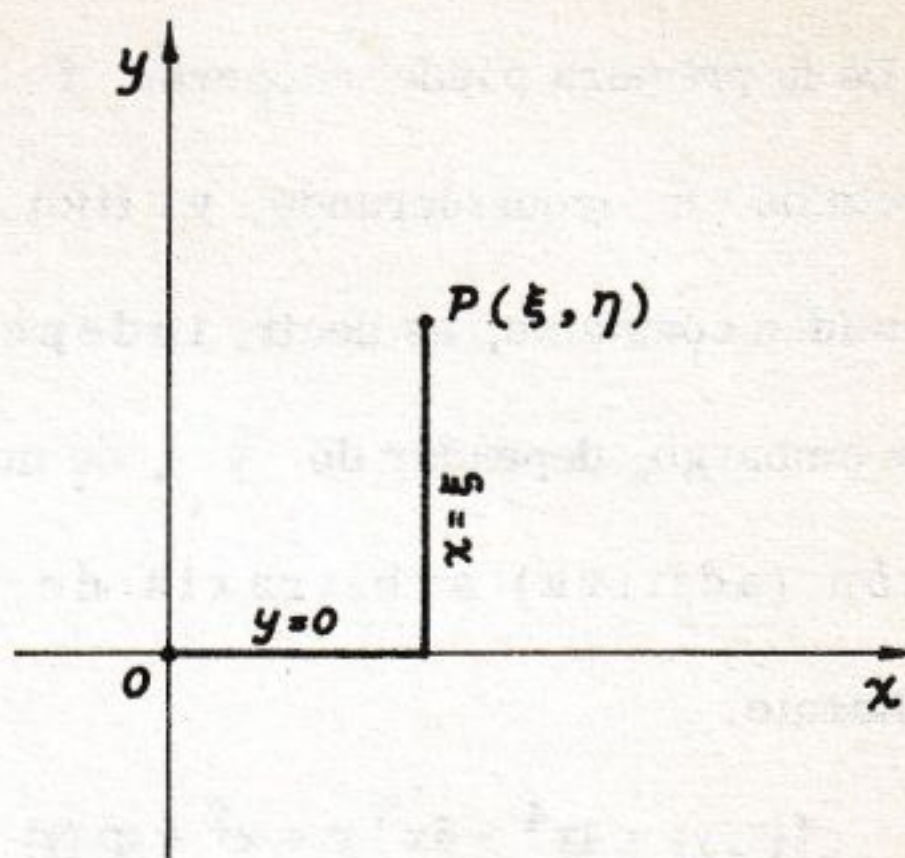


Fig. 59

Para el cálculo de la integral $f(x, y)$ puede seguirse el método indicado en "Lecciones", Cap. XXIII, n° 3, calculando la integral curvilínea de la forma (1) extendida a una poligonal de dos lados, paralelos al eje x y al eje y , respectivamente, que una un punto fijo, arbitrariamente elegido (por ej. el origen O) con un punto genérico $P(\xi, \eta)$. Se obtiene, entonces, salvo una constante aditiva:

$$f(\xi, \eta) = \int_{\gamma(O, P)} X dx + Y dy = \int_0^\xi x(16x^2 + 2) dx + \int_0^\eta (3y^2 - 5\xi^3) dy =$$

$$= \left[4x^4 + x^2 \right]_{x=0}^{x=\xi} + \left[y^3 - 5\xi^3 y \right]_{y=0}^{y=\eta} = 4\xi^4 + \xi^2 + \eta^3 - 5\xi^3 \eta$$

con lo que la integral buscada toma la expresión

$$f(x, y) = 4x^4 - 5x^3 y + y^3 + x^2 + c \quad (2)$$

Se habría podido proceder de otro modo (sin hacer intervenir integrales curvilíneas) razonando como sigue:

La integral buscada debe ser tal de satisfacer las dos ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x(16x^2 - 15xy + 2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 5x^3 \quad (3).$$

De la primera puede obtenerse f efectuando una integración indefinida respecto de x (considerando y fijo). Con esto se obtiene f a menos de una cantidad constante, es decir, independiente de x ; tal cantidad puede sin embargo, depender de y , de modo que se obtiene f salvo una función (aditiva) arbitraria de la y . En nuestro caso se encuentra fácilmente.

$$f(x, y) = 4x^4 - 5x^3 y + x^2 + \varphi(y) \quad , \quad (4)$$

quedando por determinar la $\varphi(y)$ de modo que se verifique también la segunda de las (3). Es necesario admitir que la $\varphi(y)$ sea derivable; entonces, de la (4) se obtiene $\frac{\partial f}{\partial y} = -5x^3 + \varphi'(y)$ y, sustituyendo en la segunda de las (3) se ve que debe ser $-5x^3 + \varphi'(y) = 3y^2 - 5x^3$, o sea, $\varphi'(y) = 3y^2$, y sucesivamente, $\varphi(y) = y^3 + c$. Sustituyendo en (4) se obtiene nuevamente la (2).

6 - Estudiar si la siguiente forma diferencial lineal

$$(2x \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x) dx + (x^2 \cos y - 2y \cos x) dy \quad (1)$$

es o no un diferencial exacto y, en caso afirmativo, calcular su integral.

Indicada la (1) con $X dx + Y dy$ se tiene en todo el plano

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2x \cos y + 2y \operatorname{sen} x \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 2x \cos y + 2y \operatorname{sen} x$$

y entonces la forma es un diferencial exacto. Usando el primero o el segundo de los métodos expuestos en el ej. precedente, se encuentra que la integral de la (1) es

$$x^2 \operatorname{sen} y - y^2 \cos x + c \quad .$$

7 - Estudiar la integración de la forma diferencial lineal

$$y \left(\log \frac{y}{x} - 1 \right) dx + x \left(\log \frac{y}{x} + 1 \right) dy \quad (1)$$

El problema de la integración de la forma (1) puede ser planteado en un intervalo arbitrario A que no tenga puntos comunes con los ejes coordenados y que esté contenido en el 1^{er} o en el 3^{er} cuadrante.

Se verifica de inmediato que queda satisfecha la $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ y entonces la (1) es un diferencial exacto en A . Procediendo con uno de los dos métodos vistos en el ej. 5 se encuentra que la integral de la (1) está dada por

$$xy \log \frac{y}{x} + c$$

8 - Estudiar la integración de la forma diferencial lineal

$$\left(\log y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy \quad (1)$$

El problema puede ser encarado en cualquier intervalo A contenido en el semiplano $y > 0$.

Se encuentra $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, por lo que la (1) es un diferencial exacto en A . Procediendo con uno cualquiera de los métodos vistos en el ej. 5, se encuentra que su integral es:

$$x \log y + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c$$

9 - Estudiar la integración de la forma diferencial lineal

$$(3x^2 + y^2 + 2xz^2) dx + 2y(x + z) dy + (x^2 + y^2 + 2x^2 z) dz \quad (1)$$

El problema de la integración de la (1), que indicaremos brevemente con $X dx + Y dy + Z dz$, puede ser encarado en todo el espacio.

Se tiene

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = 2x + 4xz,$$

y entonces la (1) es un diferencial exacto. Para determinar su integral

$f(x, y, z)$ se puede calcular la integral

curvilínea de la (1) sobre una poligonal

de tres lados, paralelos ordenadamen -

te al eje x , al eje y y al eje z ,

que una un punto fijo, arbitrariamente e -

legido (p. ej. el origen O) con un pun -

to genérico $P(\xi, \eta, \zeta)$. Se obtiene

de tal modo, salvo una constante aditiva:

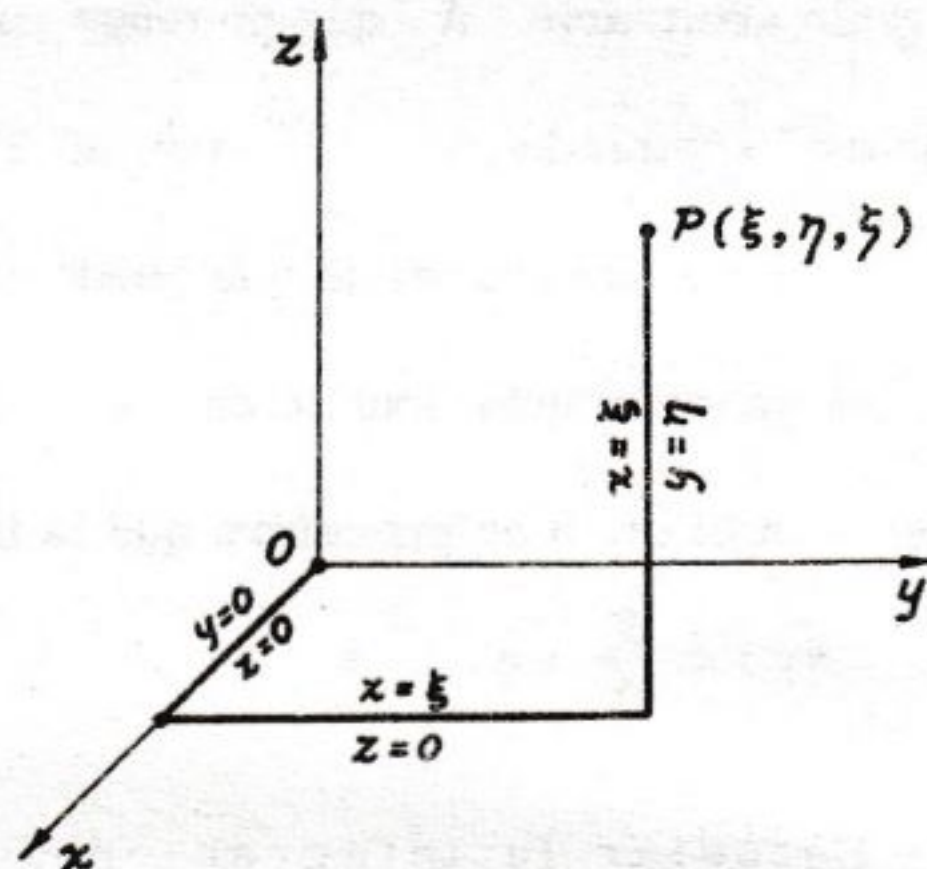


Fig. 60

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{\gamma(O, P)} X dx + Y dy + Z dz = \int_0^\xi 3x^2 dx + \int_0^\eta 2y\xi dy + \int_0^\zeta (\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 z) dz = \\ &= \left[x^3 \right]_{x=0}^{x=\xi} + \left[\xi y^2 \right]_{y=0}^{y=\eta} + \left[(\xi^2 + \eta^2) z + \xi^2 z^2 \right]_{z=0}^{z=\zeta} = \xi^3 + \xi \eta^2 + (\xi^2 + \eta^2) \zeta + \xi^2 \zeta^2, \end{aligned}$$

con lo que la integral buscada está expresada por

$$f(x, y, z) = (x + z)(x^2 + y^2) + x^2 z^2 + c \quad (2)$$

También se habría podido proceder de otro modo con un razonamiento análogo al hecho en el ej. 5. Se trata de determinar una función $f(x, y, z)$ que satisfaga las tres ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 2xz + 2xz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x + z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + y^2 + 2x^2 z. \quad (3)$$

De la primera se obtiene, integrando respecto de x :

$$f = x^3 + xy^2 + x^2 z + x^2 z^2 + \varphi(y, z) \quad (4)$$

donde $\varphi(y, z)$ indica una función arbitraria solamente de las variables y y z .

De la (4) sigue $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + 2x^2 z + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ y, sustituyendo en la segunda y en la tercera de las (3) se obtiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yz, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^2 \quad (5)$$

De la primera de éstas resulta $\varphi(y, z) = y^2 z + \psi(z)$, con $\psi(z)$ función arbitraria de z . Sigue $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y^2 + \psi'(z)$ y, sustituyendo en la segunda de las (5) $\psi'(z) = 0$, o sea, $\psi(z) = c$. Se tiene, entonces, $\varphi(y, z) = y^2 z + c$, con lo que la (4) nos permite reencontrar la expresión (2) de la $f(x, y, z)$.

10 - Estudiar la integración de la forma diferencial lineal

$$\begin{aligned} & [\sin(x+y) - \sin x \cdot \sin z] dx + [\sin(x+y) - \cos(y-z)] dy + \\ & + [\cos x \cos z + \cos(y-z)] dz \end{aligned}$$

El problema de la integración puede plantearse en todo el espacio.

Como resultan $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$, la forma es un diferencial exacto. Su integral puede quedar determinada con el 1º o el 2º de los métodos expuestos en el ej. precedente y se encuentra

$$f(x, y, z) = -\cos(x+y) + \cos x \sin z - \sin(y-z) + c$$

11 - Estudiar la integración de la forma diferencial lineal

$$(x^3 + 3x^2 y - 2xyz) dx + (x^3 - x^2 z + 3y^2 z) dy + (-x^2 y + y^3 - z^3) dz$$

El problema de la integración se puede plantear en todo el espacio

Quedan satisfechas las $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, etc., y entonces la forma es un diferencial exacto.

Se verifica fácilmente que su integral es

$$\frac{1}{4}(x^4 - z^4) + x^3 y - x^2 yz + y^3 z,$$

salvo una constante aditiva arbitraria.

12 - Considérense nuevamente los diferenciales exactos indicados en los ej. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y obténganse sus respectivas integrales mediante integraciones de dichas formas a lo largo del segmento (u otras curvas regulares, elegidas a gusto) que une un punto fijo con un punto variable.

Refiriéndonos, por ejemplo, a la forma $X dx + Y dy$ definida por la (1) del ej. 5 y considerando el segmento s que une el origen con el punto genérico $P(\xi, \eta)$ [cuyas ecuaciones son $x = \xi t$, $y = \eta t$, $0 \leq t \leq 1$] se tiene, salvo una constante aditiva arbitraria

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= \int_{s(0,P)} X dx + Y dy = \int_0^1 [\xi t (16\xi^2 t^2 - 15\xi\eta t^2 + 2) \cdot \xi dt + (3\eta^2 t^2 - 5\xi^3 t^3) \cdot \eta dt] = \\ &= [4\xi^4 t^4 - 5\xi^3 \eta t^4 + \xi^2 t^2 + \eta^3 t^3]_0^1 = 4\xi^4 - 5\xi^3 \eta + \xi^2 + \eta^3 \end{aligned}$$

13 - Estudiar la integración de las siguientes formas diferenciales lineales:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy \quad (1)$$

$$\frac{dx + dy}{z^2} - 2 \frac{x + y}{z^3} dz, \quad (2)$$

$$\frac{x^2 \cos y + yz \cos z}{x^2 z} dx - \frac{x^2 \operatorname{sen} y + z \cos z}{xz} dy - \frac{x^2 \cos y - yz^2 \operatorname{sen} z}{x z^2} dz \quad (3)$$

14 - Dada la forma diferencial lineal

$$[\psi(y) - y \cos x] dx + [x \cos y - \varphi(x)] dy, \quad (1)$$

determinar las funciones $\varphi(x)$, $\psi(y)$ de modo que la forma resulte un diferencial exacto (en todo el plano xy) y que se tenga $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi(0) = 0$. Dar, además, la expresión de la integral de la forma así obtenida.

La condición necesaria (y, en este caso, también suficiente) para que la (1) sea integrable es que resulte idénticamente

$$\frac{\partial}{\partial y} [\psi(y) - y \cos x] = \frac{\partial}{\partial x} [x \cos y - \varphi(x)]$$

vale decir,

$$\varphi'(x) - \cos x = \cos y - \psi'(y).$$

Esta identidad entre una función de solamente la x y una función de solamente la y es posible en el único caso que ambos miembros sean constantes. Debe, entonces, existir una constante c tal de resultar

$$\varphi'(x) - \cos x = \cos y - \psi'(y) = c$$

de donde

$$\varphi'(x) = \cos x + c, \quad \psi'(y) = \cos y - c$$

y, sucesivamente,

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} x + c x + a, \quad \psi(y) = \operatorname{sen} y - c y + b,$$

con a, b constantes arbitrarias.

Las condiciones $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ dan, después, $a = 0$, $b = 0$, $c = -1$ por lo que, en definitiva se tiene

$$\varphi(x) = \sin x - x, \quad \psi(y) = \sin y + y,$$

con lo que la (1) resulta

$$(y + \sin y - y \cos x) dx + (x - \sin x + x \cos y) dy \quad (1')$$

Tras esto, con los métodos habituales, es fácil establecer que la integral de la (1') es

$$xy + x \sin y - y \sin x + k,$$

con k constante arbitraria (*).

15 - INTEGRALES CURVILINEAS DE FUNCIONES (ver "Lecciones", Cap. XXIII, n° 6)

Calcular la integral curvilínea

$$\int_{\gamma(P,Q)} (x + y - 1) ds,$$

donde γ denota el cuarto de circunferencia definido por $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; P es el punto $(0,1)$, Q el punto $(1,0)$ y el arco s se supone contado positivamente en el sentido antihorario.

Introduciendo como parámetro sobre γ la anomalía φ se obtienen las ecuaciones paramétricas $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$; por otra parte se tiene $ds = + d\varphi$ (porque s es función creciente de φ) mientras el punto P corresponde a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, el punto Q a $\varphi = 0$. La integral buscada es entonces igual a

(*) Otros ejercicios pueden verse en Cap. XXIV, ej. 12, 13.

$$\int_{\pi/2}^0 (\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi - 1) d\varphi = \left[\operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi - \varphi \right]_{\pi/2}^0 = -2 + \frac{\pi}{2} .$$

16 - Calcular la integral curvilínea

$$I = \int_{\gamma(P,Q)} (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

donde γ es aquel arco de hélice circular $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, $z = kt$ que tiene por extremos los puntos $P(r, 0, 0)$, $Q(-r, 0, k\pi)$ y el arco s se supone contado positivamente en el sentido de las t crecientes.

Se tiene $ds = + \sqrt{r^2 + k^2} dt$, mientras los puntos P, Q corresponden a $t = 0$, $t = \pi$, respectivamente. Se deduce

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (r^2 + k^2 t^2) \sqrt{r^2 + k^2} dt = \sqrt{r^2 + k^2} \left[r^2 t + \frac{1}{3} k^2 t^3 \right]_0^\pi = \\ &= \pi \sqrt{r^2 + k^2} \left(r^2 + \frac{1}{3} \pi^2 k^2 \right) . \end{aligned}$$

17 - Calcular la integral curvilínea $I = \int_{\gamma(O,A)} x ds$ donde γ es

la semicircunferencia definida por $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, $x \geq 0$; los puntos O, A tienen las coordenadas $(0, 0)$, $(0, 2r)$ y el arco s se supone contado positivamente en el sentido horario.

Eligiendo como parámetro sobre γ la anomalía φ , se deducen para γ las ecuaciones paramétricas $x = r \operatorname{sen} 2\varphi$, $y = 2r \operatorname{sen}^2 \varphi$, correspondiendo O a $\varphi = 0$ mientras que A a $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Después se tiene $ds = -2r d\varphi$ (ya que s es función decreciente de φ) y, en consecuencia,

$$I = - \int_0^{\pi/2} r \operatorname{sen} 2\varphi \cdot 2r d\varphi = \dots = -2r^2$$

18 - FORMULAS DE GREEN EN EL PLANO Y APLICACIONES.
(ver "Lecciones", Cap. XXIII, n^{os} 4 y sigs.)

Calcular el área del dominio T encerrado por la curva de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \alpha + \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2 \alpha$$

donde a, b, α son constantes ($a > 0$, $b > 0$, $0 < \alpha < \pi$).

La curva es una elipse con centro en el origen O y puede representarse por las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t, \quad y = b \cos(t - \alpha), \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Mientras t crece de 0 a 2π , el punto $P(x, y)$ describe la elipse en sentido antihorario, puesto que el coeficiente angular de la recta OP vale

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \frac{\cos(t - \alpha)}{\cos t} = \frac{b}{a} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} t)$$

y, en consecuencia (siendo $\operatorname{sen} \alpha > 0$), es función creciente de t .

El área buscada viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{+T} (x dy - y dx) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-a \cos t \cdot b \operatorname{sen}(t - \alpha) + b \cos(t - \alpha) \cdot a \operatorname{sen} t] dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} [t - (t - \alpha)] dt = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \alpha \cdot 2\pi = \pi ab \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

19 - Calcular los momentos de inercia del dominio T respecto de los ejes coordenados, suponiéndolo homogéneo con densidad unitaria.

Se trata de calcular las dos integrales dobles

$$I_1 = \iint_T y^2 dx dy, \quad I_2 = \iint_T x^2 dx dy,$$

que, por las fórmulas de Green, son respectivamente iguales a las dos integrales curvilíneas

$$I_1 = \int_{+\mathcal{F}T} xy^2 dy, \quad I_2 = - \int_{+\mathcal{F}T} x^2 y dx$$

y se tiene entonces, usando las ecuaciones paramétricas del ejercicio precedente,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b^2 \cos^2(t - \alpha) \cdot [-b \sin(t - \alpha) dt] = \dots = \frac{1}{4} \pi ab^3 \sin \alpha,$$

$$I_2 = - \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 t \cdot b \cos(t - \alpha) \cdot [-a \sin t dt] = \dots = \frac{1}{4} \pi a^3 b \sin \alpha.$$

20 - Dada la elipse de ecuaciones paramétricas $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, ($a > b$) expresar el área del segmento elíptico que tiene la base PP' normal al eje focal, en función de la anomalía excéntrica del punto P .

Llamando θ (con $0 < \theta \leq \pi$) a la anomalía excéntrica de P (véase fig. 61) se tiene

$$\begin{aligned} \text{área } S &= \frac{1}{2} \int_{+\mathcal{F}S} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_{\text{arco } P'P} (x dy - y dx) + \frac{1}{2} \int_{\text{segmento } PP'} (x dy - y dx) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\theta}^{\theta} (a \cos \varphi \cdot b \cos \varphi + b \sin \varphi \cdot a \sin \varphi) d\varphi + \frac{1}{2} \int_{b \sin \theta}^{-b \sin \theta} a \cos \theta dy = \end{aligned}$$

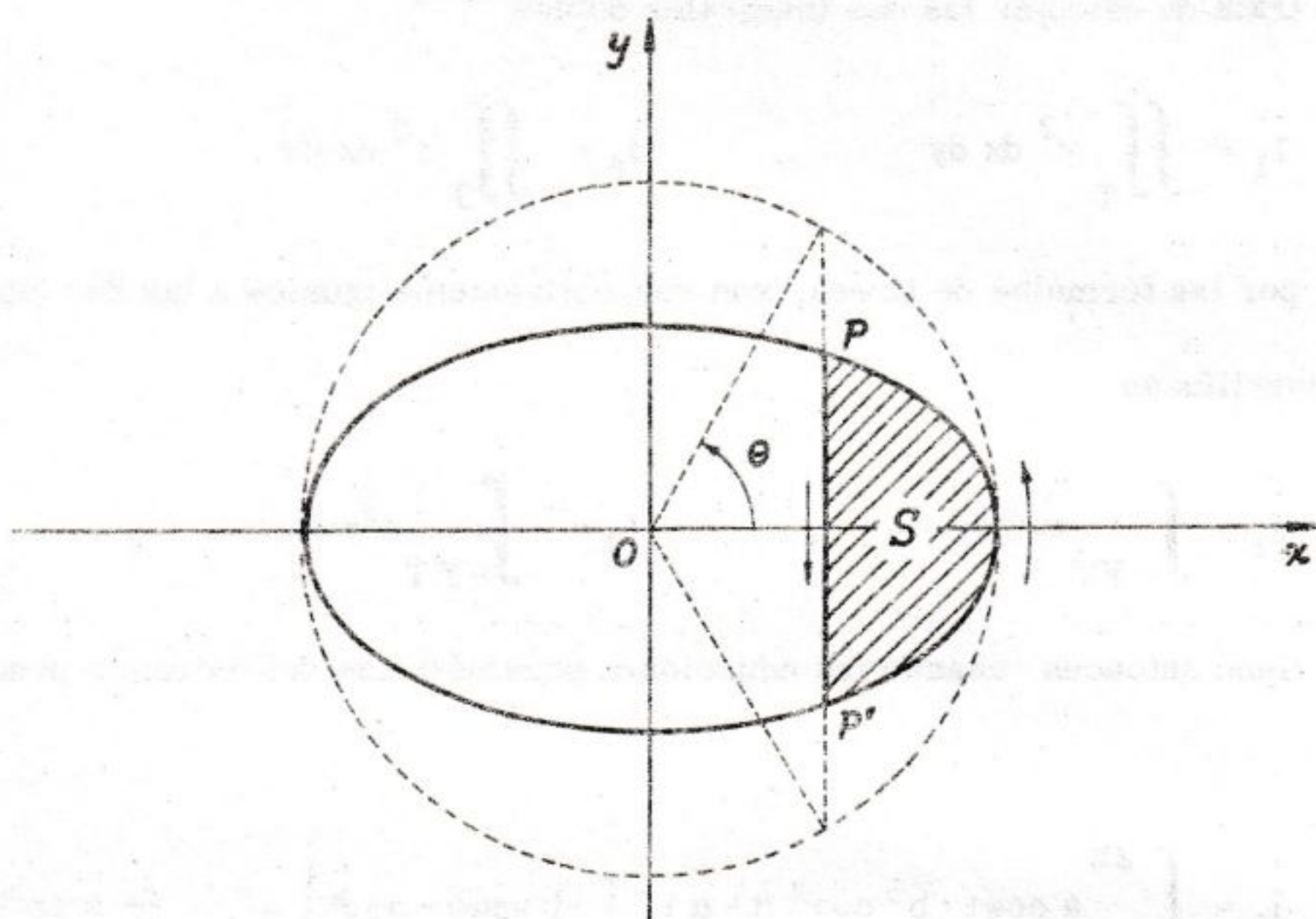


Fig. 61

$$= ab\theta - \frac{1}{2}a\cos\theta \cdot 2b\sin\theta = ab(\theta - \cos\theta\sin\theta)$$

21 - Calcular el área del dominio T encerrado por la curva de ecuaciones paramétricas $x = \cos t(1 + \sin t)$, $y = 1 + \sin t$.

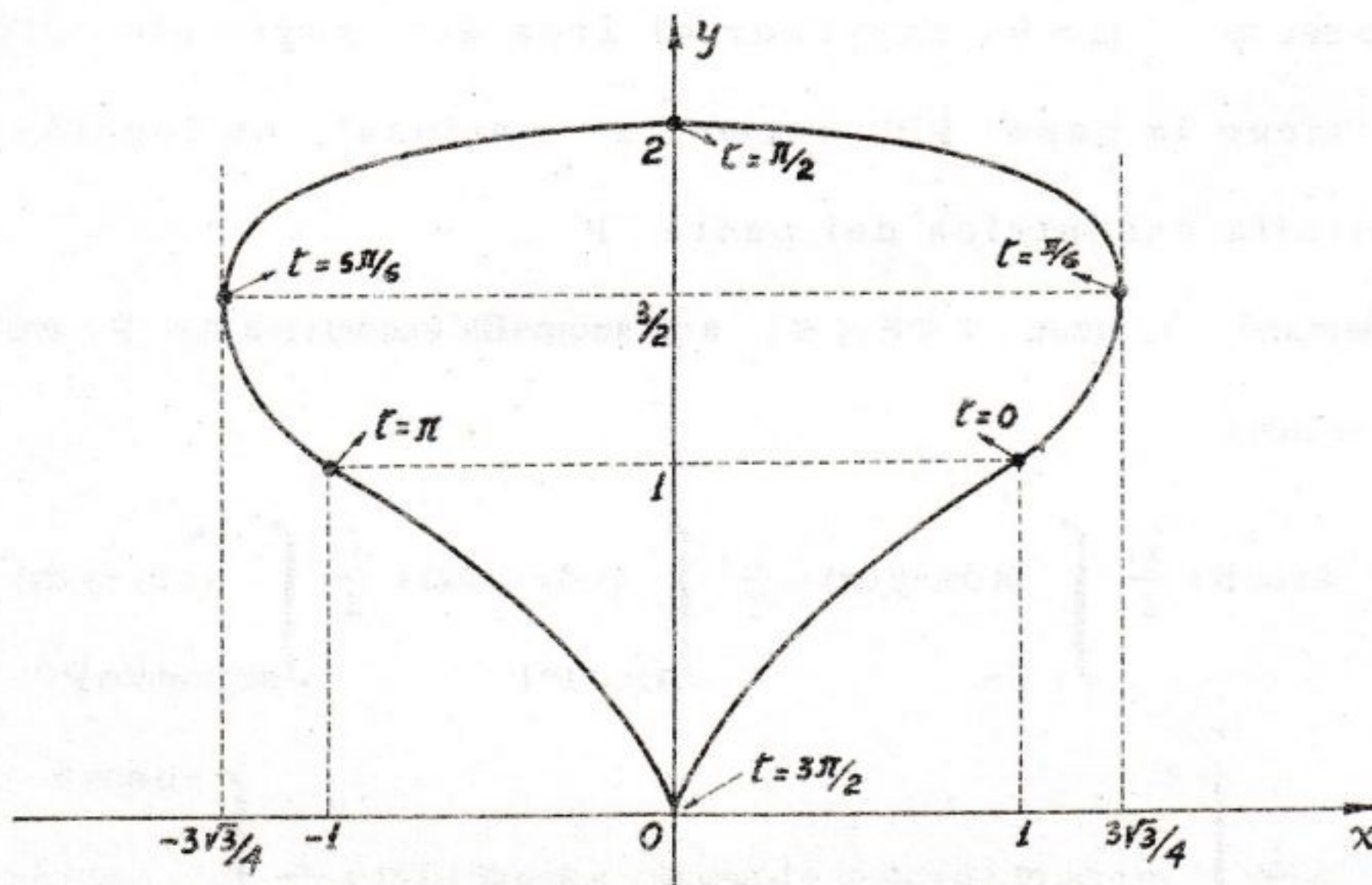


Fig. 62

Se reconoce sin dificultad que la curva tiene un comportamiento como el descrito en la fig. 62. Después se obtiene

$$\begin{aligned} \text{área } T &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}T} (x \, dy - y \, dx) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos t(1 + \sin t) \cos t - (1 + \sin t)(-\sin t + \cos^2 t - \sin^2 t)] \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin t + 2\sin^2 t + \sin^3 t) \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi \end{aligned}$$

22 - Determinar el baricentro del dominio T considerado en el ejercicio precedente, supuesto homogéneo.

La ordenada del baricentro está dada por

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\text{área } T} \iint_T y \, dx \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{F}T} xy \, dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos t(1 + \sin t) \cdot (1 + \sin t) \cdot \cos t \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t + 2\cos^2 t \sin t - \cos^4 t) \, dt = \dots = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

23 - Calcular el área del lazo formado por la curva de ecuación $x^3 + y^3 - axy = 0$ (Folium de Descartes)

Cortando la curva con una recta variable $y = tx$ que parta del origen, se obtienen inmediatamente, para dicha curva, las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \quad y = \frac{at^2}{1+t^3} \quad (1)$$

y en base a éstas es fácil obtener la gráfica de la fig. 63. En virtud de la simetría respecto de la recta $x = y$, el área buscada es el doble de la del dominio T rayado en la figura^(*). La frontera de T se compone del arco γ que tiene las (1) por ecuaciones y queda descrito positivamente cuando t crece de 0 a 1 y de un segmento S (a lo largo del cual se tiene $y = x$ con el parámetro x disminuyendo de $\frac{a}{2}$ hasta 0).

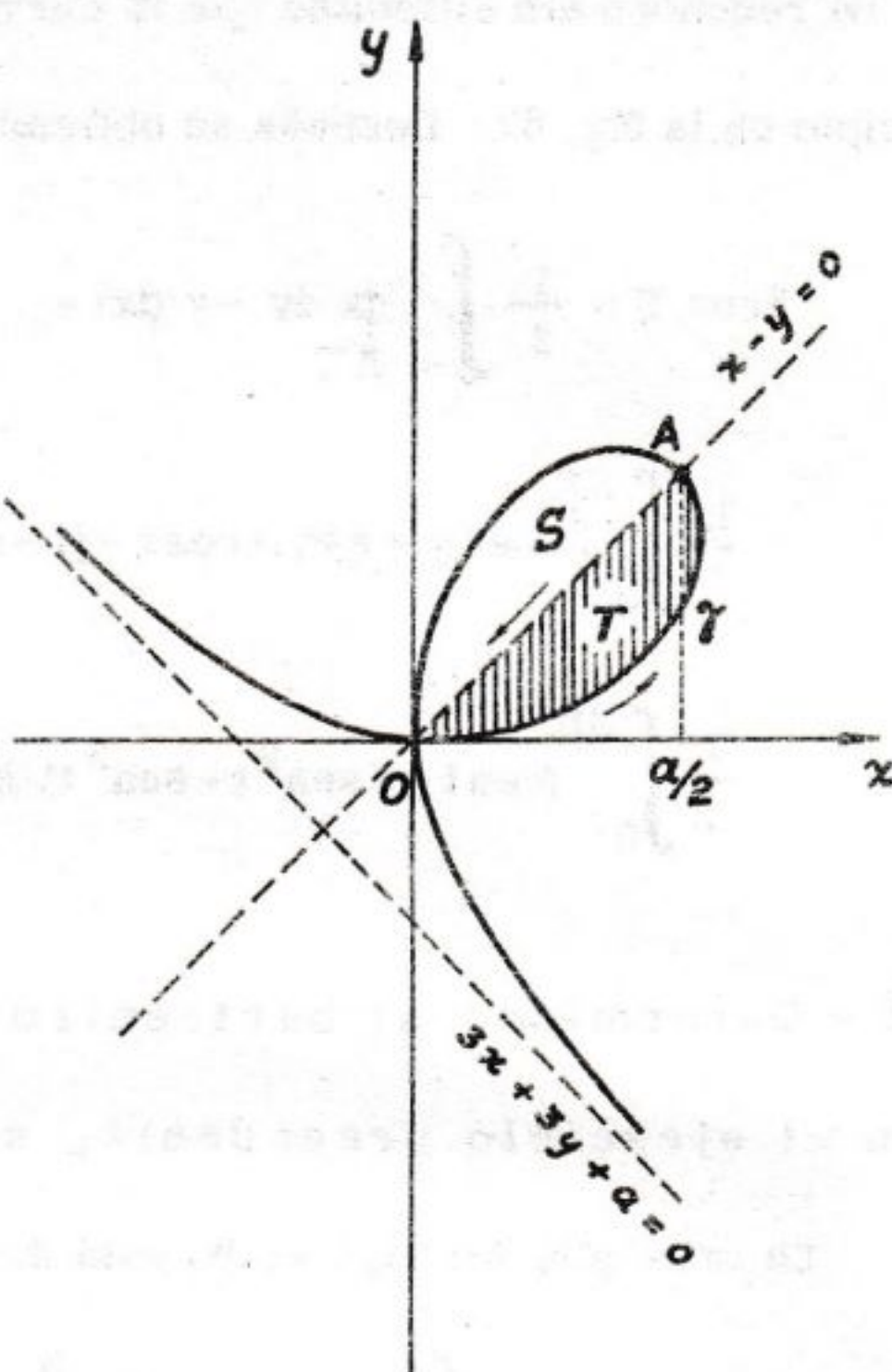


Fig. 63

$$\begin{aligned}
 2 \text{área } T &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{+\gamma T} (x dy - y dx) = \int_{\gamma(O, A)} (x dy - y dx) + \int_{S(A, O)} (x dy - y dx) = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{at}{1+t^3} \cdot \frac{at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{at^2}{1+t^3} \cdot \frac{a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \right] dt + \int_{a/2}^0 (x \cdot dx - x \cdot dx) = \\
 &= a^2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{a^2}{3} \int_0^1 \frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{a^2}{6}
 \end{aligned}$$

24 - Obténganse nuevamente los resultados hallados en los ej. 39, 41, 43, 45, 46 del Vol. I, Cap. IX y del ej. 13 de Vol. I ,

(*) Toda la frontera del lazo queda recorrida si se hace variar t en $[0, +\infty]$. Como no hemos todavía considerado integrales extendidas a intervalos ilimitados, nos referiremos solamente a la mitad del lazo.

Cap. XIX expresando las áreas de los dominios planos allí considerados por medio de integrales curvilíneas sobre las respectivas fronteras.

25 - Obténganse nuevamente los resultados de los ej. 11, 12, 13, 17, 18, y 23 de este capítulo, transformando las integrales dobles allí consideradas en integrales curvilíneas sobre las fronteras de los dominios de integración respectivos.

26 - Sea T un dominio regular del plano xy y $P_0(x_0, y_0)$ un punto arbitrariamente fijado interior o exterior a T . Llamando $P(x, y)$ a un punto variable del plano e indicando con r tanto a la semirrecta $\overrightarrow{P_0P}$ como a la distancia $\overline{P_0P}$, demostrar que se tiene

$$\int_{+\mathcal{F}T} \frac{\cos \hat{r}n}{r} ds \begin{cases} = 0 & \text{si } P_0 \text{ es exterior a } T \\ = 2\pi & \text{si } P_0 \text{ es interior de } T \end{cases} \quad (1)$$

donde n designa a la normal externa (*).

Obsérvese que de la $r = \overline{P_0P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ sigue $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r}$,

$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y_0}{r}$ y, en consecuencia,

(*) El lector se convencerá fácilmente de que la expresión $\frac{\cos \hat{r}n}{r} ds$ da la medida en radianes, con signo oportuno, del ángulo $d\varphi$ bajo el cual se ve, desde P_0 , el elemento ds de $\mathcal{F}T$. Teniendo esto en cuenta, la (1) queda, intuitivamente, justificada sin dificultad.

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r^2}, \quad \frac{\partial \log r}{\partial y} = \frac{y - y_0}{r^2} \quad (2)$$

Por otra parte los cosenos directores de la semirecta $r = \overrightarrow{P_0 P}$ valen $\frac{x - x_0}{r}$, $\frac{y - y_0}{r}$ y entonces se tiene

$$\cos \hat{r}n = \cos \hat{x}r \cos \hat{x}n + \cos \hat{y}r \cos \hat{y}n = \frac{x - x_0}{r} \cos \hat{x}n + \frac{y - y_0}{r} \cos \hat{y}n \quad (3)$$

De (2) y (3) sigue

$$\frac{\cos \hat{r}n}{r} = \frac{x - x_0}{r^2} \cos \hat{x}n + \frac{y - y_0}{r^2} \cos \hat{y}n = \frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \hat{x}n + \frac{\partial \log r}{\partial y} \cos \hat{y}n$$

por lo que puede escribirse

$$\int_{+\mathcal{F}T} \frac{\cos \hat{r}n}{r} ds = \int_{+\mathcal{F}T} \left(\frac{\partial \log r}{\partial x} \cos \hat{x}n + \frac{\partial \log r}{\partial y} \cos \hat{y}n \right) ds \quad (4)$$

Tras esto supongamos, primeramente, P_0 exterior a T . Cuando P varía en T , la distancia r se mantiene siempre positiva y la función $\log r$ resulta continua en T junto con sus derivadas parciales (de cualquier orden). Entonces es posible transformar la integral curvilínea (4) en una integral doble mediante las fórmulas de Green y escribir

$$\int_{+\mathcal{F}T} \frac{\cos \hat{r}n}{r} ds = \iint_T \left(-\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} \right) dx dy ;$$

pero, como inmediatamente se verifica, es $-\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0$, siguiendo la tesis.

Supongamos ahora P_0 interior a T .

La distancia r se anula cuando el punto P , variable en T , coincide con P_0 y entonces la función $\log r$ y sus derivadas tienen una singularidad

en P_0 . No resulta así posible apli —
car las fórmulas de Green a la integral
(4).

Pero observemos que, siendo P_0 in
terior a T , existe un círculo C
con centro en P_0 , totalmente inte —
rior a T que, privando a T de los
puntos interiores de C , se obtiene
un nuevo dominio T' (cuya frontera

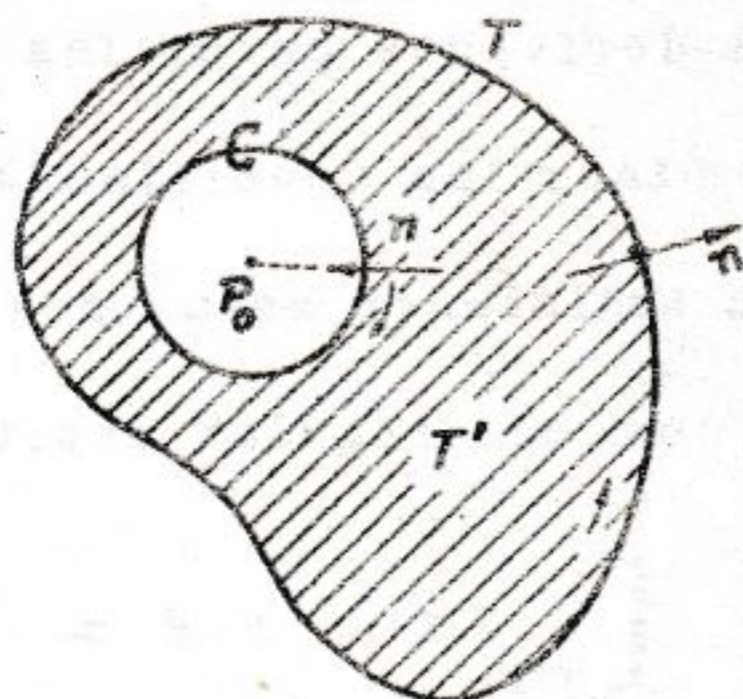


Fig. 64

está constituida por $\mathcal{F}T$ y $\mathcal{F}C$; véase fig. 64) en el que $\log r$ es conti —
nua junto con sus derivadas. Pueden entonces aplicarse en T' las fórmulas
de Green y se tiene, como antes,

$$\int_{+\mathcal{F}T'} \frac{\cos \hat{r}n}{r} ds = \iint_{T'} \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad ;$$

pero $\mathcal{F}T'$ se compone de $\mathcal{F}T$, recorrida en sentido positivo y de $\mathcal{F}C$,
recorrida en sentido negativo, con lo que la relación anterior se transforma en

$$\int_{+\mathcal{F}T} \frac{\cos \hat{r}n}{r} ds + \int_{-\mathcal{F}C} \frac{\cos \hat{r}n}{r} ds = 0 \quad (5)$$

Llamando ϱ al radio de C y observando que cuando el punto P des —
cribe $\mathcal{F}C$ se tiene $\hat{r}n = \pi$, $r = \varrho$, se deduce que

$$\int_{-\mathcal{F}C} \frac{\cos \hat{r}n}{r} ds = - \frac{1}{\varrho} \int_{-\mathcal{F}C} ds = - \frac{1}{\varrho} \cdot 2\pi\varrho = -2\pi \quad , \quad (*)$$

de modo que, de la (5), sigue la tesis.

(*) Nótese que sobre $\mathcal{F}C$ el arco s ha sido tomado positivamente según el sentido de $-\mathcal{F}C$.

27 - Sean $X(x,y)$, $Y(x,y)$ dos funciones continuas junto con sus derivadas parciales primeras en todo el plano xy . Determinar las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer estas dos funciones para que, llamando T a un dominio regular arbitrario, la integral curvilínea

$$\int_{\partial T} X(x+\alpha, y+\beta) dx + Y(x+\alpha, y+\beta) dy \quad (1)$$

tenga un valor independiente de α , β (dependiente sólo de T).

Por la fórmula de Green la integral (1) es igual a

$$\iint_T [Y_x(x+\alpha, y+\beta) - X_y(x+\alpha, y+\beta)] dx dy = \iint_T F(x+\alpha, y+\beta) dx dy,$$

donde se ha puesto

$$F(x,y) = Y_x(x,y) - X_y(x,y) \quad (2)$$

La condición buscada puede entonces expresarse diciendo que

$$\iint_T F(x+\alpha, y+\beta) - F(x,y) dx dy = 0 \quad (3)$$

cualesquiera sean α , β , T .

El hecho que la (3) valga cualquiera sea T puede verificarse sólo si la función a integrar es idénticamente nula, por lo que la condición buscada es que sea $F(x+\alpha, y+\beta) \equiv F(x,y)$ cualesquiera sean α , β , vale decir, que la $F(x,y)$ sea constante ($= 2c$) .

Recordando la (2) se ve que $Y_x - X_y = 2c$, o también,

$$\frac{\partial}{\partial y} (X + cy) = \frac{\partial}{\partial x} (Y - cx) ;$$

por lo tanto la forma diferencial lineal $(X + cy) dx + (Y - cx) dy$ es un diferen

cial exacto y existe una función $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = X + cy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Y - cx$.

La conclusión es, entonces: la condición buscada es que ambas funciones X, Y sean del siguiente tipo

$$X = \frac{\partial f}{\partial x} - cy, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y} + cx.$$

Resulta también que, en tal caso, la integral (1) es igual a $2c \cdot \text{área } T$.

28 - Considérense nuevamente los diferenciales exactos

$$y(\log \frac{y}{x} - 1) dx + x(\log \frac{y}{x} + 1) dy \quad (1)$$

$$x(16x^2 - 15xy + 2) dx + (3y^2 - 5x^3) dy \quad (2)$$

ya estudiados en los ej. 7 y 5, respectivamente, de este capítulo, y obténganse sus integrales sin efectuar cuadraturas.

Si en la (1) hacemos $X = y(\log \frac{y}{x} - 1)$, $Y = x(\log \frac{y}{x} + 1)$ se ve que la X y la Y son funciones homogéneas de 1^{er} grado pudiéndose, entonces, aplicar el teor. III expuesto en "Lecciones", Cap. XXIII, n^o 5; se obtiene así la integral

$$\frac{1}{2} \left[x \cdot y(\log \frac{y}{x} - 1) + y \cdot x(\log \frac{y}{x} + 1) \right] + c = xy \log \frac{y}{x} + c.$$

En lo que se refiere a la (2) basta observar que resulta de la suma de tres formas diferenciales

$x(16x^2 - 15xy) dx - 5x^3 dy$ con los coeficientes homogéneos de 3^{er} grado

$2x dx$ " " " " " 1^{er} "

$3y^2 dy$ " " " " " 2^o "

Estas tres formas tienen las integrales respectivas:

$$\frac{1}{4} \left[x \cdot x(16x^2 - 15xy) + y \cdot (-5x^3) \right]$$

$$\frac{1}{2} x \cdot 2x$$

$$\frac{1}{3} y \cdot 3y^2$$

que, sumadas, vuelven a dar la integral antes calculada:

$$f(x, y) = 4x^4 - 5x^3y + y^3 + x^2 + c$$

29 - Considérense las formas diferenciales lineales

$$\frac{3x+y}{\sqrt{x+y}} dx - \frac{x+3y}{\sqrt{x+y}} dy \quad (1)$$

$$\frac{2x}{y^3} dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \right) dy \quad (2)$$

y determínese la posibilidad de integrarlas. En caso afirmativo calcúlense tales integrales.

En la (1) la X y la Y son funciones homogéneas de grado $\frac{1}{2}$ que verifican la condición de integrabilidad $X_y = Y_x$. Puede entonces encontrarse una función que tenga por diferencial total la (1); se tratará de

$$f(x, y) = c + \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(x \frac{3x+y}{x+y} - y \frac{x+3y}{\sqrt{x+y}} \right) = c + 2 \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}}$$

De modo análogo, siendo en la (2) X e Y funciones homogéneas de grado -2 que verifican la condición $X_y = Y_x$, se obtendrá

$$f(x, y) = c - \left[x \frac{2x}{y^3} + y \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} \right) \right] = c + \frac{x^2 - y^2}{y^3}$$

30 - Estudiar la integración de la forma diferencial lineal

$$\frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy \quad (1)$$

El problema de la integración de la forma (1) puede plantearse en cualquier campo A que excluya el origen. Se tiene

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2y^2 - (x+y)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

quedando, por lo tanto, satisfecha la condición necesaria de integrabilidad.

Entonces, si el campo fijado A es simplemente conexo (o contenido en uno A' simplemente conexo que no contenga el origen), la (1) es integrable en A y, usando uno de los métodos vistos en el ej. 5^(*) se encuentra para su integral la expresión

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c, \quad (2)$$

en la que, sin embargo, es necesario precisar el significado de $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ si se quiere que la $f(x, y)$ resulte, en todos los casos, continua en A .

En efecto; con la determinación habitual del arco tangente (entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$) no se obtiene la continuidad de f cuando A contenga puntos del eje y ya que, para $x \rightarrow 0$ (con y fijo), la función $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ tiene límite a la derecha ($= \pm \frac{\pi}{2}$ según sea $y \gtrless 0$) distinto del límite a la izquierda ($= \mp \frac{\pi}{2}$). Conviene elegir, para $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ el valor comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ si el punto (x, y) cae en el primer cuadrante, el comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π si (x, y) cae en el segundo cuadrante, etc., etc., o sea, identificar $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ con la anomalía φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) del punto (x, y) . En otros términos, conviene escribir la (2) por medio de las coordenadas polares ρ , φ y decir que la integral de la forma es

$$f = \log \rho + \varphi + c; \quad (3)$$

(*) Nótese que no es aplicable el método usado en los dos ejercicios precedentes pues, si bien X e Y , son funciones homogéneas, el grado de homogeneidad es -1 .

con lo que la función f es continua en A (simplemente conexo que no contenga el origen, es decir, que "no gira" alrededor del origen).

Pero si A no es simplemente conexo, es decir, si "gira" alrededor del origen, ya no queda dicho que la forma sea un diferencial exacto en A . Y, efectivamente, no lo es porque su eventual integral no puede ser sino la proporcionada por (3); pero queda claro que, de cualquier modo se fije la determinación de φ , no se logra más obtener una función continua en todo A ; mientras que, dejando la libertad a φ de variar con continuidad, lo que ya no se obtiene es una función uniforme.

Que la (1) no sea un diferencial exacto en un campo que "gire" alrededor del origen queda además confirmado por el hecho (que dejamos al lector que lo verifique) que la integral curvilínea de la (1), extendida a una circunferencia con centro en el origen, recorrida en sentido positivo, no vale cero, sino 2π .

CAPITULO XXIV

Integrales superficiales

1 - INTEGRALES SUPERFICIALES DE FUNCIONES Y DE FORMAS DIFERENCIALES BILINEALES (ver "Lecciones", Capítulo XXIV, n^{os} 1, 2.)

Calcular la integral superficial de la función $x^2 + y^2 + z^2$ sobre la parte S de la superficie cónica $z^2 = x^2 + y^2$ que está comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

La S puede representarse con las ecuaciones paramétricas $x = z \cos \varphi$, $y = z \sin \varphi$, $z = z$ con el dominio base A ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$).

La matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} -z \sin \varphi & z \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 1 \end{pmatrix}$$

teniéndose, en consecuencia, $E = z^2$, $F = 0$, $G = 2$, $\sqrt{EG - F^2} = z\sqrt{2}$. Sigue

$$\begin{aligned} \int_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma &= \iint_A (z^2 \cos^2 \varphi + z^2 \sin^2 \varphi + z^2) z\sqrt{2} d\varphi dz = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^1 z^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2 - Calcular la integral superficial de la función $\frac{x^2 + y^2}{2r}$ sobre

bre la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y \geq 0$.

Tal semiesfera S puede representarse con las ecuaciones paramétricas $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, con el dominio base A ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$). Puesto que resulta $\sqrt{EG - F^2} = r^2 \sin \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_S \frac{x^2 + y^2}{2r} d\sigma &= \iint_A \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} r^3 \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

3 - Calcular la integral superficial de la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^4-z^2)+y^2-z^2}}$$

sobre la parte S del paraboloide hiperbólico $z = xy$ que se proyecta sobre el plano xy en el segmento circular C definido por $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Refiriendo S a los parámetros x, y se tiene $d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ y entonces

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, z) d\sigma &= \iint_C \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} dx dy}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^4-x^2y^2)+y^2-x^2y^2}} = \iint_C \frac{dx dy}{1-x^2} = \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4 - Determinar el baricentro de una superficie semiesférica homogénea.

Refiriéndonos a la semiesfera $S (x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0)$, el baricentro se encuentra sobre el eje z y la cota ζ viene dada por

$$\zeta = \frac{\int_S z \, d\sigma}{\text{área } S} = \frac{1}{2\pi r^2} \int_S z \, d\sigma.$$

Utilizando las ecuaciones paramétricas ya consideradas en el ej. 2, con el dominio base $A (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ se encuentra

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2\pi r^2} \iint_A r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \dots = \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

5 - Calcular el potencial del campo newtoniano creado por una superficie esférica homogénea.

Refiriéndonos a la superficie esférica $S(x^2 + y^2 + z^2 = r^2)$, el potencial en un punto Q depende solamente, por razones de simetría, de la distancia de Q al centro O de la esfera. Podemos entonces suponer Q sobre el semieje positivo z (fig. 65). Haciendo $\overline{OQ} = \rho$ y refiriendo la esfera a la colatitud θ y a la longitud φ , con el dominio base $A (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ se encuentra que la distancia de Q al punto genérico P de la esfera vale $\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}$. Por lo tanto, llamando μ a la densidad

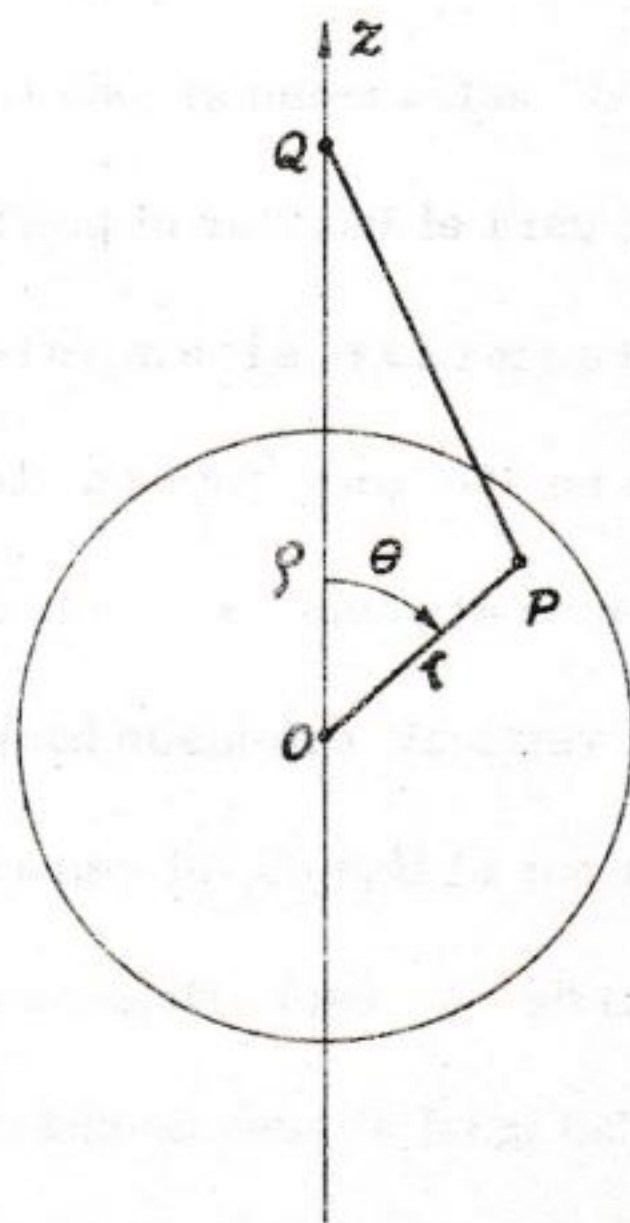


Fig. 65

superficial (constante), se obtiene como potencial $V(Q) = V(\rho)$:

$$\begin{aligned} V(\rho) &= \int_S \frac{\mu d\sigma}{PQ} = \mu \iint_A \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} = \\ &= \mu r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} = \\ &= 2\pi\mu r^2 \left[\frac{1}{r\rho} \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta} \right]_0^\pi = \frac{2\pi\mu r}{\rho} \left[(r+\rho) - |r-\rho| \right] \end{aligned}$$

o sea

$$V(\rho) \begin{cases} = \frac{4\pi\mu r^2}{\rho} & , \text{ si } \rho > r \text{ , o sea si } Q \text{ es exterior a } S \text{ ,} \\ = 4\pi\mu r & \text{ si } \rho < r \text{ , o sea si } Q \text{ es interior a } S \text{ .} \end{cases}$$

Si se observa que $4\pi\mu r^2$ es la masa total de S , se ve que, hacia el exterior S actúa como si toda la masa estuviera concentrada en el centro, mientras que para el interior el potencial es constante (o sea el campo es nulo).

6 - Determinar el empuje hidrostático sobre una determinada parte de una pared de un recipiente lleno de líquido.

Tomemos el plano xy sobre la superficie libre (horizontal) del líquido y el eje z vertical, orientado hacia abajo. Considerada una parte S de pared alcanzada por el líquido, el empuje sobre un elemento $d\sigma$ que rodee al punto $P(x, y, z)$ de S está orientado como la normal externa n de S y tiene una intensidad igual al peso de una columna de líquido que tenga $d\sigma$ por base y z por altura (es decir, igual a $\mu z d\sigma$ si μ es el peso específico del líquido). Las componentes sobre los ejes coordenados de tal empuje elemental son ,

entonces, $\mu z \cos \hat{x}n d\sigma$, $\mu z \cos \hat{y}n d\sigma$, $\mu z \cos \hat{z}n d\sigma$, mientras que las del empuje total están expresadas por

$$X = \mu \int_S z \cos \hat{x}n d\sigma, \quad Y = \mu \int_S z \cos \hat{y}n d\sigma, \quad Z = \mu \int_S z \cos \hat{z}n d\sigma. \quad (1)$$

Obsérvese que, llamando A a la proyección ortogonal de S sobre el plano xy , puede escribirse

$$Z = \mu \iint_A z dx dy$$

por lo que, recordando la fórmula del volumen de un cilindroide, se ve que Z no es sino el peso del líquido que está sobre S .

Considérese, por ejemplo, un recipiente que tenga la forma de un semicircular recto, de radio r y altura h (ver fig. 66), lleno de líquido, y se desea calcular el empuje sobre la parte cónica S de la pared. Por razones de simetría resulta $X = 0$ mientras,

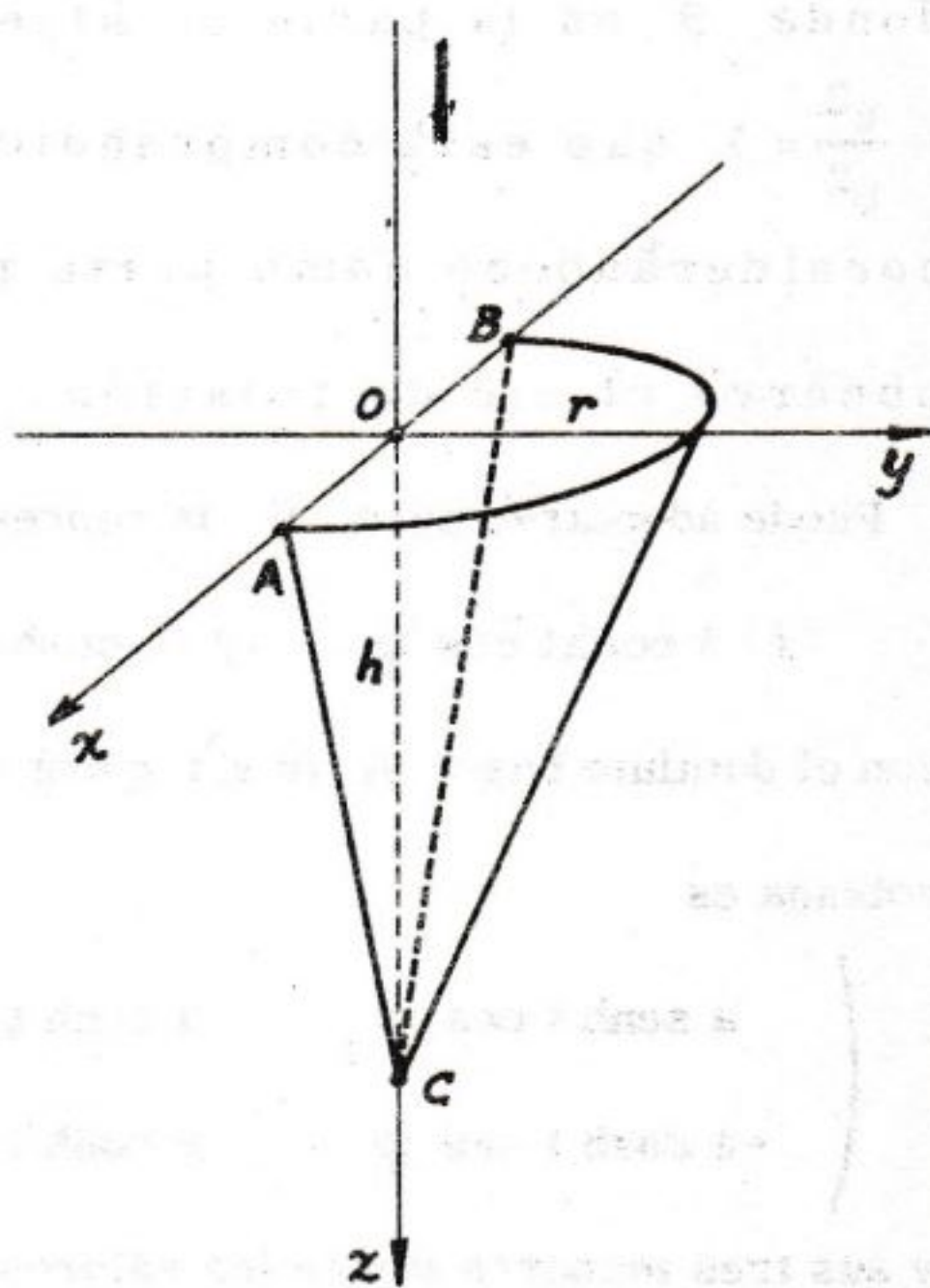


Fig. 66

por la observación precedente, se tiene sin más, $Z = \frac{1}{3} \pi r^2 h \mu$.

Queda por calcular

$$Y = \mu \int_S z \cos \hat{y}n d\sigma = \mu \iint_T z dz dx,$$

donde T es el triángulo ABC de la figura. Por lo tanto

$$Y = \mu \int_0^h z \, dz \int_{-r(1-\frac{z}{h})}^{r(1-\frac{z}{h})} dx = 2r\mu \int_0^h z \left(1 - \frac{z}{h}\right) dz = \frac{1}{3} r h^2 \mu .$$

7 - Calcular la integral superficial

$$\int_{+S} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) \quad (1)$$

donde S es la parte de hiperboloide de rotación $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ que está comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = b$, considerándose como parte positiva aquella desde la que se observa el eje de rotación.

Puede adoptarse para S la representación paramétrica

$$x = a \cosh t \cos \varphi, \quad y = a \cosh t \sin \varphi, \quad z = b \sinh t$$

con el dominio base A ($0 \leq t \leq \arg \sinh 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). La matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} a \sinh t \cos \varphi & a \sinh t \sin \varphi & b \cosh t \\ -a \cosh t \sin \varphi & a \cosh t \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

y sus tres menores tienen los valores

$$L = -ab \cosh^2 t \cos \varphi, \quad M = -ab \cosh^2 t \sin \varphi, \quad N = a^2 \cosh t \sinh t.$$

Teniendo en cuenta cómo se ha orientado S , se ve que para la normal positiva n se tiene $\cos \hat{z}n \geq 0$; por otra parte es $N \geq 0$ y entonces los tres cosenos directores de n tienen los mismos signos de L, M, N . Si sigue que la integral (1) es igual a

$$+ \iint_A (xL + yM + zN) \, dt \, d\varphi = -a^2 b \iint_A \cosh t \, dt \, d\varphi =$$

$$= -a^2 b \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arg \sinh 1} \cosh t \, dt = -2\pi a^2 b$$

8 - Calcular la integral superficial

$$\int_{+S} \left[(1-x) \, dy \, dz + (1-y) \, dz \, dx + (1-z) \, dx \, dy \right] \quad (1)$$

donde S es la parte de paraboloides de rotación $z = x^2 + y^2$ que se proyecta sobre el plano xy en el círculo $C(x^2 + y^2 \leq 1)$ y se considera como página positiva la que mira hacia las z positivas.

Los cosenos directores de la normal positiva n son proporcionales a $2x$, $2y$, -1 ; además es, evidentemente, $\cos \hat{z}n > 0$ y entonces tales cosenos tienen los signos de $-2x$, $-2y$, 1 . Se deduce que la integral (1) es igual a

$$\begin{aligned} & \iint_C \left[(1-x) \cdot (-2x) + (1-y) \cdot (-2y) + 1 - x^2 - y^2 \right] dx \, dy = \\ & = \iint_C (1 - 2x - 2y + x^2 + y^2) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Usando las coordenadas polares se encuentra de inmediato el valor $\frac{3}{2} \pi$.

9 - TEOREMA DE STOKES Y APLICACIONES (ver "Lecciones" Cap. XXIV, n^{os} 3, 4)

Considérese la integral curvilínea

$$\int_{+\gamma} \left[a(y^3 + z^3) \, dx + b(x^3 + z^3) \, dy + c(x^3 + y^3) \, dz \right] \quad (1)$$

donde γ es la poligonal simple y cerrada OABCDEO de la

fig. 67 con el sentido positivo allí indicado. Transfórmese la integral (1) en una integral superficial sobre la superficie S constituida por los dos triángulos T_1 , T_2 y por el rectángulo R de la figura. Calcúlense luego las dos integrales y verifíquese su igualdad.

La poligonal γ es el borde de la superficie considerada S ; al sentido positivo fijado sobre γ corresponde, según una regla conocida, la página positiva de S indicada en la figura. Por

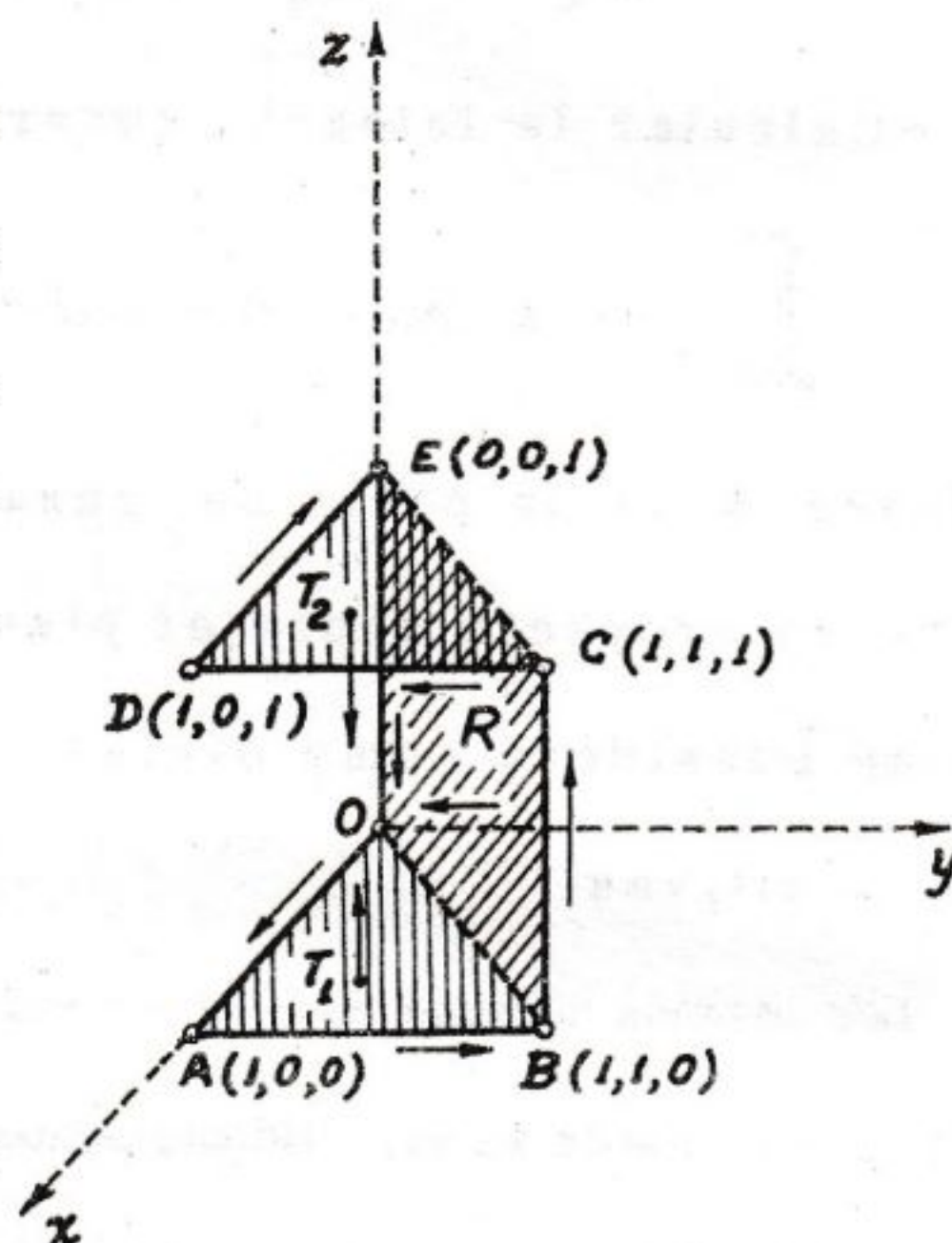


Fig. 67

lo tanto, una aplicación inmediata del teorema de Stokes transforma (1) en

$$3 \int_{+S} [(cy^2 - bz^2) dy dz + (az^2 - cx^2) dz dx + (bx^2 - ay^2) dx dy] \quad (2)$$

Sin dificultad el lector encontrará que las contribuciones de los lados OA , AB , BC , CD , DE , EO en la integral curvilínea (1) valen 0 , b , $2c$, $-2b$, $-a$, 0 , respectivamente, por lo que dicha integral vale $2c - a - b$.

Para la integral (2) se encontrará que las caras T_1 , R , T_2 de S contribuyen con los valores $\frac{1}{4}(3b - a)$, $2c - a - b$, $\frac{1}{4}(a - 3b)$, respectivamente y en consecuencia.....

10 - Estúdiense si es o no posible transformar, mediante el teorema de Stokes, una integral superficial dada en una integral curvilínea.

Consideremos la integral superficial

$$\int_{+S} M(x, y, z) dy dz + N(x, y, z) dz dx + P(x, y, z) dx dy, \quad (1)$$

donde S es una superficie regular abierta y BS su borde. Supongamos por simplicidad que las funciones M, N, P sean continuas junto con sus derivadas primeras en todo el espacio. Para aplicar la fórmula de Stokes a (1) resulta obvia la necesidad de conocer, antes que nada, tres funciones X, Y, Z (con continuas con sus derivadas primeras y segundas mixtas) tales de tenerse

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = M, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = N, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = P. \quad (2)$$

En general estas tres funciones no existen, ya que de la (2) resulta como consecuencia que debe verificarse

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

y ésta es una condición necesaria para que las (2) admitan soluciones. En las hipótesis planteadas, ésta es también suficiente y todas las soluciones de (2) están dadas por las fórmulas

$$\begin{cases} X = \int_{z_0}^z N(x, y, \zeta) d\zeta - \int_{y_0}^y P(x, \eta, z_0) d\eta + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ Y = - \int_{z_0}^z M(x, y, \zeta) d\zeta + \frac{\partial f}{\partial y}, \\ Z = \frac{\partial f}{\partial z}, \end{cases} \quad (4)$$

donde f es una función arbitraria (continua junto con las derivadas que sean necesarias) (*). Dejamos para el lector probar esta afirmación.

En conclusión, puede aplicarse a la integral (1) el teorema de Stokes sólo cuando se verifica la (3), en ese caso la aplicación puede hacerse de infinitos modos distintos, adoptando para X, Y, Z funciones del tipo (4).

11 - Siendo S la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, considérese como positiva la página que mira al origen. Calcúlese la integral superficial

$$\int_{+S} [(3x^2 + y^2 + z) dy dz + (x^2 - 6xy) dz dx + 3(x^2 + y^2) dx dy] \quad (1)$$

transformándola en una integral curvilínea sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, que constituye el borde de S .

Teniendo en cuenta el ej. precedente, se ve que la transformación es posible y que la integral (1) es igual a la integral curvilínea

$$\int [(x^2 z - 6xyz - 3x^2 y - y^3) dx - (3x^2 z + y^2 z + \frac{1}{2} z^2) dy] \quad (2)$$

extendida sobre la citada circunferencia, recorrida en sentido horario. Usando para esta última la representación paramétrica habitual $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, se encontrará para la integral (2) la expresión

$$- \int_0^{2\pi} (-3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t) (-\sin t) dt$$

(*) Si introducimos los vectores $\vec{u} \equiv (X, Y, Z)$, $\vec{v} \equiv (M, N, P)$ las (2) equivalen únicamente a la ecuación $\text{rot } \vec{u} = \vec{v}$, con \vec{u} como incógnita, la que tiene solución sólo si $\text{div } \vec{v} = 0$. En este caso las soluciones \vec{u} son infinitas y quedan determinadas a menos de $\text{grad } f$. Esto es natural ya que, cualquiera sea f , resulta $\text{rot grad } f = 0$.

llegándose a la conclusión que la integral (1) tiene el valor $-\frac{3\pi}{2}$.

Verifíquese el resultado calculando directamente la integral superficial.

12 - Considérense nuevamente las formas diferenciales lineales

$$(x^3 + 3x^2y - 2xyz) dz + (x^3 - x^2z + 3y^2z) dy + (-x^2y + y^3 - z^3) dz, \quad (1)$$

$$(3x^2 + y^2 + 2xz + 2xz^2) dx + 2y(x + z) dy + (x^2 + y^2 + 2x^2z) dz, \quad (2)$$

ya estudiadas en los ejercicios 11 y 9 del Cap. anterior y obténganse las integrales sin efectuar cuadraturas.

Ya sabemos que (1) y (2) son diferenciales exactos. En (1) los coeficientes son funciones homogéneas de 3^{er} grado y entonces [ver "Lecciones" Cap. XXIV, n^o 4] la integral de la forma queda dada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[x \cdot (x^3 + 3x^2y - 2xyz) + y \cdot (x^3 - x^2z + 3y^2z) + z(-x^2y + y^3 - z^3) \right] = \\ & = \frac{1}{4} (x^4 - z^4) + x^3y - x^2yz + y^3z \end{aligned}$$

salvo una constante aditiva arbitraria.

Para la (2) puede observarse que la misma es suma de las dos formas

$$(3x^2 + y^2 + 2xz) dx + 2y(x + z) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

$$2xz^2 dx + 2x^2z dz,$$

cuyos coeficientes son funciones homogéneas de 2^o y 3^{er} grado respectivamente y tienen por integrales a

$$\frac{1}{3} \left[x(3x^2 + y^2 + 2xz) + y \cdot 2y(x + z) + z(x^2 + y^2) \right],$$

$$\frac{1}{4} \left[x \cdot 2xz^2 + z \cdot 2x^2z \right]$$

por lo que, sumando, se obtiene para la (2) la integral:

$$f(x, y, z) = (x + z) (x^2 + y^2) + x^2 z^2 + c ,$$

ya encontrada en el Cap. XXIII .

13 - Estudiar la integración de la siguiente forma diferencial lineal:

$$\frac{dx + dy}{z^2} - 2 \frac{x + y}{z^3} dz .$$

Procédase como en el ej. anterior.

14 - FORMULAS DE GREEN EN EL ESPACIO Y APLICACIONES (ver "Lecciones", Cap. XXIV , n° 5) .

Calcular la siguiente integral superficial

$$\int_{+S} (x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy) ,$$

donde S es la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (sobre la que se considera como positiva la página exterior) transformándola en una integral triple con las fórmulas de Green.

Llamando T al dominio encerrado por S se tiene

$$\int_{+S} (x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy) = \iiint_T (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz ,$$

tras lo que, mediante un pasaje a coordenadas polares en el espacio, se encuentra fácilmente el resultado $\frac{12}{5} \pi r^5$.

15 - El mismo problema del ej. precedente para la integral superficial

$$\int_S z^2 (x^2 + y^2) d\sigma \quad (1)$$

En un punto (x, y, z) de S los cosenos directores de la normal interna n_i son iguales a $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, $-\frac{z}{r}$ y entonces la integral (1) puede también escribirse

$$-\int_S z(x^2 + y^2) r \cos \hat{z}n_i d\sigma = r \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz = \dots = \frac{8}{15} \pi r^6$$

16 - Sea T un dominio regular del espacio xyz , mientras que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ indica un punto arbitrariamente fijado, interior o exterior a T . Llamando $P(x, y, z)$ a un punto variable del espacio y r tanto a la semirrecta P_0P como a la distancia $\overline{P_0P}$, demostrar que resulta

$$\int_{\mathcal{F}T} \frac{\cos \hat{r}n}{r^2} d\sigma \begin{cases} = 0 & \text{si } P_0 \text{ es exterior a } T \\ = 4\pi & \text{si } P_0 \text{ es interior de } T \end{cases} \quad (1)$$

donde n representa la normal interna.

Este teorema es el análogo, en el espacio, al ya enunciado para el plano en el ej. 25 del Cap. XXIII y se demuestra, con un procedimiento similar al utilizado en tal ejercicio considerando, en cambio, $\frac{1}{r}$ en lugar de $\log r$.

Es decir, se establece la fórmula

$$\frac{\cos \hat{r}n}{r^2} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos \hat{x}n - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos \hat{y}n - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos \hat{z}n$$

y, sucesivamente, se aplican a la integral (1) las fórmulas de Green en el es-

pacio, teniendo después en cuenta que $\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \equiv 0$.

En el caso en que P_0 sea interior de T las fórmulas de Green se aplican en el dominio T' obtenido privando a T de los puntos interiores de una esfera de centro P_0 , interior de T , etc., etc.

El lector verá después que $\frac{\cos \hat{r}n}{r^2} ds$ representa el ángulo sólido $d\omega$ bajo el que se observa, desde P_0 , un elemento de superficie $d\sigma$ de $\mathcal{F}T$, pudiendo así dar una justificación intuitiva de la (1). Recordemos que $d\omega$ es el área de aquella parte de la esfera de centro P_0 y radio 1 que, sobre dicha esfera, es interceptada por el cono que de P_0 proyecta $d\sigma$.

17 - Sean $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ tres funciones continuas junto con sus derivadas parciales primeras en todo el espacio xyz . Determinar la condición necesaria y suficiente que deben satisfacer estas tres funciones para que, siendo T un dominio regular arbitrario, la integral superficial

$$\int_{+\mathcal{F}T} X(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) dy dz + Y(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) dz dx + Z(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) dx dy \quad (1)$$

tenga un valor independiente de α, β, γ (o sea dependa sólo de T).

Es un problema análogo al del ej. 26 del Cap. XXIII. Por la fórmula de Green la integral (1) es igual a

$$-\iiint_T [X_x(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) + Y_y(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) + Z_z(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)] dx dy dz$$

y entonces, razonando como en el citado ej. se encuentra que la condición buscada es

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{constante} \quad (2)$$

es decir, que sea constante la divergencia del vector \vec{u} de componentes X, Y, Z .

Ocupémonos ahora de transformar la condición (2) buscando la expresión general de las funciones X, Y, Z que la verifican

Indicada con $3c$ la constante del segundo miembro y poniendo

$$X = cx + X_1, \quad Y = cy + Y_1, \quad Z = cz + Z_1 \quad (3)$$

la (2) se transforma inmediatamente en la

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Se logra de inmediato una solución de esta ecuación eligiendo arbitrariamente tres funciones $M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z)$ continuas junto con sus derivadas primeras y segundas mixtas, y poniendo

$$X_1 = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \quad Y_1 = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Z_1 = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, \quad (5)$$

como se verifica de inmediato^(*). Viceversa, tomando arbitrariamente una solución (X_1, Y_1, Z_1) de (4) siempre es posible determinar (de infinitos modos distintos) tres funciones M, N, P de modo que valgan las (5); se puede, por ejemplo, poner

$$M = \int_{z_0}^z Y_1(x, y, \zeta) d\zeta - \int_{y_0}^y Z_1(x, \eta, z_0) d\eta,$$

(*) Con las notaciones vectoriales, el hecho de que las funciones definidas por las (5) verifican la (4) se expresa diciendo que para un vector arbitrario \vec{u} resulta $\text{div rot } \vec{u} = 0$.

$$N = - \int_{z_0}^z X_1(x, y, \zeta) d\zeta, \quad ,$$

$$P = 0, \quad ,$$

como el lector podrá constatar con facilidad (cfr. ej. 10). Sigue que todas (y solamente) las soluciones de (4) están dadas por (5), y entonces, teniendo en cuenta las (3), se concluye que la solución buscada puede expresarse diciendo que X, Y, Z deben ser de la forma

$$X = cx + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \quad Y = cy + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Z = cz + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

CAPITULO XXV

Medida de conjuntos no acotados y extensión del concepto de Integral

1-EJEMPLOS DE FUNCIONES SUMABLES DE UNA VARIABLE
Y CALCULO DE SUS INTEGRALES (ver "Lecciones", Cap. XXV,
n^{os} 3, 4, 6, 7).

Estudiar si las siguientes funciones

$$\frac{1}{k\sqrt[k]{x}} \quad (k \text{ entero } \geq 2); \quad \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}; \quad \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}};$$

$$\frac{e^{-1/x}}{x^2}; \quad \frac{\log x}{x}; \quad \frac{1}{x(\log x)^k} \quad (k \text{ entero } > 0),$$

son sumables en el intervalo $[0, 1]$ y, en caso afirmati-
vo, calcular la integral correspondiente.

La función $\frac{1}{k\sqrt[k]{x}}$ es generalmente continua en $[0, 1]$ con $x=0$ co-
mo único punto singular, en el que resulta infinita de orden $\frac{1}{k} < 1$. De a-
quí surge que es sumable en $[0, 1]$ y se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{k\sqrt[k]{x}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^1 \frac{dx}{k\sqrt[k]{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{k-1} x^{\frac{k-1}{k}} \right]_{1/n}^1 = \\ &= \frac{k}{k-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{k}{k-1} \end{aligned}$$

Hemos aquí considerado la sucesión de intervalos $\left[\frac{1}{n}, 1 \right]$ que tienden

al $(0, 1]$; en la práctica no resulta cómodo considerar tal sucesión (como en cambio es oportuno en la teoría) sino referirse a un intervalo variable con continuidad que tienda a $(0, 1]$. De este modo en el ejemplo precedente se habría podido escribir

$$\int_0^1 \frac{dx}{k\sqrt[k]{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{k\sqrt[k]{x}} = \frac{k}{k-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - \epsilon^{\frac{k-1}{k}}) = \frac{k}{k-1}.$$

Lo mismo haremos en los ejemplos sucesivos.

La función $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ es generalmente continua en $[0, 1]$, con los dos puntos singulares $x=0$, $x=1$, en cada una de las cuales resulta infinita de orden $\frac{1}{2} < 1$. Por lo tanto es sumable y se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[2 \operatorname{arcsen} \sqrt{x} \right]_{\epsilon}^{1-\epsilon} = \\ &= 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\operatorname{arcsen} \sqrt{1-\epsilon} - \operatorname{arcsen} \sqrt{\epsilon} \right] = \pi. \end{aligned}$$

La función $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ es generalmente continua en $[0, 1]$ con el punto singular $x=1$, en el que resulta infinita de orden $\frac{1}{3}$. Se tiene así que es sumable y entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{3}{4} (1-x^2)^{\frac{2}{3}} \right]_0^{1-\epsilon} = \\ &= -\frac{3}{4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[1 - (2\epsilon - \epsilon^2)^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

La función $\frac{1}{x^2}$ es generalmente continua en $[0, 1]$ con el punto sin

gular $x=0$; pero se trata de una singularidad evitable puesto

que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} = 0$. De aquí que la función en estudio pueda considerarse continua en $[0, 1]$ y escribir

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left[e^{-\frac{1}{x}} \right]_0^1 = \frac{1}{e}.$$

La función $\frac{\log x}{x}$ es infinita en el punto $x = 0$ sin un orden determinado de infinito (es infinita de orden superior a 1; pero inferior a cualquier $\alpha > 1$). La función no es sumable, ya que en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ se tiene $\left[\frac{\log x}{x}\right] \geq \frac{\log 2}{x}$, quedando esto confirmado con:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{\log x}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_{\epsilon}^1 = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\log \epsilon)^2 = -\infty. (*)$$

La función $\frac{1}{x(\log x)^k}$ es generalmente continua en $[0, 1]$ con los dos puntos singulares $x = 0$, $x = 1$. Son ambos puntos de infinito; en el primero no se tiene un orden de infinito determinado (la función es infinita de orden inferior a 1; pero superior a cualquier $\alpha < 1$), en el segundo tiene orden k . Como $k \geq 1$ la función no es sumable (**). Nótese que la no sumabilidad deriva de la presencia del punto singular $x = 1$. Veamos qué sucede si nos limitamos a un intervalo $[0, a]$ con $0 < a < 1$. Teniendo en cuenta que la función considerada tiene allí signo constante (positivo si k es par, negativo si k es impar) y que se tiene

 (*) La función $\frac{\log x}{x}$ es integrable en $[0, 1]$ porque tiene signo constante (negativo), con integral igual a $-\infty$.

(**) Tal función es integrable porque tiene signo constante, con integral $+\infty$ (si k es par), $-\infty$ (si k es impar).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x (\log x)^k} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{k-1} \left[\frac{1}{(\log \varepsilon)^{k-1}} - \frac{1}{(\log a)^{k-1}} \right] = -\frac{1}{(k-1)(\log a)^{k-1}}, & (\text{si } k \geq 2), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\log |\log a| - \log |\log \varepsilon| \right] = -\infty & (\text{si } k = 1), \end{cases}$$

llegamos a que resulta la sumabilidad en $[0, a]$ solamente si $k \geq 2$ en cuyo caso se tiene

$$\int_0^a \frac{dx}{x(\log x)^k} = -\frac{1}{(k-1)(\log a)^{k-1}}, \quad (\text{si } k \geq 2, \quad 0 < a < 1)$$

Véase el sucesivo ej. 8.

2 - Demostrar que la función $2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ es sumable en $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ y calcular su integral.

La función en consideración tiene el punto singular $x = 0$ (donde no presenta límite determinado). Inmediatamente se concluye que es sumable en $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ pues se trata de una función generalmente continua, acotada en un intervalo acotado (ver "Lecciones", Cap. XXV, n° 6, Teor. II). Se tiene

$$\int_0^{2/\pi} (2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{2/\pi} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx - \int_{\varepsilon}^{2/\pi} \cos \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left[x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^{2/\pi} - \int_{\varepsilon}^{2/\pi} x^2 \cdot \left(-\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} \right) dx - \int_{\varepsilon}^{2/\pi} \cos \frac{1}{x} dx \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{\pi^2} - \varepsilon^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{4}{\pi^2}.$$

3 - Demostrar que la función $\log \operatorname{sen} x$ es sumable en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y calcular su integral

La función tiene el único punto singular $x = 0$. Su sumabilidad resulta de observar que puede escribirse $\log \operatorname{sen} x = \log \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \log x$, con el primer término continuo y el segundo sumable.

La primitiva de $\log \operatorname{sen} x$ no puede expresarse elementalmente; sin embargo la integral $I = \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x \, dx$ puede calcularse con el siguiente artificio:

$$I = \int_0^{\pi/2} \log(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) \, dx = \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx + \\ + \int_0^{\pi/2} \log \cos \frac{x}{2} \, dx,$$

y, realizando en la última integral la sustitución $x = \pi - t$:

$$I = \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{t}{2} \, dt = \frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx.$$

Si en la integral recién escrita se pone $x = 2t$ (*), se obtiene

$$I = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} t \, dt = \frac{\pi}{2} \log 2 + 2 I$$

y, por ende, $I = -\frac{\pi}{2} \log 2$. Se ha obtenido así el resultado clásico (integral de Euler):

$$\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

4 - Estudiar si las siguientes integrales son sumables en los intervalos indicados:

(*) Hemos aplicado dos veces la regla de integración por sustitución; una primera vez en una integral de función continua (lo que no necesita justificarse) y otra vez en una integral de función no continua, lo que es lícito según se verá en el ej. 8.

$$\frac{\log x}{x} \text{ en } [1, +\infty] ; \frac{1}{x(\log x)^k} \text{ en } [2, +\infty], \quad (k \text{ entero } > 0) ;$$

$$e^{-(\alpha+i\beta)x} \text{ en } [0, +\infty], \quad (\alpha > 0, \beta \text{ real}) ; \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \text{ en } [0, +\infty] ;$$

$$\frac{1}{x[1+(\log x)^2]} \text{ en } [1, +\infty] ; \frac{1}{x^3 \sqrt{4x^2-1}} \text{ en } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right] ;$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} \text{ en } [-\infty, +\infty],$$

y, en caso afirmativo, calcular sus respectivas integrales.

La función $\frac{\log x}{x}$ es continua en $[1, +\infty]$ y, para $x \rightarrow +\infty$, es infinitésima sin orden determinado (inferior a 1; pero superior a todo $\alpha < 1$); tal función no es sumable puesto que, para $x \geq 2$, se tiene $\frac{\log x}{x} \geq \frac{\log 2}{x}$ (*).

La función $\frac{1}{x(\log x)^k}$ es continua en $[2, +\infty]$ y, para $x \rightarrow +\infty$ es infinitésima de orden superior a 1, pero inferior a todo $\alpha > 1$. Si observamos que es siempre positiva y que se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{dx}{x(\log x)^k} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k-1} \left[\frac{1}{(\log 2)^{k-1}} - \frac{1}{(\log n)^{k-1}} \right] = \frac{1}{(k-1)(\log 2)^{k-1}}, & (\text{si } k \geq 2), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\log \log n - \log \log 2) = +\infty, & (\text{si } k = 1), \end{cases}$$

se deduce que se logra la sumabilidad solamente en el caso $k \geq 2$, con el resultado

(*) Es, en cambio, integrable, con integral $+\infty$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^k} = \frac{1}{(k-1)(\log 2)^{k-1}}$$

En el cálculo precedente nos hemos referido a una sucesión de intervalos $[2, n]$ tendiente al $[2, +\infty]$; al respecto cabe una observación análoga a la del ej. 1 sobre la posibilidad de usar intervalos variables con continuidad. A sí lo haremos en los ej. sucesivos.

La función $e^{-(\alpha+i\beta)x}$ es continua en $[0, +\infty]$ y, además, sumable pues su módulo no supera a la función sumable $e^{-\alpha x}$. Se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} dx &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h e^{-(\alpha+i\beta)x} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(\alpha+i\beta)h}}{\alpha + i\beta} = \\ &= \frac{1}{\alpha + i\beta} ; \end{aligned}$$

se deduce, separando lo real de lo imaginario,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

La función $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ es continua en $[0, +\infty]$ y, para $x \rightarrow +\infty$, infinitésima de segundo orden; es, entonces, sumable y se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{h}} = 1$$

La función $\frac{1}{x[1+(\log x)^2]}$ es continua en $[1, +\infty]$, infinitésima para $x \rightarrow +\infty$, sin orden determinado (superior a 1; pero inferior a todo $\alpha > 1$). Tratándose de una función positiva y teniéndose

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_1^h \frac{dx}{x [1 + (\log x)^2]} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \log h = \frac{\pi}{2},$$

se llega a la conclusión de que es sumable, pudiéndose escribir

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x [1 + (\log x)^2]} = \frac{\pi}{2}$$

La función $\frac{1}{x^3 \sqrt{4x^2 - 1}}$ tiene en $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right]$ el único punto singular

$x = \frac{1}{2}$ en el que resulta infinita de orden $\frac{1}{2}$, mientras que, para $x \rightarrow +\infty$

es infinitésima de orden 4; es, entonces sumable y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{4x^2 - 1}} &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow +\infty}} \int_{\frac{1}{2} + \epsilon}^h \frac{dx}{x^3 \sqrt{4x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow +\infty}} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{4x^2 - 1} + \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{2x^2} \right]_{\frac{1}{2} + \epsilon}^h = \dots = \pi \end{aligned}$$

La función $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ es continua en $[-\infty, +\infty]$ y, para $x \rightarrow +\infty$ es infinitésima de 4º orden; es, entonces, sumable y se encuentra fácilmente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Véase el sucesivo nº 8

5 - Demostrar que la función $f(x) = x e^{-x^6 \sin^2 x}$ es sumable en $[0, +\infty]$.

Antes de demostrar la tesis observemos que si intuitivamente podría suponerse que una $f(x)$ de signo constante y sumable en un intervalo no acotado, deba necesariamente ser infinitésima en el infinito, este ejemplo pone en evidencia que tal propiedad no tiene validez. En cambio sí es cierta si la $f(x)$ tiene lími

te determinado para $x \rightarrow \infty$ (ver ej. sucesivo).

Por el contrario, la función aquí considerada no tiene límite determinado para $x \rightarrow +\infty$; tiene límite inferior cero y máximo límite $+\infty$ (basta observar que en los puntos $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ la $f(x)$ coincide con la $x e^{-x^6}$ que tiende a cero mientras que en los puntos $x = k\pi$ coincide con la función x que tiende a $+\infty$).

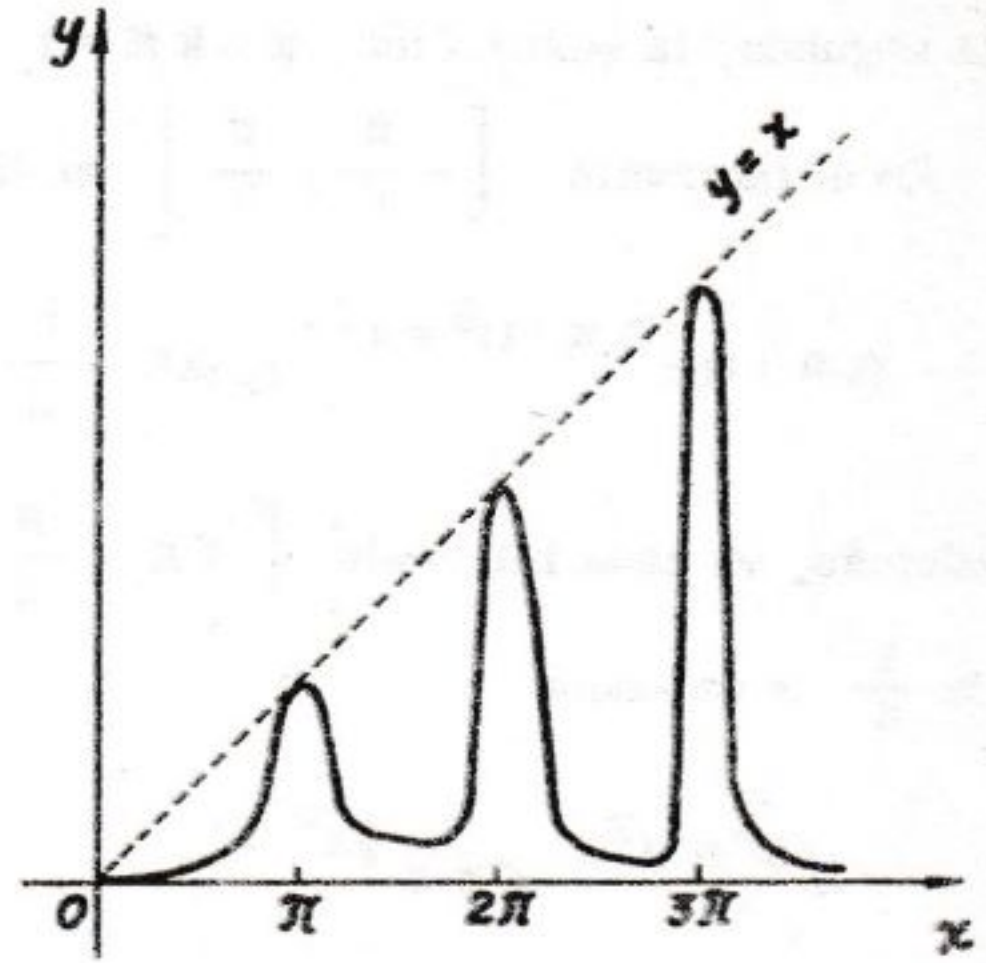


Fig. 68

Nuestra $f(x)$ tiene un gráfico del tipo de la fig. 68, cada vez más aplastado sobre el eje x , pero con infinitas puntas, siempre más angostas y alargadas en los puntos $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$; es bastante intuitivo que una curva como la descrita pueda determinar con el eje x un rectánguloide no acotado, pero de área finita. De todos modos la demostración que haremos a continuación, probará la sumabilidad de la $f(x)$.

Bastará probar, por ejemplo, que la integral

$$I_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{6}} f(x) dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

se mantiene acotada. Se tiene

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/6} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \int_{k\pi - \pi/6}^{k\pi + \pi/6} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi + \pi/6}^{(k+1)\pi - \pi/6} f(x) dx = \\ &= C + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (k\pi + t) e^{-(k\pi + t)^6} \sin^2 t dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\pi/6}^{3\pi/2 - \pi/6} x e^{-x^6} \sin^2 x dx, \end{aligned}$$

habiendo indicado con C el valor fijo de la primera integral y realizado, en la segunda, la sustitución $x = k\pi + t$.

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ se tiene $\sin^2 t \geq \frac{9}{\pi^2} t^2$ (*) y entonces

$$(k\pi + t)e^{-(k\pi + t)^6 \sin^2 t} \leq \left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)e^{-\left(k\pi - \frac{\pi}{6}\right)^6 \cdot \frac{9}{\pi^2} t^2};$$

además, en cada intervalo $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\right]$ se tiene $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ y entonces

$$xe^{-x^6 \sin^2 x} \leq xe^{-\frac{1}{4}x^6}.$$

Se tendrá así

$$I_n \leq C + \sum_{k=1}^n \left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right) \int_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{-\frac{9}{\pi^2} \left(k\pi - \frac{\pi}{6}\right)^6 t^2} dt + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi + \frac{\pi}{6}}^{(k+1)\pi - \frac{\pi}{6}} xe^{-\frac{1}{4}x^6} dx$$

y, con mayor razón, si se tiene en cuenta el carácter positivo y la evidente sumabilidad de las dos funciones que aquí intervienen:

$$I_n < C + \sum_{k=1}^n \left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{9}{\pi^2} \left(k\pi - \frac{\pi}{6}\right)^6 t^2} dt + \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{1}{4}x^6} dx.$$

Si en la primera integral se pone $\frac{3}{\pi} \left(k\pi - \frac{\pi}{6}\right)^3 t = u$ y se indica con C_1 el valor de la segunda integral, se obtiene

(*) Esta desigualdad proviene de escribir que en $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ el arco de senoide $y = \sin t$ está por encima de la cuerda $y = \frac{3}{\pi} t$ que une los puntos extremos $(0, 0)$ y $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$.

$$I_n < C + C_1 + \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{3} \frac{k\pi + \frac{\pi}{6}}{(k\pi - \frac{\pi}{6})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

y entonces, recordando el valor de la integral de Gauss

$$I_n < C + C_1 + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi + \frac{\pi}{6}}{(k\pi - \frac{\pi}{6})^3}$$

Aparece aquí la suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi + \frac{\pi}{6}}{(k\pi - \frac{\pi}{6})^3}$ la que es con-

vergente (pues su término general es, para $k \rightarrow \infty$, infinitésimo del 2º orden); llamando S a dicha suma, puede escribirse

$$I_n < C + C_1 + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3} S,$$

con el segundo miembro independiente de n , lo que prueba lo afirmado al comienzo

6 - Demostrar que si $f(x)$ es sumable en un intervalo no acotado A y si existe el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, necesariamente este límite vale cero.

En efecto, si tal límite tuviese un valor L , por ejemplo positivo (finito o $+\infty$), fijado un h positivo y menor que L existiría un intervalo acotado $A' \subset A$ en el que se tendría $f(x) > h$. Entonces para todo intervalo acotado $[a, b]$ contenido en A' se tendría $\int_a^b f(x) dx > h(b-a)$, de modo que pudiéndose elegir $b-a$ grande a voluntad, la integral $\int_a^b f(x) dx$ no podría describir un conjunto numérico acotado. La $f(x)$ no sería sumable en A' y, por ende, menos aún en A , lo que está contra la hipótesis.

Con razonamiento análogo puede en general probarse que si $f(x)$ es sumable en un intervalo no acotado A se tendrá necesariamente

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq 0, \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq 0.$$

7 - ABSOLUTA CONTINUIDAD DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCION SUMABLE .

Indicaremos en este número una propiedad importante de las integrales de las funciones sumables (de cualquier número de variables) que nos será muy útil en lo que sigue. Tal propiedad se enuncia así:

I - Si $f(P)$ es sumable en el dominio medible A , acotado o no, llamando B a cualquier dominio medible (acotado o no) contenido en A , se tiene

$$\lim_{\text{med } B \rightarrow 0} \int_B f(P) dT = 0. \quad (1)$$

Esto significa que, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta_\epsilon > 0$ tal que, fijado arbitrariamente en A un dominio medible B cuya medida sea inferior a δ_ϵ , se tiene $\left| \int_B f(P) dT \right| < \epsilon$ (*). Esta propiedad suele expresarse diciendo que la integral $\int_B f(P) dT$ es una función absolutamente continua del dominio B .

El teorema I se demuestra así. Si N es el conjunto singular de $f(P)$ en A , existirá (en virtud del teorema II de "Lecciones", Cap. XXV, n° 5) en correspondencia con el ϵ fijado un dominio acotado y medible T_ϵ contenido en $A - N$ para el que resulta $\int_A |f(P)| dT - \int_{T_\epsilon} |f(P)| dT < \frac{\epsilon}{2}$.

(*) Nótese que no importa la posición de B en A ; basta que su medida sea bastante pequeña.

Fijado tal T_ϵ el dominio A queda descompuesto en dos dominios T_ϵ, U_ϵ y la desigualdad precedente puede escribirse $\int_{U_\epsilon} |f(P)| dT < \frac{\epsilon}{2}$.

Llamando $M_\epsilon > 0$ al máximo de $|f(P)|$ en T_ϵ , donde $f(P)$ es continua, afirmamos que nuestra tesis es cierta con $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2M_\epsilon}$. En efecto; si $\text{med } B < \frac{\epsilon}{2M_\epsilon}$ puede escribirse

$$\begin{aligned} \left| \int_B f(P) dT \right| &\leq \int_B |f(P)| dT = \int_{B \cap T_\epsilon} |f(P)| dT + \int_{B \cap U_\epsilon} |f(P)| dT \leq (*) \\ &\leq M_\epsilon \text{med}(B \cap T_\epsilon) + \int_{U_\epsilon} |f(P)| dT \leq M_\epsilon \text{med } B + \frac{\epsilon}{2} < M_\epsilon \frac{\epsilon}{2M_\epsilon} + \\ &+ \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

En el caso en que el dominio A sea no acotado, el teor. I queda completado con el siguiente:

II - Si $f(P)$ es sumable en el dominio medible y no acotado A se puede asociar, a todo $\epsilon > 0$, un intervalo R_ϵ y un número positivo δ_ϵ tal que, llamando B a cualquier dominio medible (acotado o no) contenido en A para el que resulte $\text{med}(B \cap R_\epsilon) < \delta_\epsilon$ (en particular tal de no tener puntos comunes con R_ϵ), se tiene

$$\left| \int_B f(P) dT \right| < \epsilon \quad (**).$$

(*) Si $B \cap T_\epsilon$ (o $B \cap U_\epsilon$) no fuese un dominio, se lo sustituirá con la clausura del conjunto abierto constituido por sus puntos interiores (véase Cap. XXI, ej. 6).

(**) Este teorema nos dice, en esencia, que para lograr que la integral $\int_B f(P) dT$ sea pequeña, no es fundamental que la medida de B sea pequeña (como lo pide el teor. I); basta que sea pequeña la medida de las partes "no muy alejadas" de B .

En efecto; basta retomar la demostración precedente y, con el mismo significado de T_ϵ , U_ϵ , M_ϵ observar que, llamando R_ϵ a cualquier intervalo que contenga a T_ϵ , puede escribirse

$$\begin{aligned} \left| \int_B f(P) dT \right| &\leq \int_B |f(P)| dT = \int_{B \cap T_\epsilon} |f(P)| dT + \int_{B \cap U_\epsilon} |f(P)| dT \leq \\ &\leq M_\epsilon \text{ med}(B \cap T_\epsilon) + \int_{U_\epsilon} |f(P)| dT \leq M_\epsilon \text{ med}(B \cap R_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

donde, apenas sea $\text{med}(B \cap R_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2M_\epsilon}$, resulta $\left| \int_B f(P) dT \right| <$

$$< M_\epsilon \cdot \frac{\epsilon}{2M_\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

8 - REGLAS PARA EL CALCULO DE LAS INTEGRALES DE LAS FUNCIONES SUMABLES DE UNA VARIABLE Y APLICACIONES.

Para el cálculo de las integrales de las funciones sumables de una variable no siempre es necesario apoyarse estrictamente en los procedimientos usados en los ej. 1, 2, 4 que surgen directamente de la definición de tales integrales. Es posible dar normas de cálculo análogas a las válidas en el caso de las integrales de las funciones continuas en intervalos acotados, usadas ya sistemáticamente en "Ejercicios" Cap. IX y XIX (uso de la función primitiva; integración por partes, por sustitución, etc.).

Si $f(x)$ es una función generalmente continua y sumable en un intervalo A , acotado o no, una vez fijado un punto x_0 de A (eventualmente al infinito) y siendo C una constante, queda definida en A [eventualmente también en los puntos $-\infty$, $+\infty$, con valores $F(-\infty)$, $F(+\infty)$ finitos] la función

$$F(x) = C + \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (1)$$

Es fácil ver que:

I - La función $F(x)$ es continua en todo A (eventualmente incluidos los puntos del infinito); en cada punto finito x de A , que no sea singular para la $f(x)$, la $F(x)$ será derivable y se tendrá $F'(x) = f(x)$.

La primera afirmación es consecuencia inmediata de los dos teoremas del ejercicio precedente; en efecto, llamando x_1 a un punto finito, se tendrá $\Delta F = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$ y, por ende, $|\Delta F| < \varepsilon$ apenas se a $|\Delta x| < \delta_\varepsilon$ (teor. I del ej. precedente); por otra parte, si fuese por ejemplo $x_1 = +\infty$, se tendría $\Delta F = F(x) - F(+\infty) = - \int_x^{+\infty} f(t) dt$ y, en consecuencia, $|\Delta F| < \varepsilon$ apenas x sea exterior al intervalo R_ε (teorema II del ej. precedente). Respecto de la segunda observación basta observar que, si x no es punto singular de $f(x)$, existe un intervalo $[x-h, x+h]$, con $h > 0$, donde la $f(x)$ es continua, pudiéndose entonces repetir el razonamiento tal como fue realizado en el teorema de Torricelli-Barrow (ver "Lecciones", Cap. IX, n° 6).

Tras esto, si convenimos en llamar función primitiva de la función $f(x)$, sumable en A , a toda función finita y continua en todo A que tenga por derivada a la $f(x)$ en todos los puntos no singulares de ésta, podremos decir que la (1) define una primitiva de la $f(x)$.

Demostremos que la (1) proporciona todas las posibles primitivas de $f(x)$. Observemos previamente que los puntos singulares de $f(x)$ subdividen A en una sucesión (finita o infinita) de intervalos abiertos A_k .

en cada uno de los cuales la $f(x)$ es continua; por lo tanto, si $F(x)$ y $F_1(x)$ son dos primitivas de la $f(x)$ en A podremos afirmar que en cada A_k debe ser $F_1(x) = F(x) + c_k$, con c_k constante en A_k . Tomando ahora en cuenta la continuidad de $F(x)$ y $F_1(x)$ en todo A (y por ende también en los puntos singulares de $f(x)$) queda excluido que el valor de c_k cambie de un intervalo al otro, pudiéndose entonces escribir $F_1(x) = F(x) + c$, con c constante en todo A , que es lo que queríamos demostrar.

Tenemos así, debido a la (1), que si se reconoce la sumabilidad de la $f(x)$ generalmente continua en un intervalo $[a, b]$ (a cotado o no) y se ha logrado de algún modo determinar una primitiva $F(x)$ (*) de la misma, el cálculo de la integral $\int_a^b f(x) dx$ se obtiene de inmediato con la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Por ejemplo, reexaminando algunos de los ejemplos del ej. 1 y del ej. 4, se habría podido proceder más expeditivamente escribiendo

$$\int_0^1 \frac{dx}{k\sqrt[k]{x}} = \left[\frac{k}{k-1} x^{\frac{k-1}{k}} \right]_0^1 = \frac{k}{k-1} ;$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\beta)x} dx = \left[-\frac{e^{-(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha+i\beta} ;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x[1+(\log x)^2]} = \left[\arctg \log x \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} .$$

(*) Conviene tener presente que bastará encontrar una primitiva $G(x)$ finita y continua en $[a, b]$, excluidos los eventuales puntos al infinito de la función $|f(x)|$ para que la sumabilidad de $|f(x)|$ y, por ende, la de $f(x)$ resulte como consecuencia. Demuéstrelo el lector como ejercicio.

Otras aplicaciones se encontrarán en los ej. sucesivos 9, 10, ..., 25, en los que se usarán también las reglas de integración por partes y por sustitución de las integrales de funciones sumables, que damos a continuación:

II - Sean las funciones $u(x)$, $v(x)$, junto con sus derivadas primeras $u'(x)$, $v'(x)$ generalmente continuas en el intervalo A (acotado o no). En A supónganse, además, sumables los productos $u(x)v'(x)$, $u'(x)v(x)$ y continuo el producto $u(x)v(x)$ [con valores finitos inclusive en los eventuales puntos al infinito de A]. Con estas hipótesis, fijados en A dos puntos cualesquiera a, b (eventualmente al infinito), vale la fórmula de integración por partes:

$$\int_a^b uv' dx = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b u'v dx \quad . \quad (3)$$

Dem. De las hipótesis hechas sigue que la función $uv' + u'v$ es sumable en A y que una primitiva de la misma es la función uv . Entonces, por la (2),

$$\int_a^b uv' dx + \int_a^b u'v dx = \int_a^b (uv' + u'v) dx = \left[uv \right]_a^b, \text{ de donde sigue la}$$

(3).

III - Sea $f(x)$ una función generalmente continua en el intervalo A , (acotado o no) del eje x . Sea $x = \varphi(t)$ una función definida en un intervalo B (acotado o no) del eje t , en el que es creciente o decreciente y admite derivada primera continua. Supóngase, además, que los valores x asumidos por $\varphi(t)$ están siempre contenidos en el intervalo

A. Entonces, si la $f(x)$ es sumable en A , la función $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ resultará sumable en B y, fijados en B arbitrariamente dos puntos t_1, t_2 (eventualmente al infinito) vale la fórmula de integración por sustitución

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (4)$$

Dem. Por comenzar, la hipótesis del crecimiento o decrecimiento de $\varphi(t)$ nos asegura en todos los casos (inclusive si t_1, t_2 son no finitos) que quedan bien determinados (finitos o no) los valores $\varphi(t_1), \varphi(t_2)$. Después se ve inmediatamente que $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ resulta generalmente continua en B . Si designamos como $G(x)$ a una primitiva de $|f(x)|$ en A , es obvio que $\pm G[\varphi(t)]$ (con signo $+$ o $-$ según que $\varphi(t)$ sea creciente o decreciente) es una primitiva de la $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ en B . Gracias a una observación hecha poco antes (en la nota al pie de la pag. 174) se deduce la sumabilidad de $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ en B . Entonces, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en A , resulta que $F[\varphi(t)]$ es primitiva de la $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ en B con lo que, por la (2) se tiene

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} f(x) dx = \left[F(x) \right]_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_{t_1}^{t_2},$$

de lo que sigue la (4).

9 - Calcular las dos integrales

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} \quad (\text{con } a > b > 0);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad (n \text{ entero } > 0) .$$

La sumabilidad de las funciones indicadas en los intervalos considerados es evidente. Con la sustitución $x = 2 \operatorname{arctg} t$ se encuentra, para la (1),

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a+b \cos x} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(t \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{aligned}$$

Con la sustitución $x = \operatorname{tg} t$ resulta, para la (2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t \, dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } n=1, \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

10 - Calcular las integrales

$$(1) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad (n, \text{ entero } \geq 0) .$$

Ya es conocido el carácter de sumable de las funciones aquí consideradas (ver "Lecciones", Cap. XXV, n° 7) .

Poniendo $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$, una integración por partes permite deducir, si $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} x^{n-1} d\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) = \left[-\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{n-1}{2} I_{n-2} . \end{aligned}$$

Aplicando sucesivamente esta relación de recurrencia

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} I_0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdots \frac{2}{2} I_1, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

pero $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, $I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ y

entonces, escribiendo $2n$ o $2n+1$ en lugar de n :

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{n!}{2}$$

En lo que respecta a las integrales (2), si se tiene en cuenta que $x^n e^{-x^2}$ es función par o impar de x según que n sea par o impar, se encuentra de inmediato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad ;$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = 0$$

11 - Calcular el área del dominio plano T limitado por la curva de ecuación

$$x^2(x^2 + y^2) + 4ax^2y - 2a^2x^2 + 3a^2y^2 - 4a^3y + a^4 = 0, \quad (a > 0)$$

Resolviendo la ecuación dada respecto de la y se encuentra

$$y = \frac{a^2 - x^2}{3a^2 + x^2} (2a \pm \sqrt{a^2 - x^2})$$

y de aquí no es difícil reconocer que la curva en consideración tiene el comportamiento evidenciado en la fig. 69

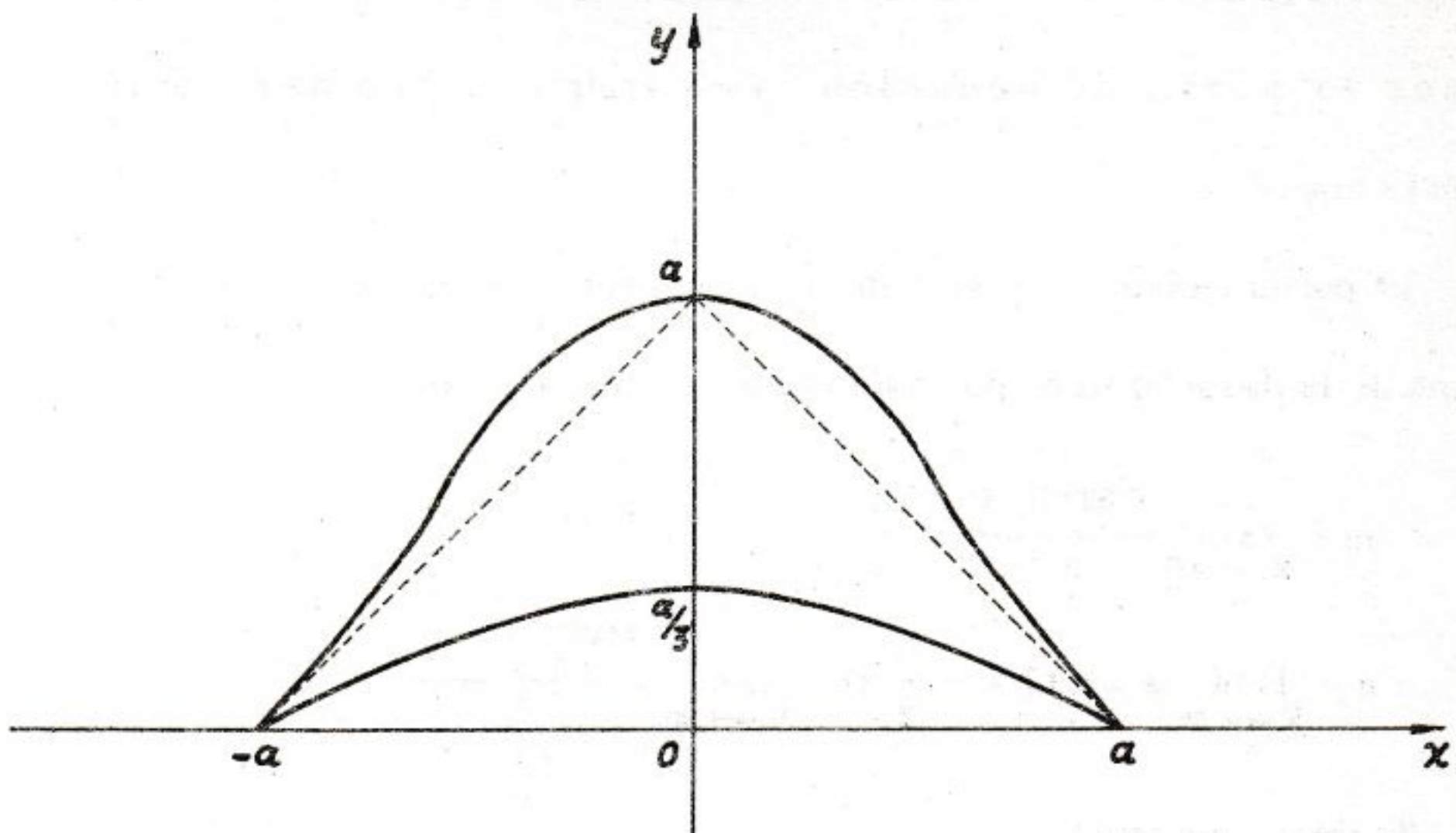


Fig. 69

El dominio T es entonces normal respecto del eje x , por lo que se tiene

$$\text{área } T = \int_{-a}^a 2 \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3a^2 + x^2} dx = 4 \int_0^a \frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3a^2 + x^2} dx.$$

Realizando primero la sustitución $x = a \operatorname{sen} t$ y, sucesivamente, la $\operatorname{tg} t = u$ se encuentra

$$\begin{aligned} \text{área } T &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{3 + \operatorname{sen}^2 t} dt = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^2 t - 5 + \frac{16}{3 + \operatorname{sen}^2 t} \right) dt = \\ &= -9\pi a^2 + 64a^2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{3 + 4u^2} = -9\pi a^2 + 64a^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9 \right) \pi a^2. \end{aligned}$$

12 - Calcular el área del dominio no acotado T encerrado por la curva de ecuación $y = x \operatorname{arctg} x$ y las asíntotas de la misma.

La curva considerada es simétrica respecto del eje y (figura 70). La rama de la derecha tiene por asíntota a $y = mx + n$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = -1.$$

Se tiene, entonces:

$$\text{área } T = 2 \int_0^{+\infty} \left[x \operatorname{arctg} x - \left(\frac{\pi}{2} x - 1 \right) \right] dx =$$

$$= \left[(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) - \frac{\pi}{2} x^2 + 2x \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} x^2 + x \right).$$

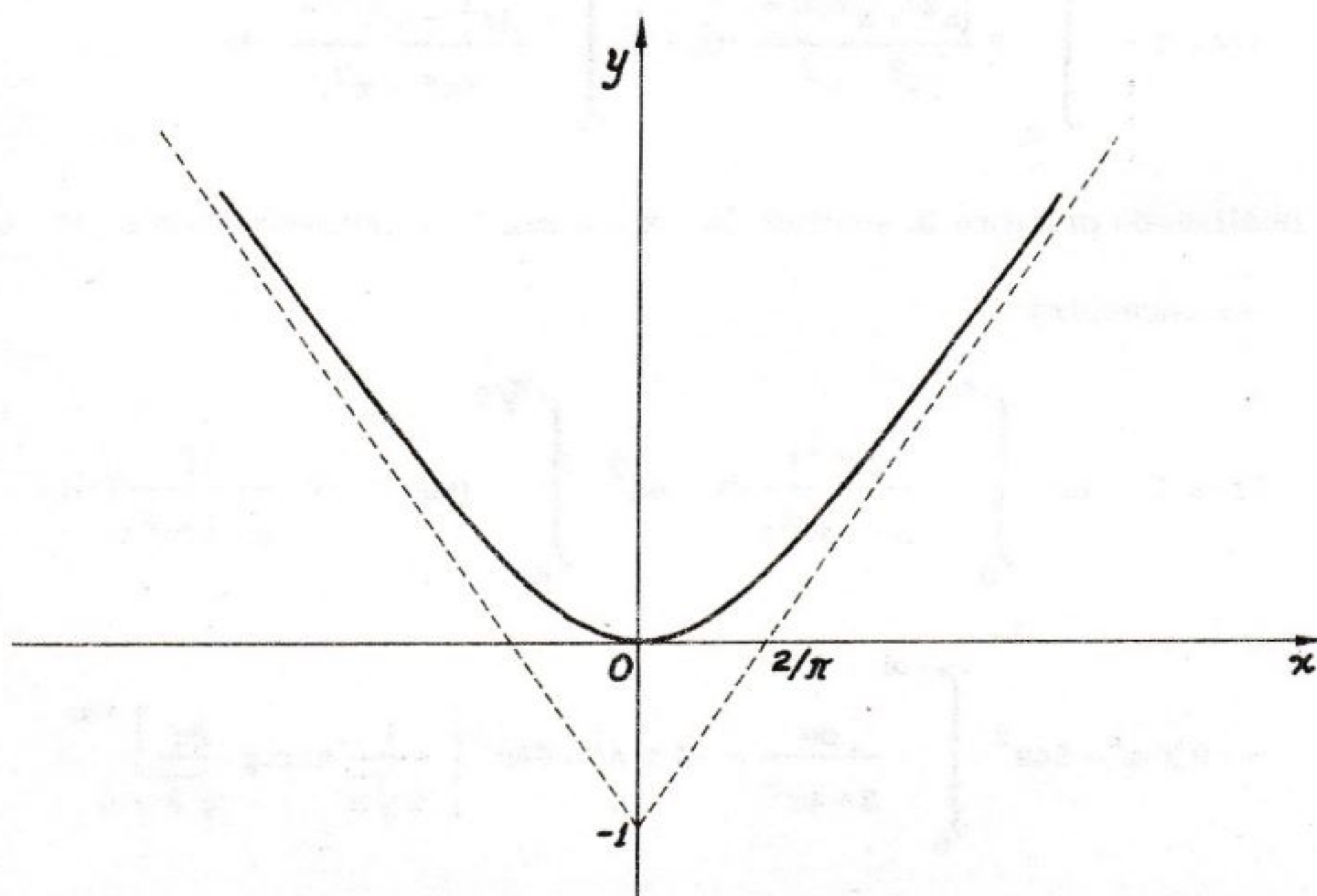


Fig. 70

Para calcular este límite póngase $x = \cotg u$; se obtendrá así

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[\cotg^2 u \cdot \left(\frac{\pi}{2} - u \right) - \frac{\pi}{2} \cotg^2 u + \cotg u \right] =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u (\sen u - u \cos u)}{\sen^2 u}$$

reconociéndose ahora fácilmente que tal límite vale cero . Entonces

$$\text{área } T = \frac{\pi}{2} .$$

13 - Dada la curva plana de ecuación polar $\rho = a e^{-\varphi}$, ($a > 0$) calcular la longitud del arco de tal curva que corresponde al intervalo $[0, +\infty]$ de la anomalía φ .

La curva es una espiral logarítmica ; mientras φ crece de 0 a $+\infty$, ρ decrece de a hasta cero, por lo que la curva describe infinitos giros alrededor del polo O , "enroscándose" siempre más (punto asintó

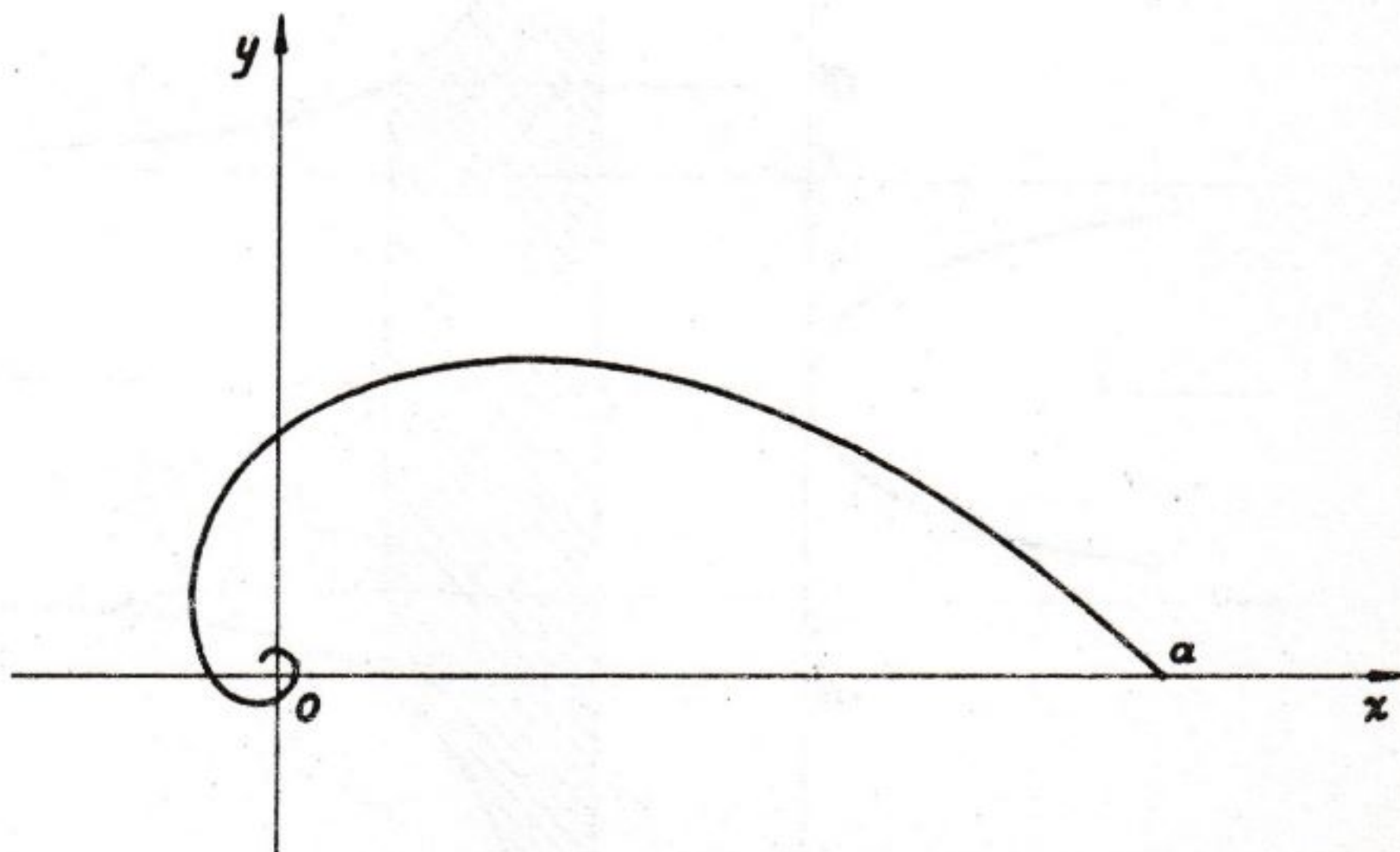


Fig. 71

tico) (fig. 71) . Para la longitud buscada l se tiene

$$l = \int_0^{+\infty} \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\varphi}\right)^2 + \varphi^2} d\varphi = \int_0^{+\infty} \sqrt{a^2 e^{-2\varphi} + a^2 e^{-2\varphi}} d\varphi =$$

$$= a \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\varphi} d\varphi = a \sqrt{2} .$$

14 - Calcular el área del dominio limitado por las rectas $x=1$, $x=2$ y la curva de ecuación $xy^2 - y^2 - x = 0$.

El dominio T que deberemos considerar es no acotado y aparece rayado en la fig. 72. El mismo se compone de un rectángulo de base 1 y altura $2\sqrt{2}$ y de dos dominios normales con respecto al eje y , iguales entre sí. Por lo tanto

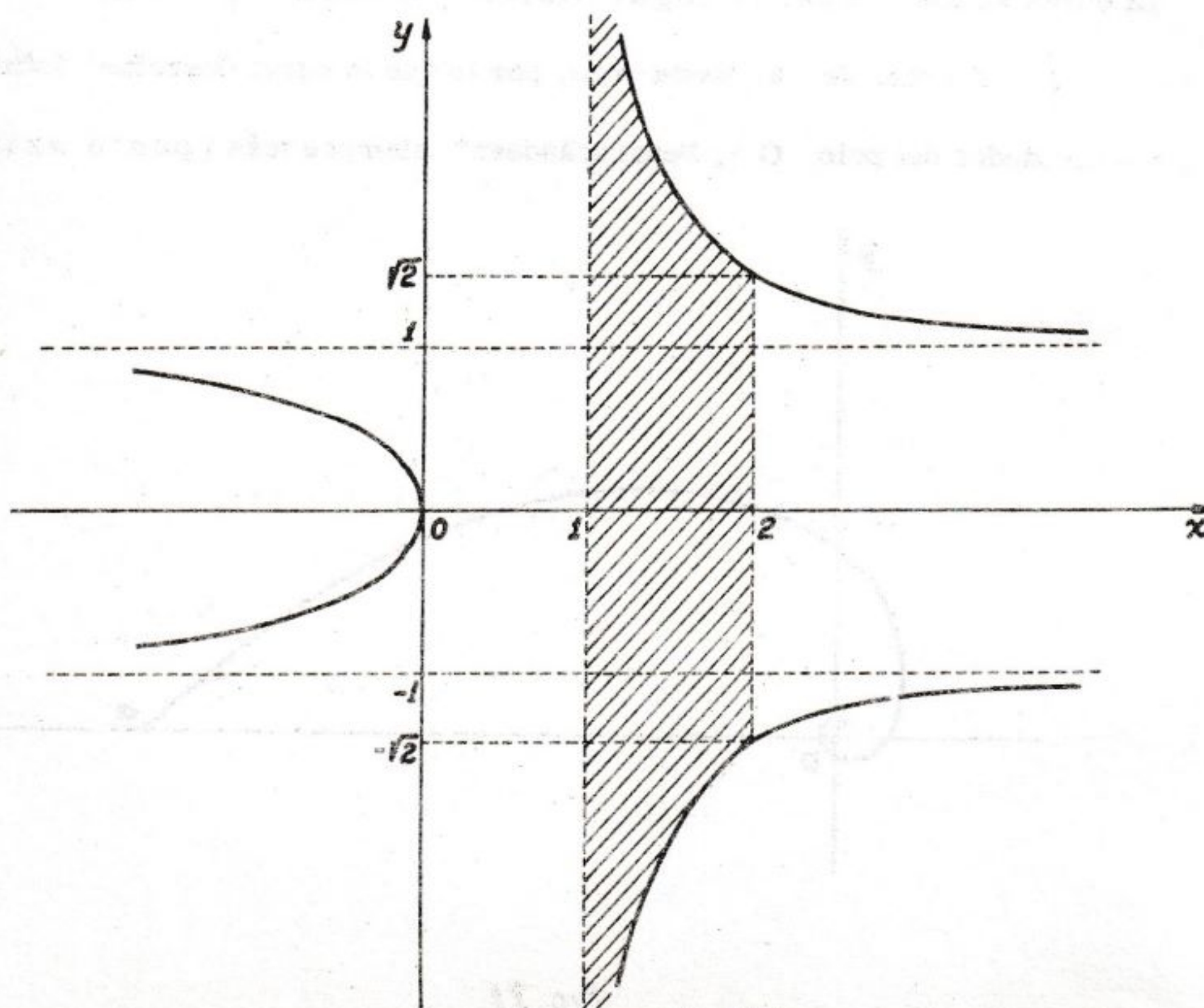


Fig. 72

$$\begin{aligned} \text{área } T &= 2\sqrt{2} + 2 \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{y^2}{y^2 - 1} - 1 \right) dy = 2\sqrt{2} + 2 \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 - 1} = \\ &= 2\sqrt{2} + \left[\log \frac{y-1}{y+1} \right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = 2\sqrt{2} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2} + 2 \log (\sqrt{2} + 1) . \end{aligned}$$

15 - Calcular el área del dominio no acotado T que tiene por frontera la curva de ecuación $x^2(x^2 + y^2) - a^2 y^2 = 0$ y las dos rectas $x = \pm a$.

Se tiene (ver fig. 73)

$$\text{área } T = 4 \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx ,$$

y, transformando la integral con la sustitución $x = a \sin t$

$$\text{área } T = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \pi a^2 .$$

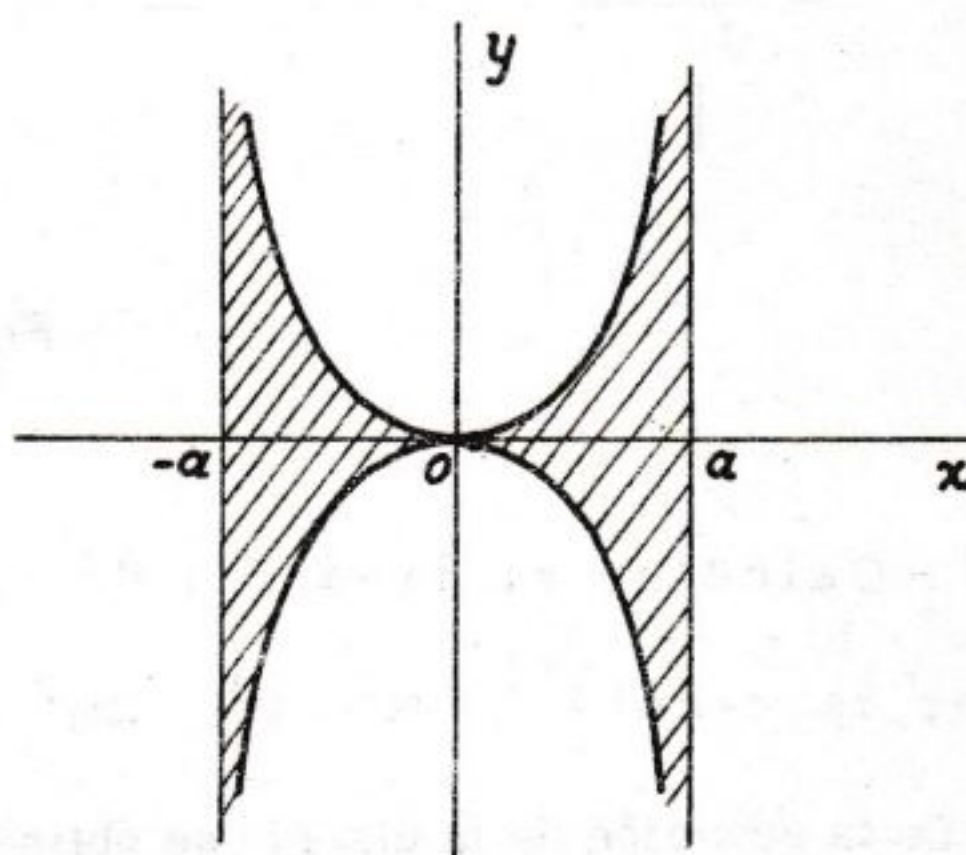


Fig. 73

16 - Calcular el área del dominio no acotado T encerrado por las dos curvas $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ y el eje y .

Las dos curvas se tocan en el punto $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y el dominio T es el

rayado en la fig. 74.

Se tendrá

$$\text{área } T = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \left[\sqrt{2x} - \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 = \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) .$$

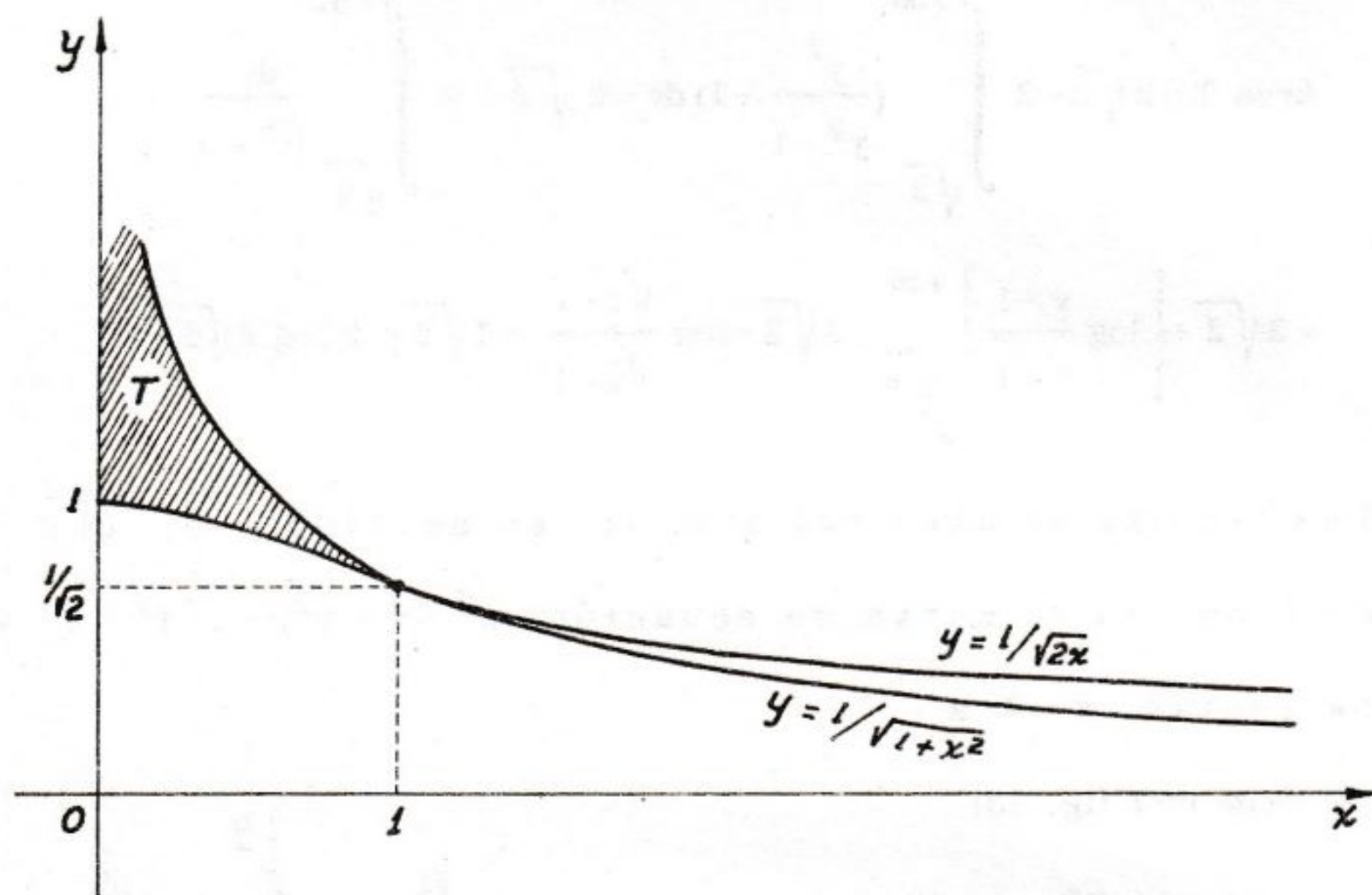


Fig. 74

17 - Calcular el área del dominio no acotado T encerrado por la cisoide $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$ y su asíntota

De la ecuación de la cisoide se obtiene $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ y entonces la asíntota es la recta $x = 2a$ (ver fig. 75).

Resulta así

$$\text{área } T = 2 \int_0^{2a} x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx ,$$

y, realizando la sustitución $\frac{x}{2a-x} = t^2$:

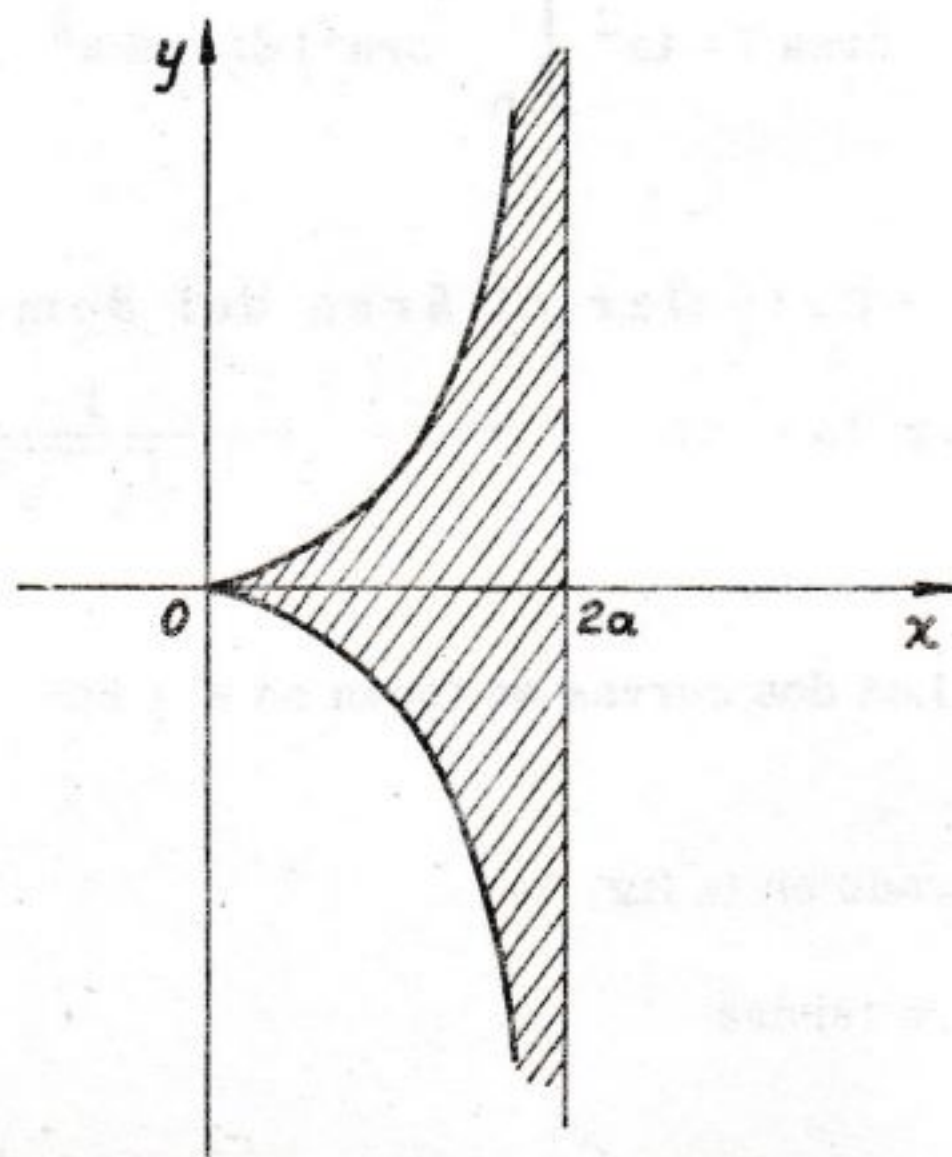


Fig. 75

$$\begin{aligned} \text{área } T &= 16a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^2)^3} dt = 2a^2 \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{3}{1+t^2} - \frac{d}{dt} \left[\frac{3t+5t^3}{(1+t^2)^2} \right] \right\} dt = \\ &= 2a^2 \left[3 \operatorname{arctg} t - \frac{3t+5t^3}{(1+t^2)^2} \right]_0^{+\infty} = 3\pi a^2 . \end{aligned}$$

18 - Calcular el área del dominio no acotado T' encerrado por la curva de ecuación $x(x^2 + y^2) - 2ax^2 - ay^2 = 0$ y su asíntota.

Procediendo como en el ej. precedente se encuentra

$$\text{área } T' = 2 \int_0^{2a} x \sqrt{\frac{2a-x}{x-a}} dx = \dots = \frac{5}{4} \pi a^2 .$$

19 - Calcular los volúmenes de los sólidos no acotados S, S' obtenidos haciendo rotar los dominios T, T' de los dos ejercicios precedentes alrededor de sus respectivas asíntotas.

Analicemos la cuestión para el sólido S , refiriéndonos a la fig. 75.

Un plano perpendicular al eje y corta S según un círculo de radio $2a - x(y)$, siendo $x = x(y)$ la función definida implícitamente por la ecuación de la cisoide. Teniendo en cuenta la simetría de S respecto del plano $y = 0$, se tendrá entonces

$$\text{volumen } S = 2\pi \int_0^{+\infty} [2a - x(y)]^2 dy .$$

Busquemos ahora las ecuaciones paramétricas racionales de la cisoide cortándola con las rectas $y = tx$ que pasan por su punto doble (cúspide) O . Se encuentra

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at^3}{1+t^2},$$

y entonces, si en la integral precedente se realiza la sustitución $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$ la función $x(y)$ toma la forma $\frac{2at^2}{1+t^2}$. Se tiene así

$$\begin{aligned} \text{volumen } S &= 2\pi \int_0^{+\infty} \left(2a - \frac{2at^2}{1+t^2}\right)^2 d\left(\frac{2at^3}{1+t^2}\right) = 16\pi a^3 \int_0^{+\infty} \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^4} dt = \\ &= 16\pi a^3 \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{4}}{1+t^2} + \frac{d}{dt} \left[\frac{-\frac{1}{4}t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^5}{(1+t^2)^3} \right] \right\} dt = \dots = 2\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

Procediendo para el sólido S' de manera totalmente análoga se obtendrá

$$\begin{aligned} \text{volumen } S' &= 2\pi \int_0^{+\infty} \left[x(y) - a \right]^2 dy = 2\pi \int_0^{+\infty} \left(a \frac{2+t^2}{1+t^2} - a \right)^2 d\left(a \frac{t(2+t^2)}{1+t^2} \right) = \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{+\infty} \frac{2+t^2+t^4}{(1+t^2)^4} dt = \dots = \frac{3}{4} \pi^2 a^3. \end{aligned}$$

20 - Calcular el área del dominio no acotado T comprendido entre las dos curvas que tienen las ecuaciones $2ay = x^2$,

$$2ay = x^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + x^2}.$$

Se encuentra

$$\text{área } T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} \left(x^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + x^2} - x^2 \right) dx = \dots = \frac{1}{2} \pi b^2.$$

21 - Calcular el área del dominio T encerrado por la curva

de ecuación $(x^2 + y^2)(ax^2 + by^2) = 4a^2(b-a)x^2$, (con $b > a > 0$).

La curva se compone de dos lazos simétricos respecto del eje y , tangentes a tal eje en el origen. Usando coordenadas polares se encuentra

$$\text{área } T = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{4a^2(b-a)\cos^2\varphi}{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi} d\varphi$$

y transformando esta integral con la sustitución $\operatorname{tg} \varphi = t$:

$$\text{área } T = 8a^2(b-a) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(a+bt^2)} = \dots = 4\pi a^2 \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right)$$

22 - Demostrar que para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sin^n \alpha} \int_0^\alpha \sin^n \varphi d\varphi = \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

Transformemos la (1) realizando en la integral que allí interviene la sustitución $\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right)^n = \frac{1}{x}$. Mientras φ crece de 0 hasta α , la nueva variable x decrece de $+\infty$ hasta 1. Después se tiene

$$\varphi = \arcsen \left(x^{-\frac{1}{n}} \sin \alpha \right), \quad d\varphi = -\frac{\sin \alpha}{n} \cdot \frac{dx}{x \sqrt{x^{\frac{2}{n}} - \sin^2 \alpha}},$$

de modo que la (1) queda transformada en la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^{2/n} - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (2)$$

Teniendo ahora en cuenta que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$, la (2) puede también escribirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{x^{2/n} - \sin^2 \alpha}} \right) \frac{dx}{x^2} = 0 \quad (3)$$

Entonces, para $x \geq 1$ se tiene

$$0 \leq \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sqrt{x^{2/n} - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{x^{2/n} - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\cos \alpha \sqrt{x^{2/n} - \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{x^{2/n} - 1}{\cos \alpha \sqrt{x^{2/n} - \sin^2 \alpha} (\sqrt{x^{2/n} - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha)} \leq \frac{x^{2/n} - 1}{2 \cos^3 \alpha}$$

y entonces, llamando I_n a la integral que figura en (3), se obtendrá la siguiente desigualdad (válida para $n \geq 3$):

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \int_1^{+\infty} \frac{x^{2/n} - 1}{x^2} dx = \frac{1}{(n-2) \cos^3 \alpha}$$

de la que sigue inmediatamente la (3).

23 - Calcular la distancia media de la tierra al sol.

La órbita de la tierra T es una elipse de la que el sol S ocupa uno de los focos. Poniendo $\overline{ST} = \rho$, esta distancia se expresa, en función de la anomalía φ definida por la fig. 76 según una conocida fórmula de la Geometría Analítica

$$\rho = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad (1)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita y ϵ su excentricidad.

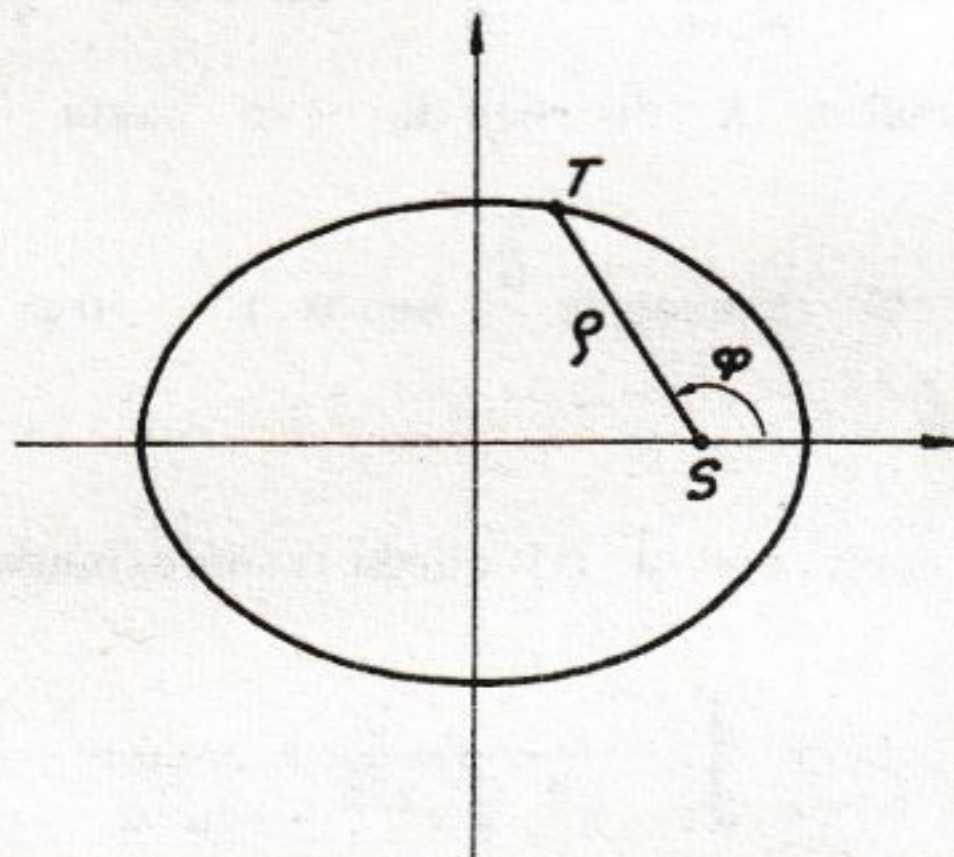


Fig. 76

Queda sobreentendido que la distancia media buscada es el valor medio de ρ , considerándolo función del tiempo t , durante un año (y no como función de la anomalía φ , lo que llevaría a otro resultado; ver "Ejer-

cicios", Cap. IX, ej. 4) . De ahí que la (1) no sea suficiente: es necesario tener en cuenta cómo varía φ en función de t , es decir de la segunda ley de Kepler, en virtud de la cual la velocidad areolar $\frac{1}{2} \varphi^2 \frac{d\varphi}{dt}$ es constante ($= \frac{c}{2}$) . Por lo tanto la distancia media buscada δ vendrá dada por

$$\delta = \frac{\int \varphi dt}{\int dt},$$

con las integrales extendidas al intervalo de un año, teniéndose así, pasando a la variable φ

$$\delta = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi \frac{\varphi^2 d\varphi}{c}}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{c}} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^3 d\varphi}{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 d\varphi},$$

o también, teniendo en cuenta la (1) y el hecho que el denominador representa el doble del área de la elipse (cuyos semiejes son a , $a \sqrt{1 - \epsilon^2}$) :

$$\delta = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^3 (1 - \epsilon^2)^3}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^3} d\varphi}{2 \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{a(1 - \epsilon^2)^{5/2}}{2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^3}.$$

Realizando la sustitución $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u$ se encuentra

$$\delta = \frac{a(1 - \epsilon^2)^{5/2}}{\pi (1 - \epsilon)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + u^2)^2}{(k^2 + u^2)^3} du, \quad \text{con } k^2 = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}.$$

Según la fórmula de descomposición de Hermite, debe ponerse

$$\frac{(1 + u^2)^2}{(k^2 + u^2)^3} = \frac{A}{k^2 + u^2} + \frac{d}{du} \left[\frac{Bu + Cu^3}{(k^2 + u^2)^2} \right] \quad (2)$$

e imaginando que A , B , C , son ya conocidos, se encontrará

$$\delta = \frac{a(1-\epsilon^2)^{5/2}}{\pi(1-\epsilon)^3} \left[\frac{A}{k} \operatorname{arctg} \frac{u}{k} + \frac{Bu + Cu^3}{(k^2+u^2)^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{a(1-\epsilon^2)^{5/2}}{\pi(1-\epsilon)^3} \cdot \frac{A}{k} \pi = \frac{a(1-\epsilon^2)^{5/2}}{(1-\epsilon)^3} \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} A.$$

• Basta entonces calcular el valor de A : volviendo a la (2) se obtiene fácilmente

$$A = \frac{3 + 2k^2 + 3k^4}{8k^4} = \frac{1 + \frac{1}{2} \epsilon^2}{(1 + \epsilon)^2}$$

y entonces, tras algunas simplificaciones, se concluye que

$$\delta = a \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \right)$$

24 - INTEGRALES QUE SE DEDUCEN DE LA DE EULER; OTRAS INTEGRALES ANALOGAS.

De la integral de Euler (ver ej. 3) :

$$\int_0^{\pi/2} \log \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

pueden obtenerse fácilmente los siguientes resultados:

$$\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x \, dx = -\pi \log 2, \quad (1)$$

(escribáse $\int_0^{\pi} = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}$ y realícese en la segunda integral la sus-

titución $x = \pi - t$) ;

$$\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2, \quad (2)$$

(mediante la sustitución $x = \frac{\pi}{2} - t, \dots$) ;

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\pi}{2} \log 2, \quad (3)$$

(realícese la sustitución $x = \frac{1}{\sin t}$);

$$\int_0^{\pi/2} x \cotg x dx = \frac{\pi}{2} \log 2, \quad (4)$$

(intégrese por partes);

$$\int_0^1 \frac{\arcsen x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log 2, \quad (5)$$

(mediante la sustitución $x = \sin t$ queda reducida a la precedente)

$$\int_0^{\pi} x \log \sin x dx = -\frac{\pi^2}{2} \log 2, \quad (6)$$

(llamando I a la integral buscada y poniendo $x = \pi - t$ se encuentra $I = \pi \int_0^{\pi} \log \sin t dt - I$);

$$\int_0^{2\pi} \log \cos^2 \frac{x}{2} dx = -4\pi \log 2, \quad (7)$$

(escribase $\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$ y, en la segunda, póngase $x = 2\pi - t$);

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0, \quad (8)$$

(póngase $x = \tg t$).

Análoga a la integral de Euler se considera a la integral de Bertrand:

$$\int_0^{\pi/4} \log (1 + \tg x) dx = \frac{\pi}{8} \log 2. \quad (9)$$

Indicando con I al primer miembro póngase después $x = \frac{\pi}{4} - t$ y téngase presente que $1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - t \right) = 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg} t}$; se encuentra así

$$I = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \log \frac{2}{1 + \operatorname{tg} t} dt = \frac{\pi}{4} \log 2 - I$$

y, por ende, la (9). De ésta, además, pueden deducirse estas otras:

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2, \quad (\text{póngase } x = \operatorname{tg} t); \quad (10)$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} dx = \frac{\pi}{8} \log 2, \quad (\text{intégrese por partes}). \quad (11)$$

Demos otros ejemplos de integrales definidas que se calculan con artificios análogos. Se tiene

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}). \quad (12)$$

Indicando con I al 1^{er} miembro escribamos $I = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}$, poniendo

do $x = \pi - t$ en la segunda integral, con lo que se llega fácilmente a la $I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt$; si calculamos esta última integral con la sustitución $\cos t = u$ se llega a la (12).

Procediéndose en forma similar puede demostrarse la

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}. \quad (13)$$

Observemos por último la fórmula

$$\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{4} \quad (14)$$

que es una consecuencia de la (13) (basta poner $x = \cos t$),

25 - INTEGRALES QUE SE DEDUCEN DE LA DE GAUSS.

De la conocida integral de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{o también} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

pueden deducirse muchas consecuencias interesantes. Por ejemplo se encuentran inmediatamente las siguientes fórmulas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}, \quad (a > 0), \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}, \quad (\alpha > 0); \quad (2)$$

basta realizar las sustituciones $x = \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}$, $x = \frac{t}{\alpha}$, respectivamente.

Otras consecuencias, menos evidentes, son:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a^2 x^2} - e^{-b^2 x^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi} (b-a), \quad (3)$$

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx = \sqrt{\pi} (b-a), \quad (a \geq 0, \quad b \geq 0). \quad (4)$$

Basta demostrar la (3), ya que de ésta sigue la (4) mediante la sustitución $x = \frac{1}{t}$.

Con ese objeto escribamos la (2) bajo la forma $2\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}$,

($\alpha > 0$) e integremos ambos miembros respecto de α entre los límites a , b ; se obtiene así

$$\int_a^b 2\alpha d\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sqrt{\pi} (b-a),$$

e, intercambiando el orden de las integraciones (ver ej. 38, 50)

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b 2\alpha e^{-\alpha^2 x^2} d\alpha = \sqrt{\pi} (b-a).$$

La integral \int_a^b se calcula de modo elemental y, efectuado tal cálculo se obtiene inmediatamente la (3).

Demos un tercer grupo de fórmulas de interés:

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2(x^2 + \frac{1}{x^2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2a^2}, \quad (a > 0), \quad (5)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(p^2 x^2 + \frac{q^2}{x^2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-2pq}, \quad (p, q > 0), \quad (6)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\frac{p^2}{x^2} + q^2 x^2)}}{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-2pq}, \quad (p, q > 0), \quad (7)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\frac{p^2}{x} + q^2 x)}}{x^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-2pq}, \quad (p, q > 0), \quad (8)$$

Para demostrar la (5), observemos ante todo que equivale a la

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2(x - \frac{1}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \text{ Si llamamos } I \text{ a esta última integral, puede}$$

escribirse $I = \int_0^1 e^{-a^2(x - \frac{1}{x})^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-a^2(x - \frac{1}{x})^2} dx$ y, realizando en

la primer integral la sustitución $x = \frac{1}{t}$

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-a^2(t - \frac{1}{t})^2} \frac{dt}{t^2} + \int_1^{+\infty} e^{-a^2(x - \frac{1}{x})^2} dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} e^{-a^2(x - \frac{1}{x})^2} (1 + \frac{1}{x^2}) dx ;$$

transformando ahora esta última integral con la sustitución $x - \frac{1}{x} = t$ se en-

cuentra $I = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 t^2} dt$, o sea, por la (2) $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$, que es lo que

queríamos demostrar.

La (6) se deduce de inmediato de la (5) poniendo $a = \sqrt{pq}$, $x = \sqrt{\frac{p}{q}} t$; la (7) de la (6) con la sustitución $x = \frac{1}{t}$; la (8) de la (7) con $x = \sqrt{t}$.

26 - EL SEGUNDO TEOREMA DE LA MEDIA.

Demos aquí un teorema que es de aplicación en numerosas demostraciones; suele designárselo como segundo teorema de la media y se enuncia de la siguiente manera:

I - Supónganse definidas en un intervalo $[a, b]$, acotado o no, una función $f(x)$ sumable y una función $\varphi(x)$ generalmente continua, monótona y acotada. Fijados arbitrariamente dos números H, K tales que se verifique $H \leq \varphi(x) \leq K$ demostraremos que existe al menos un punto ξ de $[a, b]$ para el que resulta

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = H \int_a^{\xi} f(x) dx + K \int_{\xi}^b f(x) dx, \quad [\text{si } \varphi(x) \text{ es no decreciente}] \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = K \int_a^{\xi} f(x) dx + H \int_{\xi}^b f(x) dx, \quad \text{[si } \varphi(x) \text{ es no creciente]} \quad (2)$$

Dem. Observemos previamente que, por ser sumable la $f(x)$ y acotada la $\varphi(x)$, puede asegurarse la sumabilidad de $f(x) \varphi(x)$, de modo que tienen sentido las integrales escritas en el primer miembro de (1), (2). Observe-mos después que las (1), (2) pueden también escribirse

$$\int_a^b f(x) [\varphi(x) - H] dx = (K - H) \int_a^{\xi} f(x) dx, \quad \text{[si } \varphi(x) \text{ es no decreciente]} \quad (1')$$

$$\int_a^b f(x) [K - \varphi(x)] dx = (K - H) \int_{\xi}^b f(x) dx, \quad \text{[si } \varphi(x) \text{ es no creciente]} \quad (2')$$

Entonces, si ponemos $\varphi(x) - H = g(x)$ para el 1^{er} caso, $K - \varphi(x) = g(x)$ para el segundo, $K - H = L$ en ambos, la $g(x)$ resulta en todos los casos no decreciente y tal de cumplir $0 \leq g(x) \leq L$ con lo que las (1'), (2') pueden reunirse en la única fórmula

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = L \int_a^{\xi} f(x) dx \quad (3)$$

Viceversa, de ésta pueden deducirse las (1'), (2') y entonces todo se reduce a probar que, si $f(x)$ es sumable y $g(x)$ es generalmente continua, no negativa, no decreciente y superiormente acotada, fijado arbitrariamente un número L tal que sea $g(x) \leq L$ existirá en $[a, b]$ un punto ξ para el que vale la (3).

Comencemos suponiendo que $[a, b]$ sea acotado y demostremos que, efectuada cualquier subdivisión de $[a, b]$ en intervalos parciales, con norma δ , mediante los puntos $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \equiv b$ y llamando ξ_i a un punto arbitrariamente elegido en (x_{i-1}, x_i) se tiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (4)$$

En efecto; teniendo en cuenta lo dicho en el ej. 7, dado $\epsilon > 0$ existe un $\sigma_\epsilon > 0$ tal que, para todo intervalo I contenido en $[a, b]$, de amplitud menor que σ_ϵ , resulta $\int_I |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{L}$.

Entonces, tras suponer $\delta < \sigma_\epsilon$, se tendrá

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_a^b f(x) g(x) dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(\xi_i) - g(x)] f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(\xi_i) - g(x)| |f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| dx < \\ &< \frac{\epsilon}{L} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \frac{\epsilon}{L} [g(b) - g(a)] \leq \epsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba la (4). En lugar de ésta podemos también escribir la siguiente relación

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx + [L - g(\xi_n)] \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \right\} = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad (4')$$

ya que el término agregado es, obviamente, infinitésimo para $\delta \rightarrow 0$.

Indiquemos con S la expresión que figura entre llaves en el primer miembro de (4') e introduzcamos la función

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt \quad (5)$$

que resulta continua en $[a, b]$ (ver ej. 8). Podemos entonces escribir

$$S = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) [F(x_{i-1}) - F(x_i)] + [L - g(\xi_n)] F(x_{n-1}) =$$

$$= F(a) g(\xi_1) + \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i) [g(\xi_{i+1}) - g(\xi_i)] + F(x_{n-1}) [L - g(\xi_n)]$$

y observar que en esta última expresión los coeficientes que afectan los valores de F son, en su totalidad, no negativos [por las hipótesis hechas sobre $g(x)$ y sobre L] y de suma igual a L . Resulta así que, si m y M designan al mínimo y al máximo de $F(x)$ en $[a, b]$ se tendrá $Lm \leq S \leq LM$, y, pasando al límite para $\delta \rightarrow 0$ y recordando la (4') :

$$Lm \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq LM \quad . \quad (6)$$

Demostremos ahora que esta desigualdad vale también si $[a, b]$ es no acotado. Recordemos (ej. 8) que también en este caso la $F(x)$ definida por la (5) resulta finita y continua en $[a, b]$ (inclusive en los puntos al infinito) y, por ende, admite todavía mínimo m y máximo M . Dicho esto sea $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... una sucesión no decreciente de intervalos acotados que tiende al $[a, b]$; entonces, por la demostración precedente, se tendrá

$$Lm_n \leq \int_{a_n}^{b_n} f(x) g(x) dx \leq LM_n \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

donde m_n , M_n indican el mínimo y el máximo de $F(x)$ en $[a_n, b_n]$.

Para $n \rightarrow \infty$ se ve inmediatamente que $m_n \rightarrow m$, $M_n \rightarrow M$ mientras una fácil aplicación del segundo teorema del ejercicio 7 muestra que

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x) g(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) g(x) dx \quad , \quad \text{con lo que de la (7) sigue la (6)} \quad .$$

Establecida así para todos los casos la validez de la (6) se tendrá, por la continuidad de $F(x)$ en $[a, b]$, que existe en éste un punto ξ para el que resulta:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = L F(\xi) :$$

pero, recordando la (5), llegamos a la (3), que es lo que queríamos demostrar.

27 - EJEMPLOS DE FUNCIONES SUMABLES DE VARIAS VARIABLES Y CALCULO DE SUS INTEGRALES (ver "Lecciones", Cap. XXV, n° 5, 6, 7).

Demostrar que la función $\frac{1}{x+y}$ es sumable en el cuadrado A ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) y calcular la integral relativa.

La función considerada es generalmente continua en A con un solo punto singular en el origen O . Su sumabilidad resulta, por ejemplo, de observar que en A es siempre $0 \leq \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Para calcular la integral basta fijar una sucesión no decreciente de dominios T_n que tienda a $A - \{O\}$; por ejemplo, asumir T_n coincidente con el rectángulo $(\frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1)$ y calcular el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} \frac{dx dy}{x+y} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dy}{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\log(x+1) - \log\left(x+\frac{1}{n}\right) \right] dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \log 2 - 2\left(\frac{1}{n}+1\right) \log\left(\frac{1}{n}+1\right) + \frac{2}{n} \log \frac{2}{n} \right] = 2 \log 2 ; \end{aligned}$$

se tiene, entonces,

$$\iint_A \frac{dx dy}{x+y} = 2 \log 2 .$$

También se habría podido introducir un rectángulo variable con continuidad

$$T_\epsilon \quad (\epsilon \leq x \leq 1, \quad \epsilon \leq y \leq 1) \quad (\text{con } \epsilon > 0) \quad \text{y calcular el } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{T_\epsilon} \frac{dx dy}{x+y} .$$

28 - Demostrar que la función $\frac{x-y}{(x+y)^2}$ es sumable en el triángulo A ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$) y calcular la integral relativa.

La función considerada es generalmente continua en A con un punto singular (en el origen O); es no negativa en A y, por lo tanto, para probar su sumabilidad bastará constatar que, considerando por ejemplo el trapecio T_ϵ ($\epsilon \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$) (con $\epsilon > 0$), existe finito el $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{T_\epsilon} \frac{x-y}{(x+y)^2} dx dy$ cuyo valor constituirá, precisamente, el de la integral buscada.

Tal límite es igual a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 dx \int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^2} dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 (1 - \log 2) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 - \log 2) (1 - \epsilon) = 1 - \log 2 \end{aligned}$$

29 - Calcular el potencial de una esfera homogénea en un punto Q interior de la misma (cfr. Cap. XXII, ej. 50).

Con las mismas notaciones del ej. citado se debe considerar la integral

$$V(Q) = V(r) = \mu \iiint_S \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}}, \quad (1)$$

pero bajo la hipótesis $r < R$. Sigue que la función que debemos integrar no es ya continua en S sino generalmente continua con Q como único punto singular (corresponde a $\rho = r$, $\theta = 0$) en el que resulta infinita.

El orden de infinito es 1 y entonces la función será sumable en S y la integral (1) mantiene su significado.

Suponiendo $r > 0$ la integral puede ser calculada como límite para $\epsilon \rightarrow 0$ de las integrales calculadas sobre los dominios constituidos por las esferas de centro O y radio $r - \epsilon$ y los estratos esféricos de radios $r + \epsilon$, R .

Se tiene así:

$$\begin{aligned}
 V(r) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r-\epsilon} \varrho^2 d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \theta}} + \right. \\
 &+ \left. \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r+\epsilon}^R \varrho^2 d\varrho \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \theta}} \right\} = \\
 &= 2\pi\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{r-\epsilon} \varrho^2 \frac{1}{r\varrho} \left[\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \theta} \right]_0^\pi d\varrho + \right. \\
 &+ \left. \int_{r+\epsilon}^R \varrho^2 \frac{1}{r\varrho} \left[\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \theta} \right]_0^\pi d\varrho \right\} = \\
 &= \frac{2\pi\mu}{r} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{r-\epsilon} \varrho [(r+\varrho) - (r-\varrho)] d\varrho + \right. \\
 &+ \left. \int_{r+\epsilon}^R \varrho [(r+\varrho) - (\varrho-r)] d\varrho \right\} = \\
 &= \frac{2\pi\mu}{r} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \int_0^{r-\epsilon} \varrho^2 d\varrho + 2r \int_{r+\epsilon}^R \varrho d\varrho \right\} = \dots = 2\pi\mu \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right).
 \end{aligned}$$

Este resultado vale también para $r = 0$ como de inmediato se lo constata volviendo a la (1).

30 - Demostrar que la función $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ no es sumable en el cuadrado $A (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$.

La función en estudio no tiene signo constante en A .

Considérese el rectángulo T_ϵ ($\epsilon \leq x \leq 1$, $\epsilon \leq y \leq 1$) y la integral del valor absoluto de la función sobre tal rectángulo. Se tendrá

$$\begin{aligned} \iint_{T_\epsilon} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_\epsilon^1 dx \int_\epsilon^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + \int_\epsilon^1 dx \int_x^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \\ &= \int_\epsilon^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=\epsilon}^{y=x} dx + \int_\epsilon^1 \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=x}^{y=1} dx = \\ &= \int_\epsilon^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \right) dx = -\log \epsilon - \operatorname{arctg} \frac{1}{\epsilon} + \operatorname{arctg} \epsilon \end{aligned}$$

y esta cantidad tiende a $+\infty$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, lo que prueba la tesis.

El lector podrá hacer ver que la función considerada tampoco es integrable en A .

31 - Considérese la función $\frac{1}{(x+y)^\alpha}$ (con $\alpha > 0$) en el triángulo A ($-1 \leq x \leq 1$, $-x \leq y \leq 1$) y determínense (si existen) los valores de α para los que la función es sumable en A .

La función considerada tiene como puntos singulares todos los puntos del lado MN de la frontera de A (fig. 77); es no negativa, por lo que, para establecer si es o no sumable se puede por e -

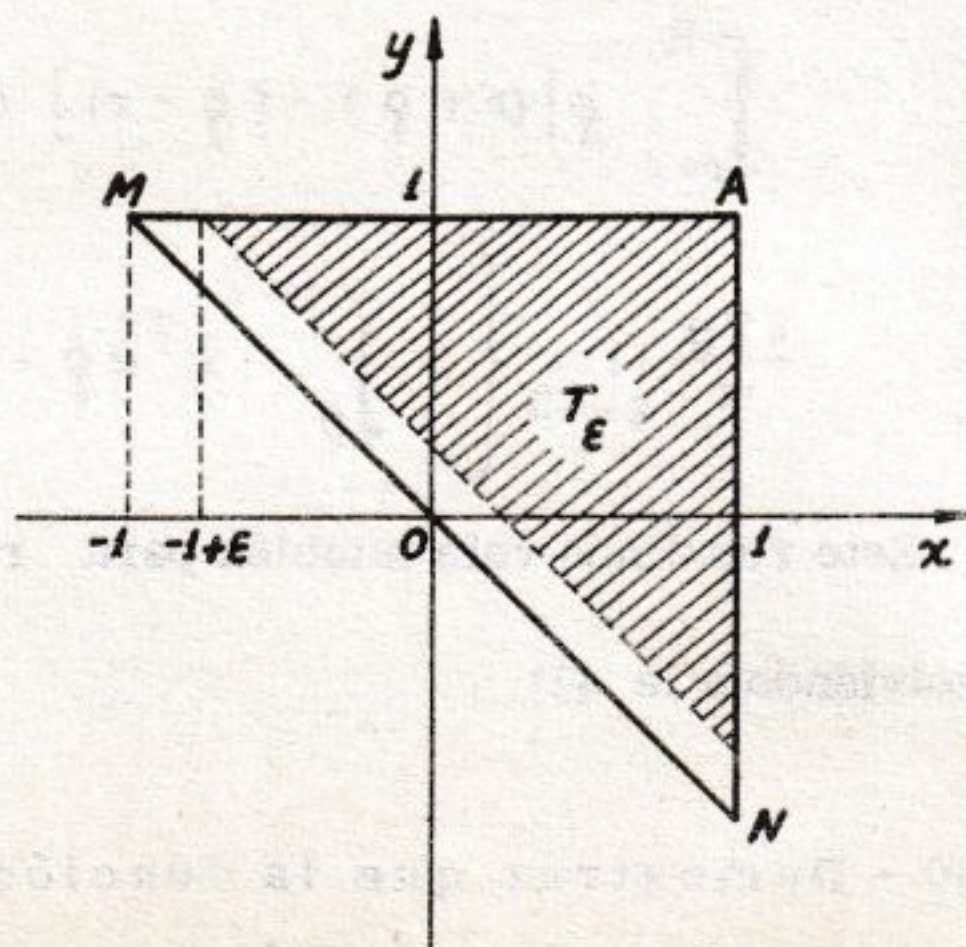


Fig. 77

jemplo considerar el triángulo T_ϵ ($-1 + \epsilon \leq x \leq 1$, $-x + \epsilon \leq y \leq 1$) y la integral $\iint_{T_\epsilon} \frac{dx dy}{(x+y)^\alpha}$, estudiando luego el límite de ésta para $\epsilon \rightarrow 0$.

Sin dificultad el lector encontrará que la sumabilidad se alcanza para $\alpha < 1$, en cuyo caso resulta

$$\iint_A \frac{dx dy}{(x+y)^\alpha} = \frac{2^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$$

32 - Demostrar que la función $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ es sumable en el dominio A limitado por el eje x , la curva $y = x^4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$. Calcúlese después la integral relativa.

En A el único punto singular de la función es el origen O , que es un punto de infinito de orden 4. Podrá entonces parecer que no existe la sumabilidad indicada; pero debe tenerse presente que esta conclusión negativa se podría extraer sólo si O fuese punto interior de A mientras que aquí es de frontera.

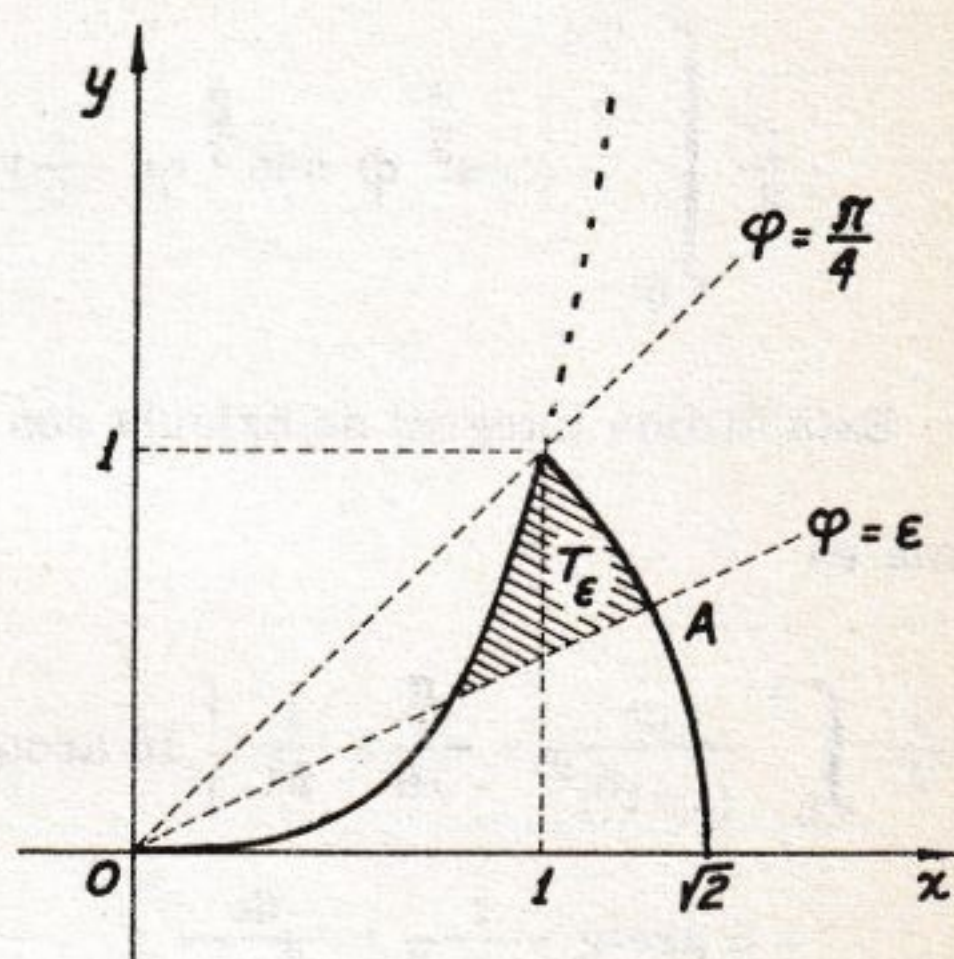


Fig. 78

Una vez observado (fig. 78) que A puede también considerarse como un dominio polarmente normal definido por $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $f(\varphi) \leq \rho \leq \sqrt{2}$ con $f(\varphi) = \sin^{\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{4}{3}} \varphi$, para estudiar la sumabilidad en A de nuestra función (que es siempre positiva) podemos, por ejemplo, considerar el dominio variable T_ϵ ($\epsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $f(\varphi) \leq \rho \leq \sqrt{2}$) y examinar si existe finito

el límite

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{T_\epsilon} \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\pi/4} d\varphi \int_{f(\varphi)}^{\sqrt{2}} \frac{d\rho}{\rho^3} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\pi/4} \left(\frac{1}{f^2(\varphi)} - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\pi/4} \left(\cos^{\frac{8}{3}} \varphi \, \sin^{-\frac{2}{3}} \varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi . \end{aligned}$$

La función de φ que aquí interviene resulta infinita en el punto $\varphi = 0$ de orden $\frac{2}{3}$; por lo tanto será sumable en $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ y el límite precedente será finito e igual a

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \left(\cos^{\frac{8}{3}} \varphi \, \sin^{-\frac{2}{3}} \varphi - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^{\frac{8}{3}} \varphi \, \sin^{-\frac{2}{3}} \varphi \, d\varphi - \frac{\pi}{16} .$$

Esta última integral se calcula con la sustitución $\operatorname{tg} \varphi = t^3$ que la transforma en

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^6)^2} - \frac{\pi}{16} &= \frac{1}{24} \left[10 \operatorname{arctg} t + \frac{5\sqrt{3}}{2} \log \frac{t^2 + t\sqrt{3} + 1}{t^2 - t\sqrt{3} + 1} + \right. \\ &\quad \left. + 5 \operatorname{arctg} \frac{t}{1-t^2} + \frac{6t}{t^6 + 1} \right]_0^1 - \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

con lo que se llega a

$$\iint_A \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{8} + \frac{7\pi}{48} + \frac{5\sqrt{3}}{24} \log(2 + \sqrt{3}) .$$

33^t- Demostrar que la función $\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ es sumable en el dominio no acotado A ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 1$) y calcular la integral relativa.

Para $(x, y) \rightarrow \infty$, la función considerada es continua en A e infinitésima del 3^{er} orden, lo que basta para asegurar su sumabilidad en A . Usando como dominios acotados que tienden a A los dominios T_n ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2$) se encuentra

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^n \frac{\rho \, d\rho}{\rho^3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

34 - Demostrar que la función $x+y$ es sumable en el dominio no acotado A definido por $x \geq 1$, $0 \leq y \leq \frac{1}{x^3}$ y calcular la integral relativa.

La función es positiva y entonces bastará constatar que existe finito el límite, para $n \rightarrow \infty$, de $\iint_{T_n} (x+y) \, dx \, dy$ con, por ejemplo, T_n ($1 \leq x \leq n$, $0 \leq y \leq \frac{1}{x^3}$).

Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} (x+y) \, dx \, dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n dx \int_0^{1/x^3} (x+y) \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^6} \right) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11}{10} - \frac{1}{n} - \frac{1}{10n^5} \right) = \frac{11}{10} \end{aligned}$$

y entonces

$$\iint_A (x+y) \, dx \, dy = \frac{11}{10}.$$

Nótese que en este caso se tiene la sumabilidad de una función que, sobre A tiende a $+\infty$ para $(x, y) \rightarrow \infty$.

35 - Demostrar que la función e^{-xy^2} no es sumable en el semiplano $x \geq 0$.

Tomemos como dominios que tienden a tal semiplano los rectángulos T_n ($0 \leq x \leq n$, $-n \leq y \leq n$). Tendremos

$$\iint_{T_n} e^{-xy^2} dx dy = \int_{-n}^n dy \int_0^n e^{-xy^2} dx = \int_{-n}^n \frac{1 - e^{-ny^2}}{y^2} dy,$$

y poniendo $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$:

$$\iint_{T_n} e^{-xy^2} dx dy = \sqrt{n} \int_{-n\sqrt{n}}^{n\sqrt{n}} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

Para $n \rightarrow \infty$, el factor \sqrt{n} tiende a $+\infty$ mientras el otro factor tiende a un límite finito (y precisamente a $2\sqrt{\pi}$ como sigue de la (3) del ejercicio 25).

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} e^{-xy^2} dx dy = +\infty$$

lo que prueba la tesis.

36 - Siendo A la faja $x \geq 0$, $0 \leq y \leq a$ demostrar que las funciones

$$e^{-x}, \quad ye^{-x}, \quad e^{-x} \cos(xy), \quad \frac{e^{-x} \sin(xy)}{x}$$

son sumables en A y calcular las integrales respectivas.

Para las primeras dos funciones (no negativas en A) se tiene inmediata — mente

$$\iint_A e^{-x} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a dy \int_0^n e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} a (1 - e^{-n}) = a ,$$

$$\iint_A ye^{-x} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a y dy \int_0^n e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2} (1 - e^{-n}) = \frac{a^2}{2} .$$

La sumabilidad en A de las otras dos funciones queda asegurada tras observar que $\left| e^{-x} \cos(xy) \right| \leq e^{-x}$, $\left| \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(xy)}{x} \right| \leq \frac{e^{-x} \cdot xy}{x} = ye^{-x}$.

Se puede entonces escribir

$$\begin{aligned} \iint_A e^{-x} \cos(xy) dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a dy \int_0^n e^{-x} \cos(xy) dx = \\ &= \int_0^a dy \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} \cos(xy) dx^{(*)} = \\ &= \int_0^a dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx = \int_0^a \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} a . \end{aligned}$$

Conviene notar que se hubiera podido también escribir

$$\begin{aligned} \iint_A e^{-x} \cos(xy) dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} dx \int_0^a \cos(xy) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(ax)}{x} dx , \end{aligned}$$

lo que, confrontado con el resultado precedente, permite obtener la fórmula -----

(*) Se ha realizado un pasaje al límite bajo el signo de integral que debe ser justificado. Se trata de probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^a dy \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx - \int_0^a dy \int_0^n e^{-x} \cos(xy) dx \right] = 0$$

lo que resulta de observar que la expresión entre paréntesis cuadrados es igual a

$$\int_0^a dy \int_n^{+\infty} e^{-x} \cos(xy) dx \quad \text{que, en valor absoluto, no supera} \quad \int_0^a dy \int_n^{+\infty} e^{-x} dx = a e^{-n} .$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(ax)}{x} dx = \operatorname{arctg} a \quad (1)$$

Para la última de las fórmulas en consideración se tiene

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(xy)}{x} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a dy \int_0^n \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(xy)}{x} dx = \\ &= \int_0^a dy \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(xy)}{x} dx \quad (*) \end{aligned}$$

y entonces, teniendo la (1) en cuenta

$$\iint_A \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(xy)}{x} dx dy = \int_0^a \operatorname{arctg} y dy = a \operatorname{arctg} a - \frac{1}{2} \log(1+a^2)$$

Como también se hubiera podido escribir

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{e^{-x} \operatorname{sen}(xy)}{x} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{e^{-x}}{x} dx \int_0^a \operatorname{sen}(xy) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{e^{-x} [1 - \cos(ax)]}{x^2} dx, \end{aligned}$$

tras confrontar esta expresión con el resultado precedente se obtiene esta otra fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} [1 - \cos(ax)]}{x^2} dx = a \operatorname{arctg} a - \frac{1}{2} \log(1+a^2) \quad (2)$$

37 - A partir de la fórmula (2) del ej. precedente deducir que es

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad (2) \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

(*) Pasaje que puede justificarse de modo análogo al precedente.

Si en la integral del primer miembro de la citada (2) se pone $x = \frac{t}{a}$ se obtiene (suponiendo $a > 0$):

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{a}} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \operatorname{arctg} a - \frac{1}{2a} \log(1 + a^2),$$

y, en consecuencia

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{a}} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Para llegar a la (1) queda por probar que en el primer miembro de (3) puede realizarse el pasaje al límite bajo el signo de integral, o sea que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{a}} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \right) = 0.$$

Esta última equivale a la

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\frac{t}{a}}) \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = 0.$$

Para demostrarlo observemos que, dado $\varepsilon > 0$, puede escribirse (teniendo en cuenta que para $t \geq 0$ se tiene $1 - e^{-\frac{t}{a}} \leq \frac{t}{a}$):

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\frac{t}{a}}) \frac{1 - \cos t}{t^2} dt &= \int_0^{4/\varepsilon} (1 - e^{-\frac{t}{a}}) \frac{1 - \cos t}{t^2} dt + \\ &+ \int_{4/\varepsilon}^{+\infty} (1 - e^{-\frac{t}{a}}) \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \leq \int_0^{4/\varepsilon} \frac{t}{a} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt + \\ &+ \int_{4/\varepsilon}^{+\infty} 1 \cdot \frac{2}{t^2} dt = \frac{1}{a} \int_0^{4/\varepsilon} \frac{1 - \cos t}{t} dt + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

y entonces resultará ciertamente

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{-\frac{t}{a}}) \frac{1 - \cos t}{t^2} dt < \varepsilon$$

apenas se elija $a > \frac{2}{\epsilon} \int_0^{4/\epsilon} \frac{1 - \cos t}{t} dt$

La (2) se deduce después de la (1) poniendo $x = 2t$.

38 - OBSERVACIONES SOBRE EL CALCULO DE LAS INTEGRALES DE FUNCIONES SUMABLES DE VARIAS VARIABLES.

Para el cálculo de integrales dobles o triples de funciones continuas en dominios acotados y medibles conocemos las fórmulas de reducción dadas en "Lecciones", Cap. XXII, n^{os} 5, 6 que transforman tal cálculo en el de dos o tres integrales simples sucesivas. Nos podemos ahora preguntar si tales fórmulas de reducción mantienen su validez en el caso de las integrales de funciones sumables en dominios acotados o no acotados. La cuestión es bastante difícil de estudiar y se le ha podido dar una solución definitiva solamente en el ámbito de la integral de Lebesgue, de la que daremos algunas nociones en el ej. 50. El lector encontrará allí enunciado un teorema general, llamado teorema de Fubini, que afirma la validez de las citadas fórmulas de reducción (con algunos detalles que podrán verse en dicho ej. 50); valen entonces también las correspondientes fórmulas de inversión del orden de las integraciones. Como la teoría elemental de las funciones sumables, expuesta en "Lecciones", Capítulo XXV, que hemos hasta ahora usado, es un caso particular de la integral de Lebesgue, podemos decir que las fórmulas de reducción y de inversión del orden de las integraciones son siempre aplicables (una vez confirmada la sumabilidad de la función a integrar).

Por ejemplo, volviendo al ej. 27, se puede sin más escribir

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{dx \, dy}{x+y} &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{x+y} = \int_0^1 \log \frac{x+1}{x} dx = \\ &= \left[(x+1) \log (x+1) - x \log x \right]_0^1 = 2 \log 2 \end{aligned}$$

Con el mismo criterio el lector puede volver a ver los ej. 28, 29, 31, 32, 33, 34, 36; otra aplicación se encontrará en el sucesivo ej. 39.

Otro problema que surge es el del cambio de variables en las integrales múltiples. ¿Valdrán todavía para las funciones sumables teoremas análogos a los dados en "Lecciones", Cap. XXII, n^{os} 7, 8, 9 para las integrales de las funciones continuas? No podemos aquí ocuparnos de este problema; nos limitaremos a decir que siempre se podrá estudiarlo directamente caso por caso, apoyándose en los procedimientos de cálculo de las funciones sumables.

Utilizando las notaciones habituales, si se fija una sucesión $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ de dominios acotados y medibles que tienda a $A - N$, se tendrá

$$\int_A f(P) \, dT = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(P) \, dT \quad (1)$$

y en la integral del 2^o miembro (de función continua en un dominio acotado y medible) es posible realizar el cambio de variable, bajo las condiciones indicadas en el teorema antes recordado; quedará solamente, tras ésto, estudiar el pasaje al límite señalado en (1) sobre las integrales transformadas.

Nos limitaremos a dar un ejemplo simple. Sea $ax^2 + 2bxy + cy^2$ una forma cuadrática definida positiva (se tiene, entonces, $a > 0$, $c > 0$, $ac - b^2 > 0$) y se desea calcular la integral doble

$$I = \iint_{S_2} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} \, dx \, dy, \quad (2)$$

sobre todo el plano S_2 . Tomando como sucesión $\{T_n\}$ la de los dominios acotados constituidos por las elipses $ax^2 + 2bxy + cy^2 = n^2$ se tendrá

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} dx dy \quad (3)$$

Realicemos una rotación de los ejes coordenados, es decir, un cambio de variables del tipo

$$x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \quad y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \quad (4)$$

de modo que los nuevos ejes coordenados ξ, η coincidan con los de las citadas elipses. Tras fácil cálculo, o también aplicando conocidos teoremas de Geometría Analítica, se encuentra que basta adoptar θ de modo que sea $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2b}{a-c}$ y que, respecto de los nuevos ejes, las citadas elipses tengan una ecuación del tipo $\alpha \xi^2 + \beta \eta^2 = n^2$, donde α, β son dos constantes positivas tales que resulta

$$\alpha\beta = ac - b^2 \quad (5)$$

Puesto que el jacobiano de la transformación (4) vale 1, se tiene

$$\iint_{T_n} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} dx dy = \iint_{U_n} e^{-(\alpha \xi^2 + \beta \eta^2)} d\xi d\eta \quad (6)$$

donde U_n designa el dominio del plano ξ, η limitado por la elipse $\alpha \xi^2 + \beta \eta^2 = n^2$.

Poniendo ahora $\xi = \frac{u}{\sqrt{\alpha}}, \quad \eta = \frac{v}{\sqrt{\beta}}$ se obtiene

$$\iint_{U_n} e^{-(\alpha \xi^2 + \beta \eta^2)} d\xi d\eta = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \iint_{C_n} e^{-(u^2 + v^2)} du dv \quad (7)$$

donde C_n es el círculo $u^2 + v^2 \leq n^2$. Tras lo cual, de las (3), (6), (7) se obtiene

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \iint_{C_n} e^{-(u^2+v^2)} du dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n e^{-\varphi^2} \varphi d\varphi =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} (1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

y por último, teniendo en cuenta la (5)

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}}.$$

39 - Una vez dados el punto $V(0,0,\alpha)$ y la parábola $y^2 = 2ax$, $z = 0$, ($a > 0$), denomínese C al cono que tiene V por vértice y la parábola por directriz, y S a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - az = 0$ (fig. 79). Calcúlese: 1º) el área de la parte C' del cono C que resulta interior a la esfera; 2º) el área de la parte S' de la esfera S que resulta interior al cono.

Para responder al primer punto, comencemos procurándonos una representación paramétrica del cono C . La parábola dada puede representarse con las ecuaciones paramétricas $x = \frac{2a}{v^2}$, $y = \frac{2a}{v}$, $z = 0$, variando v en $[-\infty, +\infty]$. La generatriz de C que une V al punto genérico P de la parábola tendrá entonces por ecuaciones $av^2x = vy = 2(a-z)$ y si a lo largo de ella tomamos la x como parámetro (poniendo $x = u$, con $u \geq 0$ puesto que nos interesa sólo la hoja de C que está en el semiespacio $x \geq 0$), obtendremos para C las ecuaciones paramétricas

$$x = u, \quad y = uv, \quad z = a - \frac{1}{2} uv^2, \quad (1)$$

con u variable en $[0, +\infty]$ y v en $[-\infty, +\infty]$. Con las (1) las generatrices son las líneas $v = \text{cte.}$

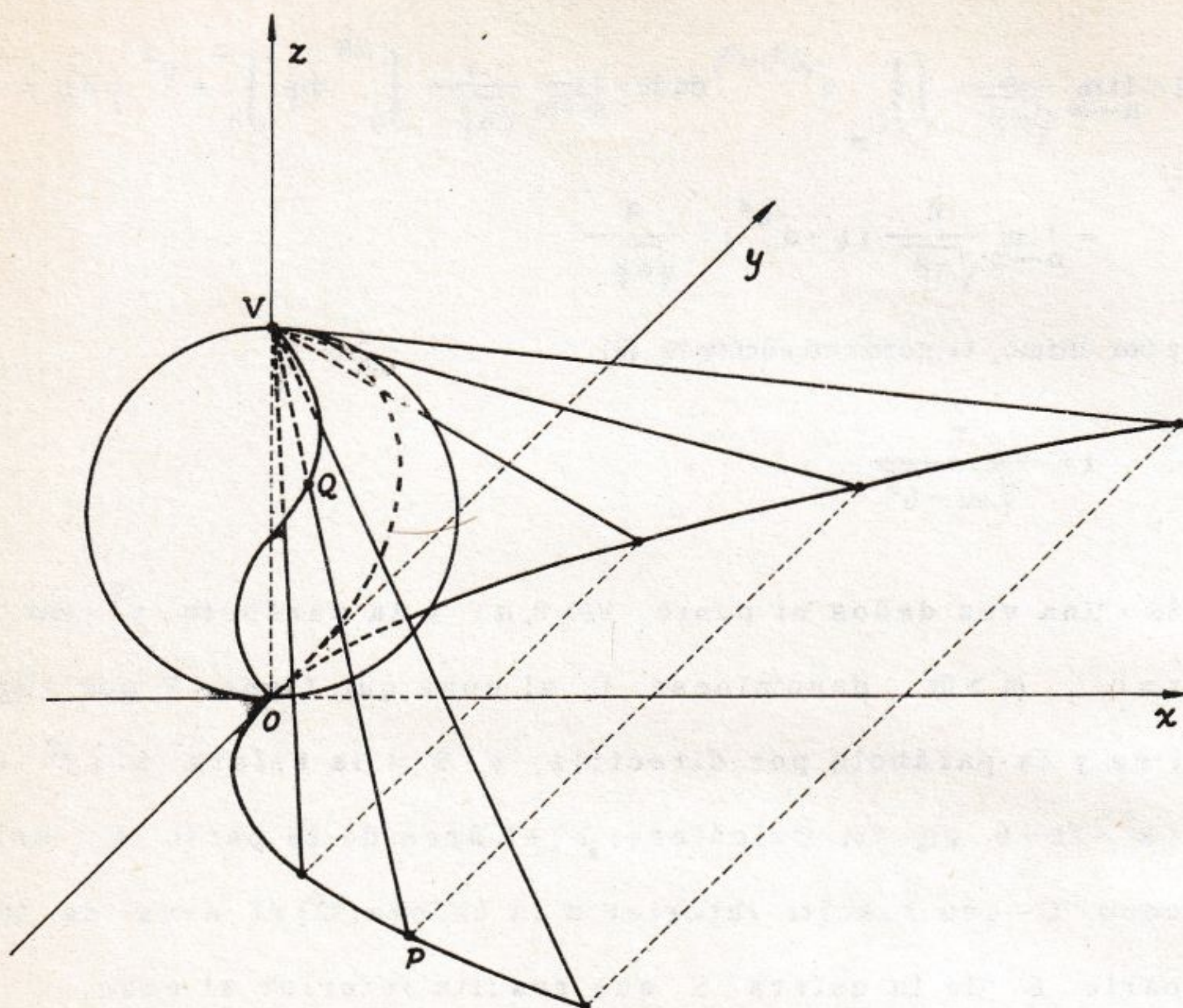


Fig. 79

Para individualizar la parte C' de C que queda en el interior de la esfera S observemos que toda generatriz VP intercepta a S (además de en V) en un punto Q correspondiente a cierto valor de u (variable de generatriz en generatriz, es decir, función de v) que se obtiene resolviendo el sistema constituido por las (1) y la ecuación de la esfera S . Con fácil cálculo se encuentra $u = \frac{2av^2}{(v^2 + 2)^2}$, de modo que permanece en el interior de la esfera el segmento VQ de generatriz que corresponde a $0 \leq u \leq \frac{2av^2}{(2 + v^2)^2}$.

Podemos entonces decir que la parte C' del cono sobre la que debemos fijar la atención está representada por las (1) cuando el punto (u, v) varíe en el dominio base A definido por las

$$-\infty < v < +\infty, \quad 0 \leq u \leq \frac{2av^2}{(2+v^2)^2}.$$

De las (1) sigue

$$x_u = 1, \quad y_u = v, \quad z_u = -\frac{1}{2}v^2,$$

$$x_v = 0, \quad y_v = u, \quad z_v = -uv,$$

y entonces,

$$E = \frac{1}{4}(v^2 + 2)^2, \quad F = \frac{1}{2}uv(v^2 + 2), \quad G = u^2(v^2 + 1),$$

$$EG - F^2 = \frac{1}{4}u^2(v^2 + 2)^2.$$

Se tendrá así

$$\begin{aligned} \text{área } C' &= \frac{1}{2} \iint_A u(v^2 + 2) du dv = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (v^2 + 2) dv \int_0^{\frac{2av^2}{(v^2+2)^2}} u du = \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^4}{(v^2 + 2)^3} dv = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{v^4}{(v^2 + 2)^3} dv = \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{3}{2+v^2} - \frac{d}{dv} \left[\frac{6v+5v^3}{(2+v^2)^2} \right] \right\} dv = \frac{a^2}{4} \left[\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{2}} - \frac{6v+5v^3}{(2+v^2)^2} \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

vale decir,

$$\text{área } C' = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16} a^2.$$

Pasemos al 2º punto. Llamando Q a un punto cualquiera de la esfera, la semirecta VQ cortará al plano xy en un punto $P(\xi, \eta)$, perteneciendo Q a la parte S' interior al cono si y sólo si el punto P resulta interior a la parábola, vale decir, si $\eta^2 \leq 2a\xi$. Tomemos entonces como parámetros, sobre la esfera S , a las coordenadas ξ, η del punto P . La recta VP tiene las ecuaciones $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = 1 - \frac{z}{a}$ y corta a la esfera S en

el punto V y en otro Q que tiene por coordenadas a

$$x = \frac{a^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \quad y = \frac{a^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2}, \quad z = \frac{a(\xi^2 + \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2 + a^2} \quad (2)$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la esfera S y la parte S' por considerar tiene el dominio base B definido por $-\infty < \eta < +\infty$, $\frac{\eta^2}{2a} \leq \xi < +\infty$.

De las (2) sigue

$$x_\xi = \frac{a^2(-\xi^2 + \eta^2 + a^2)}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2}, \quad y_\xi = -\frac{2a^2 \xi \eta}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2}, \quad z_\xi = \frac{2a^2 \xi}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2},$$

$$x_\eta = -\frac{2a^2 \xi \eta}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2}, \quad y_\eta = \frac{a^2(\xi^2 - \eta^2 + a^2)}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2}, \quad z_\eta = \frac{2a^3 \eta}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2},$$

$$E = \frac{a^4}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{a^4}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2}, \quad \sqrt{EG - F^2} = \frac{a^4}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2},$$

teniéndose, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{área } S' &= \iint_B \frac{a^4 d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2} = a^4 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{\frac{\eta^2}{2a}}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2)^2} = \\ &= a^4 \int_0^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2 + a^2} \int_{\frac{\eta^2}{2a}}^{+\infty} \left[\frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + a^2} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + a^2} \right) \right] d\xi = \\ &= a^4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\eta^2 + a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\eta^2 + a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 + a^2}} + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + a^2} \right]_{\xi = \frac{\eta^2}{2a}}^{\xi = +\infty} d\eta = \\ &= a^4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\eta^2 + a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\eta^2 + a^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\eta^2}{2a \sqrt{\eta^2 + a^2}} \right) - \frac{2a \eta^2}{(\eta^2 + 2a^2)^2} \right] d\eta = \end{aligned}$$

$$= a^4 \int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\eta^2}{2a \sqrt{\eta^2 + a^2}} \right) \frac{d\eta}{(\eta^2 + a^2)^{3/2}} - 2a^5 \int_0^{+\infty} \frac{\eta^2 d\eta}{(\eta^2 + a^2)(\eta^2 + 2a^2)^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d\eta}{(\eta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} d\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + a^2}}\right)$, la primera

de estas integrales se puede, mediante una integración por partes, transformar en

$$a^2 \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\eta^2}{2a \sqrt{\eta^2 + a^2}} \right) \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + a^2}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + a^2}} \cdot \frac{2a \eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 + a^2} (\eta^2 + 2a^2)} \right\} - 2a^3 \int_0^{+\infty} \frac{\eta^2 d\eta}{(\eta^2 + a^2)(\eta^2 + 2a^2)^2}.$$

Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned} \text{área } S' &= 2a^3 \int_0^{+\infty} \left[\frac{\eta^2}{(\eta^2 + a^2)(\eta^2 + 2a^2)} - \frac{a^2 \eta^2}{(\eta^2 + a^2)(\eta^2 + 2a^2)^2} \right] d\eta = \\ &= 2a^3 \int_0^{+\infty} \frac{\eta^2}{(\eta^2 + 2a^2)^2} d\eta = a^3 \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\eta^2 + 2a^2} - \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta}{\eta^2 + 2a^2} \right) \right] d\eta = \\ &= a^3 \left[\frac{1}{a \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{a \sqrt{2}} - \frac{\eta}{\eta^2 + 2a^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4} \pi a^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

40 - INTEGRALES EULERIANAS Y APLICACIONES.

La siguiente integral

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (p > 0, \quad q > 0), \quad (1)$$

denomínase integral euleriana de 1ª especie o función Beta.

La función $B(p, q)$ de las dos variables p, q resulta definida por la (1) solamente si $p > 0, \quad q > 0$ ya que en los otros casos la función

$x^{p-1} (1-x)^{q-1}$ no es sumable en $[0, 1]$.

Realizando en el 2º miembro de (1) la sustitución $x = 1 - y$ se encuentra
 $B(p, q) = \int_0^1 y^{q-1} (1-y)^{p-1} dy = B(q, p)$ por lo que podemos afirmar que la función Beta es simétrica respecto de las variables p, q .

El segundo miembro de (1) puede transformarse de varios modos; por ejemplo, realizando la sustitución $x = \cos^2 t$ se encuentra

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} t \sin^{2q-1} t dt \quad ; \quad (2)$$

poniendo, en cambio, $x = \frac{t}{1+t}$, resulta

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \quad (3)$$

Si p, q son ambos enteros (positivos) de la (2) sigue, recordando los resultados obtenidos en el ej. 31 de "Ejercicios", Cap. IX:

$$B(p, q) = 2 \cdot \frac{(2p-2)!! (2q-2)!!}{(2p+2q-2)!!} = \frac{(p-1)! (q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (4)$$

Si en la (3) se pone $p = \alpha$, $q = 1 - \alpha$ (naturalmente con $0 < \alpha < 1$) se obtiene $B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$; se puede demostrar (*) que esta última integral vale $\frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$ de lo que se desprende la notable fórmula

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (5)$$

Consideremos ahora esta otra integral

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad (s > 0) \quad (6)$$

 (*) El lector encontrará la demostración en el sucesivo Cap. XXVI, ej. 117.

que tiene sentido sólo para $s > 0$ (de otro modo la función no es sumable en el entorno del punto $x = 0$) y que se denomina integral euleriana de 2ª especie o función Gamma. De la (6), con una integración por partes, se deduce

$$T(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx = \left[-x^s e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) s x^{s-1} dx = s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx,$$

de donde surge la relación fundamental

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \quad (7)$$

Si n es un entero positivo, aplicando sucesivamente la (7) se encuentra $\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1) = (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) = \dots = (n-1)! \Gamma(1)$; pero de la (6) se obtiene inmediatamente $\Gamma(1) = 1$ y entonces:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (8)$$

Puede así decirse que la función Gamma constituye una extensión del factorial a los valores no enteros de la variable.

De la (6) sigue, además, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ y entonces

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (9)$$

teniendo esto en cuenta y de acuerdo con la (7) surge sucesivamente

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad ; \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \sqrt{\pi} \quad ; \dots$$

y, en general,

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (10)$$

Demostremos ahora una notable relación entre la función Beta y la función Gamma, que se expresa con la fórmula

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (*) \quad (11)$$

Se tiene, en efecto

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \iint_Q x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy,$$

donde Q indica el cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ del plano xy . Realizando en esta integral doble el cambio de variables $x = uv$, $y = (1-u)v$ que transforma Q en la faja S ($0 \leq u \leq 1$, $v \geq 0$) del plano uv , se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= \iint_S u^{p-1} v^{p-1} (1-u)^{q-1} v^{q-1} e^{-uv-(1-u)v} \cdot v du dv = \\ &= \iint_S u^{p-1} v^{p+q-1} (1-u)^{q-1} e^{-v} du dv = \\ &= \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du \cdot \int_0^{+\infty} v^{p+q-1} e^{-v} dv, \end{aligned}$$

pero, por las (1), (6) esta última expresión vale $B(p, q) \cdot \Gamma(p+q)$ y así la (11) queda demostrada. De las (5), (11) sigue inmediatamente

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi \alpha}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (12)$$

Existen tablas numéricas de la función Gamma que resuelven también el cálculo de la función Beta [por la (11)]. Estas dos funciones resultan frecuentemente útiles para el cálculo de ciertas integrales.

He aquí dos ejemplos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4} = (\text{sustituyendo: } x^2 = \frac{t}{1-t}) = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{5}{2}} dt =$$

(*) Si p, q son enteros, la (11) sigue inmediatamente de las (4), (8).

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \frac{15}{8} \sqrt{\pi}}{3!} = \frac{5\pi}{32} ;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2 \sqrt[4]{x^3}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{(1+x)^2} dx = \text{[por la (3)]} = B\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \text{[por la (7)]} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1} = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \text{[por la (12)]} = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} .$$

41 - Determinar el baricentro del sólido no acotado S obtenido haciendo rotar alrededor del eje x el rectánguloide (no acotado) del plano xy definido por $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x^\alpha e^{-x}$, ($\alpha > 0$).

La curva $y = x^\alpha e^{-x}$ tiene el comportamiento señalado en la fig. 80, en la que se ha supuesto $\alpha > 1$ (cfr. "Ejercicios", Cap. X, ej. 49). El baricentro buscado se encuentra evidentemente

sobre el eje x . Su abscisa ξ que da determinada por la fórmula

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\iiint_S x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_S dx \, dy \, dz} = \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} x \, dx \iint_{C_x} dy \, dz}{\int_0^{+\infty} dx \iint_{C_x} dy \, dz} \end{aligned}$$

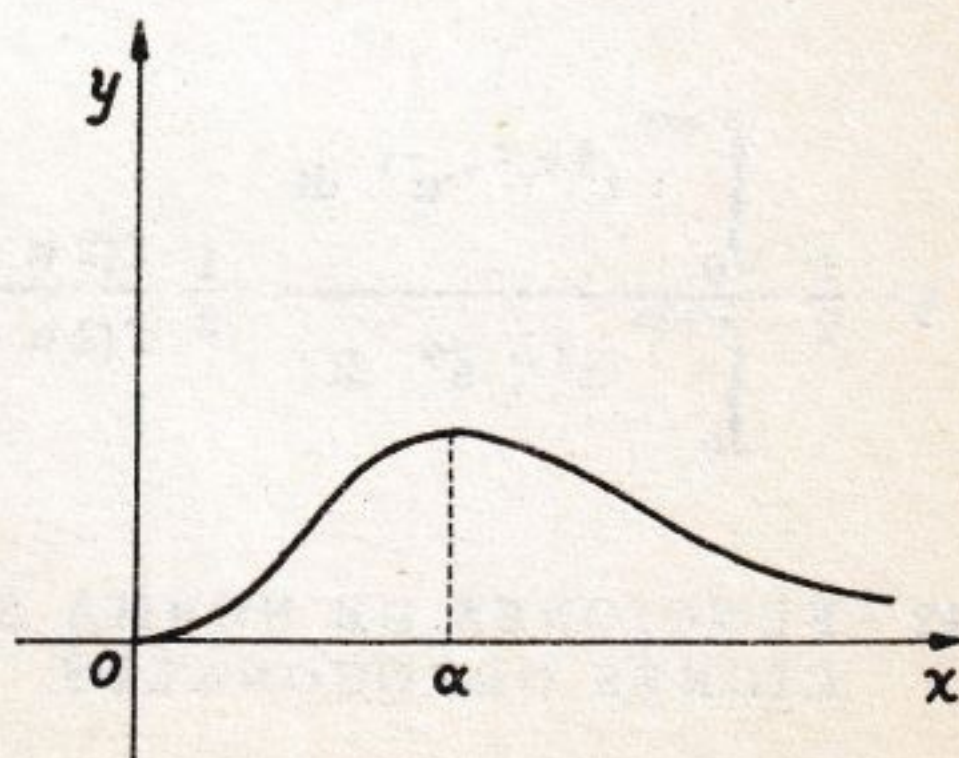


Fig. 80

donde C_x indica la intersección de S con el plano perpendicular al eje x en el punto de abscisa x , que resulta ser un círculo de radio $x^\alpha e^{-x}$ de lo

que sigue $\iint_{C_x} dy dz = \text{área } C_x = \pi x^{2\alpha} e^{-2x}$. Se tendrá así

$$\xi = \frac{\int_0^{+\infty} x^{2\alpha+1} e^{-2x} dx}{\int_0^{+\infty} x^{2\alpha} e^{-2x} dx} \quad (1)$$

Estas integrales no pueden calcularse elementalmente; sin embargo observe - mos que, con una integración por partes, puede escribirse

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{2\alpha+1} e^{-2x} dx &= \left[-\frac{1}{2} x^{2\alpha+1} e^{-2x} \right]_0^{+\infty} + \frac{2\alpha+1}{2} \int_0^{+\infty} x^{2\alpha} e^{-2x} dx = \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \int_0^{+\infty} x^{2\alpha} e^{-2x} dx \end{aligned}$$

por lo que se llega a

$$\xi = \alpha + \frac{1}{2}.$$

Se habría podido también efectuar en las integrales (1) la sustitución $2x = t$ y tener en cuenta el ejercicio precedente, con lo que se habría obtenido

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{+\infty} t^{2\alpha+1} e^{-t} dt}{\int_0^{+\infty} t^{2\alpha} e^{-t} dt} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+1)} = \frac{1}{2} \frac{(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} = \alpha + \frac{1}{2}.$$

42 - FUNCIONES DE NORMA SUMABLE; SISTEMAS DE FUNCIONES ORTOGONALES.

Sea A un dominio medible (acotado o no) del espacio S_r , $f(P)$, $g(P)$ dos funciones (reales o complejas) sumables en A . El producto $f(P) \cdot g(P)$,

en general, no es sumable en A ^(*); en consecuencia el cuadrado (o la norma) de una función sumable no es, en general, una función sumable. (Basta considerar el ejemplo de la función $\frac{1}{\sqrt{x}}$, que es sumable en $[0, 1]$ mientras no lo es su cuadrado $\frac{1}{x}$).

Diremos que una función $f(P)$, generalmente continua en A es de norma sumable en A \int_0 de cuadrado sumable en A , si se trata de una función real \int cuando la función $|f(P)|^2 \int_0$ la $f^2(P) \int$ es sumable en A . También es frecuentemente usada la denominación de función hilbertiana en A .

Sobre estas funciones se tienen los siguientes teoremas:

I - Si f, g son funciones hilbertianas en A el producto de las mismas fg , es una función sumable en A .

Dem. Se tiene, en efecto, $(|f| - |g|)^2 \geq 0$, de donde, $|fg| \leq \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2$; siendo el segundo miembro sumable por hipótesis, también lo será el primero.

II - Si f es una función hilbertiana en A y A tiene medida finita, f será sumable en A . ^(**)

Dem. Es un caso particular del teorema I cuando se asuma $g \equiv 1$ (pues ésta resulta hilbertiana en A , dado que $\text{med } A < +\infty$).

III - Una combinación lineal de funciones hilbertianas es una función hilbertiana.

(*) Obsérvese, sin embargo que $f(P)g(P)$ resulta sumable en A cuando al menos uno de los dos factores $f(P), g(P)$ está acotado en A ; la demostración es inmediata.

(**) El teorema no vale, en general, si $\text{med } A = +\infty$. Basta para evidenciarlo el ejemplo de $\frac{1}{x^2}$, que es sumable en $[1, +\infty]$, mientras que $\frac{1}{x}$ no lo es.

Dem. Siendo α, β dos constantes tendremos $|\alpha f + \beta g|^2 =$
 $= (\alpha f + \beta g)(\bar{\alpha} \bar{f} + \bar{\beta} \bar{g}) =^{(*)} |\alpha|^2 |f|^2 + |\beta|^2 |g|^2 + \alpha \bar{\beta} f \bar{g} +$
 $+ \bar{\alpha} \beta \bar{f} g \leq |\alpha|^2 |f|^2 + |\beta|^2 |g|^2 + 2 |\alpha \beta f g| \leq 2 |\alpha|^2 |f|^2 +$
 $+ 2 |\beta|^2 |g|^2$, y esta última función es sumable por hipótesis.

IV - Si f, g son funciones hilbertianas en A , vale la denominada desigualdad de Schwarz:

$$\left| \int_A f g dT \right|^2 \leq \int_A |f|^2 dT \cdot \int_A |g|^2 dT \quad (1)$$

Dem. Cualesquiera sean α, β reales se tiene

$$\int_A (\alpha |f| + \beta |g|)^2 dT \geq 0, \text{ o sea, } \alpha^2 \int_A |f|^2 dT +$$

$$+ 2 \alpha \beta \int_A |fg| dT + \beta^2 \int_A |g|^2 dT \geq 0.$$

El primer miembro de esta desigualdad es una forma cuadrática en α, β :
 además resulta semidefinida y entonces su discriminante es no negativo. Escribiendo esto obtenemos

$$\int_A |f|^2 dT \cdot \int_A |g|^2 dT - \left(\int_A |fg| dT \right)^2 \geq 0;$$

por otra parte

$$\left| \int_A fg dT \right| \leq \int_A |fg| dT$$

y de estas relaciones sigue la (1), que es lo que queríamos demostrar.

Supongamos ahora dada una sucesión

(*) Recordamos que con \bar{z} se indica el conjugado de z .

$$f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P), \dots \quad (2)$$

de funciones hilbertianas en A , ninguna de las cuales sea idénticamente nula.

Diremos que tales funciones son ortogonales, o también que constituyen un sistema ortogonal cuando resulta

$$\int_A f_m(P) \bar{f}_n(P) dT = 0, \quad (\text{para } m \neq n). \quad (3)$$

Nótese que si $m = n$, resulta en cambio $\int_A f_n(P) \bar{f}_n(P) dT = \int_A |f_n(P)|^2 dT >$

> 0 ; indicando con c_n el valor de esta última integral si considerásemos,

en lugar de las (2), las funciones $g_n(P) = \frac{f_n(P)}{\sqrt{c_n}}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) tendríamos, evidentemente,

$$\int_A g_m(P) \bar{g}_n(P) dT \begin{cases} = 0 & (\text{si } m \neq n) \\ = 1 & (\text{si } m = n) \end{cases}, \quad (4)$$

en cuyo caso diremos que el sistema de las $g_n(P)$ es ortogonal y normal o brevemente, ortonormal. Entonces de todo sistema ortogonal de funciones puede deducirse inmediatamente otro que sea ortonormal.

Es casi superfluo observar que, si se trata de funciones reales, las (3), (4) resultan ser

$$\int_A f_m f_n dT = 0, \quad (\text{para } m \neq n); \quad \int_A g_m g_n dT \begin{cases} = 0 & , \text{ si } m \neq n \\ = 1 & , \text{ si } m = n \end{cases}.$$

El lector verificará inmediatamente que el sistema e^{inx} , ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) es ortogonal en $[0, 2\pi]$ y que el correspondiente sistema ortogonal es $\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$.

Otros notables ejemplos están presentados en los tres ejercicios siguientes.

43 - Demostrar que los polinomios de Legendre $P_n(x)$ (véase "Ejercicios", Cap. VIII, ej. 23) constituyen un sistema ortogonal en $[-1, 1]$. Construir el correspondiente sistema ortonormal.

Los polinomios de Legendre están definidos por

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (1)$$

de lo que de inmediato sigue

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \dots \quad (2)$$

donde los puntos suspensivos indican términos de grado inferior a n . Tomados dos polinomios distintos $P_m(x)$, $P_n(x)$ (con $m < n$) para probar que

resulta $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$ bastará hacer ver que

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0 \quad , \quad (\text{para } k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

Se tiene, en efecto, por la (1) :

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^k \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \quad .$$

Transformando esta última integral con k sucesivas integraciones por partes, se encuentra fácilmente

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx &= (-1)^k \frac{k!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n dx = \\ &= (-1)^k \frac{k!}{2^n n!} \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 \end{aligned} \quad (4)$$

de lo que sigue fácilmente la (3) .

En cambio si $k = n$, la (4) resulta

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx &= \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{1}{2^n} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

y, en consecuencia, teniendo presente las (2), (3) se tendrá

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} x^n + \dots \right) P_n(x) dx = \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \\ &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

Concluimos así que el sistema

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

es ortonormal en $[-1, 1]$.

44 - Demostrar que las funciones $e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$, donde $L_n(x)$ son los polinomios de Laguerre (véase "Ejercicios", Cap. VIII, ej. 23), constituyen un sistema ortogonal en $[0, +\infty]$. Construir el correspondiente sistema ortonormal,

Los polinomios de Laguerre están definidos por las fórmulas

$$L_0(x) = 1; \quad L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

y se ve inmediatamente que resulta

$$L_n(x) = (-1)^n x^n + \dots \quad (2)$$

Se trata de demostrar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} L_m(x) e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0 ,$$

(para $m < n$)

lo que se logrará si se hace ver que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^k L_n(x) dx = 0 , \quad (\text{para } k = 0, 1, \dots, n-1) . \quad (3)$$

La demostración de la (3) es totalmente análoga a la expuesta en el ej. precedente y la dejamos para el lector.

Procediendo como en el citado ejercicio se encuentra después que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx = (n!)^2 \quad \text{y, en consecuencia, que el sistema}$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \frac{L_n(x)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

es ortonormal en $[0, +\infty]$.

45 - Demostrar que las funciones $e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite (ver "Ejercicios", Cap. VIII, ej. 23) constituyen un sistema ortogonal en $[-\infty, +\infty]$. Construir el correspondiente sistema ortonormal.

Los polinomios de Hermite están definidos por las fórmulas

$$H_0(x) = 1 ; \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) , \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

y es fácil verificar que resulta

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x) , \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (*) \quad (2)$$

(*) Teniendo en cuenta la (1) la (2) se transforma de inmediato en la

$$2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) + 2x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) = 0$$

Se tiene, suponiendo $m \leq n$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{e^{x^2/2}} H_m(x) \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{e^{x^2/2}} H_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx = \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx \end{aligned}$$

y, transformando esta última integral con m sucesivas integraciones por partes, aprovechando la (2) tras cada una de ellas:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{e^{x^2/2}} H_m(x) \cdot \frac{e^{-x^2/2}}{e^{x^2/2}} H_n(x) dx &= (-1)^{n-m} (2m)!! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x^2}) dx = \\ &\begin{cases} (-1)^{n-m} (2m)!! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 & (\text{si } m < n) \\ (2n)!! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} & (\text{si } m = n) \end{cases} \end{aligned}$$

El sistema considerado es, entonces, ortogonal y el correspondiente sistema ortonormal es

$$\frac{e^{-x^2/2}}{e^{x^2/2}} \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

46 - INTEGRALES IMPROPIAS (ver "Lecciones", Cap. XXV, n° 10)

Sea $f(P)$ una función generalmente continua en un dominio A medible, acotado o no, con el conjunto singular N (eventualmente vacío). Sabemos que, si no es integrable en A , no tiene sentido hablar de $\int_A f(P) dT$. No obs-

y de ésta se obtiene sin dificultad una demostración por inducción.

tante este hecho, algunas veces es útil considerar integrales impropias de la $f(P)$ sobre A , en el sentido que se ha precisado en "Lecciones", Cap. cit.

Retomemos dos ejemplos ya vistos en "Lecciones":

1) La función $\frac{\text{sen } x}{x}$ no es integrable en $[0, +\infty]$; sin embargo es

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{como se desprende de lo ya dicho en "Lecciones" y}$$

en el ej. 37), por lo que existe la integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (so-

bre la sucesión de los intervalos T_n del tipo $[0, n]$);

2) La función $\frac{1}{x}$ no es integrable en un intervalo acotado del tipo $[-a, b]$,

con a, b positivos, existe, sin embargo, el $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^{-\frac{1}{n}} \frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{n}}^b \frac{dx}{x} \right) =$

$= \log \frac{b}{a}$, o sea que existe la integral principal de Cauchy

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a} \quad (\text{es decir, la integral impropia sobre la sucesión de}$$

los dominios T_n constituida por dos intervalos del tipo $\left[-a, -\frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, b\right]$).

Naturalmente el valor de una integral impropia depende de la sucesión particular $\{T_n\}$ que se usa para definirla. Tal es así que si, en el segundo ejemplo hubiésemos usado la sucesión de los dominios constituidos por los dos intervalos $\left[-a, -\frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{2}{n}, b\right]$, habríamos obtenido

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^{-1/n} \frac{dx}{x} + \int_{2/n}^b \frac{dx}{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \frac{1}{an} + \log \frac{bn}{2} \right) = \log \frac{b}{2a}.$$

Como otro ejemplo retomemos el considerado en el ej. 30. Poniendo $\frac{1}{n} = \epsilon$

si se considera la sucesión de los cuadrados T_ϵ ($\epsilon \leq x \leq 1$, $\epsilon \leq y \leq 1$) se encuentra fácilmente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{T_\epsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = 0 \quad ;$$

si se considera, en cambio, la sucesión de los rectángulos T'_ϵ ($\epsilon \leq x \leq 1$, $\epsilon^2 \leq y \leq 1$) se encuentra

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{T'_\epsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{\pi}{4} \quad .$$

Advirtamos que a las integrales múltiples impropias no pueden aplicarse las fórmulas de reducción y de inversión del orden de las integraciones de las que se ha hablado en el ej. 38, lo que debe tenerse presente inclusive en el caso en que tengan sentido las dos (o más) integrales simples sucesivas.

Por ejemplo se ha visto recién que la integral doble $\iint_A \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ con A ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) no tiene sentido como integral de función integrable, mientras puede tener varios como integral impropia; pero esto no tiene ninguna relación con el hecho de que tienen un significado preciso las dos expresiones

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4} \quad .$$

Proponemos al lector demostrar las fórmulas siguientes:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } \alpha t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\text{sen } \alpha t}{t} dt \quad \left\{ \begin{array}{ll} = \frac{\pi}{2} & (\text{si } \alpha > 0) \\ = 0 & (\text{si } \alpha = 0) \\ = -\frac{\pi}{2} & (\text{si } \alpha < 0) \end{array} \right. \quad ;$$

$$* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cotg x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi/2}^{-1/n} \cotg x \, dx + \int_{1/n}^{\pi/2} \cotg x \, dx \right) = 0 \quad ;$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \sen x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n \sen x \, dx = 0 \quad .$$

Respecto de esta última fórmula hemos puesto el asterisco a la integral por - que también las integrales impropias de este tipo suelen llamarse integra - les principales de Cauchy (son calculadas sobre sucesiones de inter - valos que tienen al origen como punto medio).

Daremos en los dos ejemplos siguientes otros ejemplos clásicos de integrales impropias de funciones de una variable.

47 - Demostrar que valen las siguientes fórmulas (integra - les de Fresnel):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sen x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad , \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \, dx = \int_0^{+\infty} \sen(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad , \quad (2)$$

quedando sobreentendido que se trata de integrales impro -
pias definidas del modo: $\int_0^{+\infty} \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \dots \quad (*)$

(*) En la primera de las integrales (1) debe tenerse también en cuenta la singularidad de $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ en el punto $x = 0$; pero es evidente que la función es sumable en todo entorno finito de tal punto. Que las funciones $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $\frac{\sen x}{\sqrt{x}}$ no sean integrables en $[0, +\infty]$ se puede hacer ver con un razona - miento similar al expuesto en "Lecciones" , Cap. XXV , n. 4 en el caso de la función $\frac{\sen x}{x}$.

En primer lugar observemos que las (2) son una consecuencia inmediata de las (1) ya que, con la sustitución $x = \sqrt{t}$ se tiene por ejemplo

$$\int_0^n \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{n^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \quad \text{y, por ende,} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Basta entonces demostrar las (1). Apoyémonos en la conocida fórmula [véase la (2) del ej. 25] :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (x > 0) \quad \text{de la que sigue} \quad \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{ix} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy$$

La función del 1^{er} miembro es sumable en $[0, n]$ pudiéndose entonces escribir

$$\int_0^n \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{ix} dx \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy. \quad (3)$$

Puesto que es fácil reconocer que la función $e^{ix - xy^2}$ es sumable en la faja S ($0 \leq x \leq n$, $y \geq 0$) se puede, en el segundo miembro de (3), intercambiar el orden de las integraciones (ej. 38); se obtiene así

$$\int_0^n \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dy \int_0^n e^{ix - xy^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-n(y^2 - i)}}{y^2 - i} dy = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{y^2 + i}{y^4 + 1} dy - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{in} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ny^2}}{y^2 - i} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{in} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ny^2}}{y^2 - i} dy.$$

Esta última integral es, en módulo, menor que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ny^2}}{\sqrt{y^4+1}} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t^4+n^2}} dt < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

y, en consecuencia, tiende a cero para $n \rightarrow +\infty$. Se deduce así

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

y, por ende, la (1).

48 - Sea $f(x)$ una función continua en $[0, +\infty]$ tal que la integral impropia $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, con $\alpha > 0$, resulte convergente (como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^n \dots$). Demostrar que, si $a > 0$, $b > 0$ se tiene la fórmula de Frullani

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}, \quad (1)$$

donde la integral escrita es, en general, impropia y debe considerarse definida

$$\text{como } \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ n \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^n \dots$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ n \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^n \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ n \rightarrow +\infty}} \left(\int_{\epsilon}^n \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\epsilon}^n \frac{f(bx)}{x} dx \right) = \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ n \rightarrow +\infty}} \left(\int_{a\epsilon}^{an} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\epsilon}^{bn} \frac{f(t)}{t} dt \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{a\epsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\epsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(t)}{t} dt; \end{aligned}$$

por el teorema de la media generalizado esta última integral es igual a

$f(\xi) \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dt}{t} = f(\xi) \log \frac{b}{a}$, donde ξ denota un punto oportuno del intervalo que tiene por extremos los puntos $a\varepsilon$, $b\varepsilon$; de aquí que, por la continuidad de $f(x)$ en el punto $x = 0$ el límite buscado valga $f(0) \log \frac{b}{a}$, que es lo que queríamos demostrar.

La (1) permite innumerables aplicaciones; por ejemplo con $f(x) = \cos x$, e^{-x} ,

49 - NOCIONES SOBRE LA INTEGRAL DE LEBESGUE

En el Cap. XX, ej. 16 ya hemos dado la noción de conjunto acotado medible L (según Lebesgue). Tal noción se extiende de inmediato al caso de los conjuntos no acotados con el mismo método que hemos seguido en "Lecciones", Cap. XXV, n° 1 en el caso de los conjuntos medibles J , a saber: diremos que un conjunto no acotado E es medible L si, fijado arbitrariamente un intervalo R , el conjunto acotado $E \cap R$ resulta medible L . Si esto sucede, se define la medida de E igual al número $m(E)$, finito o $+\infty$, extremo superior del conjunto numérico descripto por $m(E \cap R)$, cuando R varía arbitrariamente.

Se extienden fácilmente al caso de los conjuntos medibles L , acotados o no, los teor. I, II, ..., VII dados en Cap. XX, ej. 16, con la única advertencia que las medidas pueden ser infinitas, por lo que, por ejemplo, en el segundo miembro de las (4), (4') del ej. citado pueden figurar series, cuyos términos son todos, o en parte, iguales a $+\infty$; se debe, entonces, interpretar que tales series tienen suma $+\infty$.

Deseamos ahora dar algunas nociones relativas a la integral de Lebesgue.

En "Lecciones", Cap. XXV, hemos considerado solamente funciones generalmente continuas; aquí conviene considerar una clase mucho más general de funciones: la de las denominadas funciones casi continuas (según Tonelli).

Sea E un conjunto medible L del espacio S_r que, en un primer análisis, supondremos acotado, y sea $f(P)$ una función definida en puntos de E . Diremos que la $f(P)$ es, en E , casi continua si, fijado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado C_ϵ contenido en E que verifica las siguientes dos condiciones: a) $m(E) - m(C_\epsilon) < \epsilon$; b) $f(P)$ continua en C_ϵ . En el caso en que E sea no acotado, diremos que la $f(P)$ es casi continua en E si, fijado arbitrariamente un intervalo R , la $f(P)$ resulta así en el conjunto acotado $E \cap R$.

Es fácil ver que las funciones generalmente continuas consideradas en "Lecciones" son un caso particular de las funciones casi continuas. Es también fácil demostrar que, si $f(P)$ es en E casi continua, el conjunto de los puntos de E en los que puede no estar definida la $f(P)$ es un conjunto de medida nula.

Dicho esto, demos el modo de definir (cuando sea posible) la integral de Lebesgue de una función casi continua extendida a un conjunto medible L . Consideraremos cuatro casos sucesivos.

1^{er} caso) Sea $f(P)$ continua en el conjunto C cerrado y acotado.

Se define en este caso la integral $\int_C f(P) dT$ con un procedimiento análogo al visto en el Cap. XX, ej. 16, para definir $m(C)$. Precisamente, fijado un intervalo $R \supseteq C$, se hace una descomposición coordenada \mathcal{Q} de R con

norma δ y se buscan los intervalos R_1, R_2, \dots, R_n de \mathcal{D} que tienen por lo menos un punto común con C . Indicados después con m_i, M_i el mínimo y el máximo, respectivamente, de la función continua $f(P)$ en el conjunto cerrado y acotado $C \cap R_i$ y con P_i un punto cualquiera de $C \cap R_i$, se pone (naturalmente tras haber demostrado que los tres límites que se indican existen finitos y son iguales entre sí):

$$\begin{aligned} \int_C f(P) dT &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \text{ med } R_i = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \cdot \text{ med } R_i = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{ med } R_i \end{aligned} \quad (1)$$

2º caso) Sea $f(P)$ casi continua y acotada en el conjunto E acotado y medible L .

Entonces, fijado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado (y acotado) C_ϵ , contenido en E , cuya medida difiere de la de E en menos de ϵ y en el que la $f(P)$ es continua. Según la definición introducida en el 1º caso, podemos considerar la integral $\int_{C_\epsilon} f(P) dT$. Se demuestra, aprovechando la hipótesis de que $f(P)$ es acotada, que existe de terminado y finito el $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(P) dT$ y entonces se pone por definición

$$\int_E f(P) dT = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(P) dT \quad (2)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\int_E f(P) dT = \lim_{m(C) \rightarrow m(E)} \int_C f(P) dT \quad (2')$$

3º caso) Sea $f(P)$ casi continua en el conjunto E acotado y medible L .

Vale todavía, como antes, la consideración de la integral $\int_{C_\epsilon} f(P) dT$; pero, como se ha abandonado la hipótesis de la acotación de $f(P)$, ya no se puede asegurar que exista finito el límite (2) o (2'). Es necesario imponer a la $f(P)$ alguna otra condición y, precisamente, la de ser sumable en E , con lo que se quiere significar que la integral $\int_{C_\epsilon} |f(P)| dT$ se mantiene acotada cuando ϵ varía. Con esta condición se demuestra que todavía existe, determinado y finito, el límite (2) o (2') que se asume como definición de la integral $\int_E f(P) dT$.

4º caso) Sea $f(P)$ casi continua en el conjunto E no acotado y medible L .

Pasando al caso de E no acotado se dirá que la $f(P)$ es sumable en E si, fijado arbitrariamente el intervalo R , la $f(P)$ resulta sumable en el conjunto acotado $E \cap R$ y si, además, la integral $\int_{E \cap R} |f(P)| dT$ se mantiene acotada mientras R varía.

Si esto sucede se demuestra que existe determinado y finito el límite de $\int_{E \cap R} f(P) dT$ cuando R tiende al espacio S_r ; se pone, entonces, por definición

$$\int_E f(P) dT = \lim_{R \rightarrow S_r} \int_{E \cap R} f(P) dT \quad (3)$$

Se han contemplado así todos los casos posibles: en los dos primeros la integral de Lebesgue existe siempre (es decir, la función es siempre sumable); en los otros dos se puede hablar de la misma solamente si la función es sumable. Nótese que la sumabilidad de una función $f(P)$ está siempre acompañada por la de $|f(P)|$.

El concepto de función sumable que hemos dado en "Lecciones", Cap. XXV, es

un caso muy particular de la sumabilidad más general ahora introducida. Prestese atención, sin embargo, al hecho de que esta mayor generalidad debe interpretarse en el sentido de que el concepto de sumabilidad según Lebesgue puede aplicarse a las funciones casi continuas, que son extremadamente más generales que las generalmente continuas; pero no en el sentido de que ciertas funciones no sumables según el concepto elemental puedan resultarlo adoptando la integral de Lebesgue. En otros términos: las funciones sumables o no sumables en sentido elemental se mantienen sumables o no sumables, respectivamente, en el sentido de Lebesgue; hay, eso sí, una clase muy vasta de funciones para las cuales la sumabilidad elemental no puede ser considerada (por no ser generalmente continuas) mientras que vale para ellas la sumabilidad según Lebesgue.

Enumeramos ahora las propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue. (*)

I - Se tiene
$$\left| \int_E f(P) dT \right| \leq \int_E |f(P)| dT$$

II - (Aditividad de la integral). Si la función $f(P)$ es sumable en un conjunto E que sea unión de un número finito o de una infinidad numerable (**) de conjuntos E_1, E_2, E_3, \dots , dos a dos sin puntos comunes, se tiene.

$$\int_E f(P) dT = \sum_k \int_{E_k} f(P) dT$$

Esta propiedad continúa valiendo si la hipótesis de que

(*) Al enunciar estas propiedades se sobreentenderá que todos los conjuntos considerados E, E_1, E_2, \dots son medibles L .

(**) Nótese que, para la integral de Lebesgue, la propiedad aditiva vale también para una infinidad numerable de conjuntos.

los conjuntos carezcan dos a dos de puntos comunes es sustituida por la de que la intersección de dos cualesquiera de ellos tenga medida nula.

III - (Distributividad en la integral). Si las funciones $f_1(P)$, $f_2(P)$, ..., $f_n(P)$, (en número finito), son sumables en E siendo c_1, c_2, \dots, c_n constantes cualesquiera, la función $c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \dots + c_n f_n(P)$ resulta también sumable y se tiene

$$\begin{aligned} \int_E [c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \dots + c_n f_n(P)] dT &= \\ &= c_1 \int_E f_1(P) dT + c_2 \int_E f_2(P) dT + \dots + c_n \int_E f_n(P) dT \end{aligned}$$

IV - (Absoluta continuidad de la integral). Si $f(P)$ es sumable en E , fijado $\epsilon > 0$ puede determinarse un $\delta_\epsilon > 0$ tal que, para todo conjunto medible G , contenido en E con $m(G) < \delta_\epsilon$, resulta $\left| \int_G f(P) dT \right| < \epsilon$.

Más general aún: dado $\epsilon > 0$ es posible determinar un intervalo R_ϵ y un número δ_ϵ positivo tales que, para todo conjunto medible G , contenido en E con $m(G \cap R_\epsilon) < \delta_\epsilon$, resulta $\left| \int_G f(P) dT \right| < \epsilon$ (cfr. ej. 7).

V - Si $m(E) = 0$ una función arbitraria $f(P)$ resulta sumable en E y se tiene $\int_E f(P) dT = 0$. La función $f(P) \equiv 1$ es sumable en todo conjunto E de medida finita y se tiene $\int_E dT =$

$= m(E)$.

VI - Si $f(P)$, $g(P)$ son sumables en E y para casi todo (*) punto de E es $f(P) \geq g(P)$, se tendrá $\int_E f(P) dT \geq \int_E g(P) dT$, valiendo el signo de igualdad si y sólo si, para casi todo P de E es $f(P) = g(P)$.

Otra importantísima propiedad de la integral de Lebesgue la proporciona el denominado teorema de Fubini relativo a la reducción de las integrales múltiples.

Sea $X(x_1, x_2, \dots, x_p)$ un punto del espacio S'_p de p dimensiones, e $Y(y_1, y_2, \dots, y_q)$ un punto del espacio S''_q de q dimensiones; reuniendo las coordenadas de los dos puntos se obtiene un nuevo punto $Z(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$ del espacio S_{p+q} de $p+q$ dimensiones, punto que también puede indicarse con la notación (X, Y) . A continuación tendremos necesidad de considerar integrales sobre conjuntos de S'_p , S''_q , S_{p+q} ; para distinguirlas convendremos en indicar los elementos de medida de tales espacios con dX , dY , $dX dY$, respectivamente.

Cuando el punto (X, Y) describe un conjunto E de S_{p+q} , los puntos X e Y varían en ciertos conjuntos E' de S'_p y E'' de S''_q ; estos conjuntos E' y E'' toman el nombre de proyecciones del conjunto E sobre los espacios S'_p y S''_q .

Fijado arbitrariamente un punto X en S'_p se puede considerar el conjunto (eventualmente vacío) de todos los puntos Y de S''_q que, asociados al X fi

(*) Se dice que una propiedad vale para casi todo punto de un conjunto E cuando vale para todos los puntos de E salvo, a lo sumo, en los de un conjunto de medida nula.

jado, proporcionan un punto (X, Y) de E ; tal conjunto, que indicaremos con $\sum_E''(X)$ se denomina la intersección de E con el espacio (de q dimensiones) de base X . Es evidente que $\sum_E''(X)$ resulta no vacío si y sólo si X pertenece a la proyección E' . Análogamente, fijado un punto Y en S_q'' puede considerarse la intersección $\sum_E'(Y)$ del conjunto E con el espacio (de p dimensiones) de base Y .

Que el conjunto E sea medible sobre el espacio S_{p+q} no implica que sus proyecciones E' , E'' sean conjuntos medibles sobre S_p' , S_q'' , respectivamente, como tampoco significa que sean medibles sus intersecciones $\sum_E''(X)$ (sobre S_q'') y $\sum_E'(Y)$ (sobre S_p').

Dicho lo cual podemos dar el teorema de Fubini que, para mayor claridad, subdividiremos en dos enunciados.

VII - Dado en el espacio S_{p+q} un conjunto medible E y considerada, para todo punto X de S_p' , su intersección $\sum_E''(X)$, se tiene:

- 1) para casi todo punto X de S_p' la intersección $\sum_E''(X)$ resulta un conjunto medible sobre S_q'' , quedando de este modo definida, para casi todo punto de S_p' la función $m[\sum_E''(X)]$ del punto X ;
- 2) la citada función $m[\sum_E''(X)]$ resulta casi continua en S_p' ;
- 3) si E tiene medida finita, la misma función es sumable en S_p' y vale la fórmula

$$\int_{S'_p} m \left[\sum''_E (X) \right] dX = m(E) \quad (4)$$

Un enunciado análogo vale para la intersección $\sum'_E (Y)$ y lleva a la fórmula

$$\int_{S''_q} m \left[\sum'_E (Y) \right] dY = m(E) \quad (4')$$

A propósito de la (4) téngase presente que $m \left[\sum''_E (X) \right] = 0$ cuando X cae fuera de la proyección E' de E sobre S'_p ; pero, en general es necesario escribir $\int_{S'_p} \dots$ en lugar de $\int_{E'}$ porque no queda dicho que E' sea medible; queda sobreentendido que, en los casos en que E' sea medible, se escribirá simplemente $\int_{E'}$. Análogamente para la (4').

VIII - Sea E un conjunto medible del espacio S_{p+q} y $f(X, Y)$ una función sumable en E . Entonces:

- 1) para casi todo punto X de S'_p la función $f(X, Y)$, considerada como función del punto Y , resulta casi continua y sumable en la intersección $\sum''_E (X)$;
- 2) considerada la integral $\int_{\sum''_E (X)} f(X, Y) dY$, ésta resulta una función del punto X casi continua y sumable en S'_p ;
- 3) vale la fórmula

$$\int_E f(X, Y) dX dY = \int_{S'_p} dX \int_{\sum''_E (X)} f(X, Y) dY, \quad (5)$$

que reduce el cálculo de una integral de una función de $p+q$ variables al cálculo sucesivo de una integral q -ple y de u-

na integral p-ple .

Vale también la fórmula análoga

$$\int_E f(X, Y) dX dY = \int_{S_q''} dY \int_{\Sigma_E'(Y)} f(X, Y) dX \quad (5')$$

y por ende vale el teorema de invertibilidad del orden de las integraciones expresado por

$$\int_{S_p'} dX \int_{\Sigma_E''(X)} f(X, Y) dY = \int_{S_q''} dY \int_{\Sigma_E'(Y)} f(X, Y) dX \quad (6)$$

No se puede, en general, invertir el teorema precedente, o sea que puede suceder que tengan sentido los segundos miembros de (5), (5') $\left[\text{inclusive de modo que valga la (6)} \right]$ sin que la $f(X, Y)$ sea sumable en E ; para que esto suceda es necesario agregar alguna hipótesis más sobre la función f , por ejemplo que tenga signo constante. Vale, en efecto, el siguiente teorema de Tonelli:

IX - Condición suficiente para que la función casi continua $f(X, Y)$ sea sumable en el conjunto E es que para casi todo punto X de S_p' la función $|f(X, Y)|$, considerada como función de Y , resulte sumable en la intersección $\Sigma_E''(X)$ y, además, que la función $\int_{\Sigma_E''(X)} |f(X, Y)| dY$, del punto X , sea a su vez sumable en S_p' . Análogamente intercambiando X con Y .

50 - Agreguemos otras nociones sobre la integral de Lebesgue de las funciones $f(x)$ de una variable x , considerada en intervalos.

Introduzcamos previamente una definición. Se dirá que una función $F(x)$, definida en un intervalo $[a, b]$, es en tal intervalo absolutamente continua cuando, dado $\epsilon > 0$ puede determinarse un $\delta_\epsilon > 0$ tal que, fijado arbitrariamente un entero positivo n y elegidos arbitrariamente n intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$ contenidos en $[a, b]$, no sobrepuestos y tales que la suma de sus longitudes sea menor que δ_ϵ , resulte

$$|F(b_1) - F(a_1)| + |F(b_2) - F(a_2)| + \dots + |F(b_n) - F(a_n)| < \epsilon.$$

Es evidente que toda función absolutamente continua es continua; pero pueden presentarse ejemplos que muestran que no es cierta la recíproca. Puede demostrarse el siguiente teorema:

I - Toda función $F(x)$ absolutamente continua en un intervalo $[a, b]$ es, para casi todo punto de tal intervalo, derivable; existe, entonces, la derivada $F'(x)$ en todos los puntos x de $[a, b]$ salvo, a lo sumo, los de un conjunto de medida nula.

Tras este enunciado consideremos una función $f(x)$ que sea sumable en $[a, b]$. Entonces, para todo $x \in [a, b]$ tendrá sentido la integral de Lebesgue $\int_a^x f(t) dt = F(x)$ quedando así definida en $[a, b]$ la función $F(x) + c$ (con c constante arbitraria) que toma el nombre de integral indefinida de $f(x)$. Del teor. IV del ej. precedente se deduce muy fácilmente que la integral indefinida $F(x) + c$ de una función sumable $f(x)$ es una función absolutamente continua. Por el teor. I, la citada integral indefinida es, para casi todo punto, derivable. Pues bien; se demuestra que la derivada $F'(x)$ resulta en casi todo punto igual a la función

$f(x)$ que se integra. O sea que se tiene el teorema:

II - Toda función sumable $f(x)$ es para casi todo punto igual a la derivada de su integral indefinida $c + \int_a^x f(t) dt$ (que es una función absolutamente continua).

Este teorema puede invertirse y se encuentra:

III - Dada una función absolutamente continua $F(x)$, su derivada $F'(x)$ (que existe para casi todo punto) es una función sumable y se tiene

$$\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a) .$$

En otras palabras, las funciones sumables $f(x)$ resultan dotadas de funciones primitivas absolutamente continuas $F(x)$, mientras que toda función absolutamente continua $F(x)$ puede considerarse como primitiva de una función sumable $f(x)$, valiendo la fórmula fundamental

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Se ha logrado así extender el teorema de Torricelli - Barrow demostrado en "Lecciones", Cap. IX, n° 6 solamente en el caso de las $f(x)$ continuas. Sin embargo tampoco esta extensión es del todo completa pues permite pasar de la derivada $f(x)$ a la primitiva $F(x)$ solamente en la hipótesis que tal derivada $f(x)$ sea sumable según Lebesgue. Digamos, a título informativo, que para la resolución completa del problema de la búsqueda de la función primitiva, es necesario recurrir a un concepto de integral todavía más general que la de Lebesgue: la denominada integral de Denjoy.

Para las integrales de Lebesgue se extienden fácilmente las fórmulas de inte-

gración por partes y por sustitución, con los siguientes enunciados:

IV - Si en el intervalo $[a, b]$ la función $f(x)$ es absolutamente continua y la $g(x)$ es sumable, una vez introducida la integral indefinida

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt + c$$

de la $g(x)$, vale la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \left[f(x) G(x) \right]_a^b - \int_a^b G(x) f'(x) dx$$

V - Sea $f(x)$ sumable en $[a, b]$ y sea $\varphi(t)$ una función absolutamente continua en $[t_0, t_1]$, resultando siempre $a \leq \varphi(t) \leq b$. Si el producto $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ es sumable en $[t_0, t_1]$ se tiene

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_1)} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

Vale la pena observar que, si la $f(x)$ está acotada en $[a, b]$ la hipótesis de la sumabilidad de $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ es evidentemente superflua.

CAPITULO XXVI

Series de funciones

Precedamos los ejercicios relativos al Cap. XXVI de "Lecciones" con algunos complementos referentes a series numéricas. (ej. 1, 2, 3, 4, 5):

1 - SERIES DE TERMINOS COMPLEJOS (ver "Lecciones, Cap. XI , n° 10)

Estudiar la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ donde z es un número real o complejo.

Con el mismo razonamiento usado en el campo real se ve que tal serie es convergente (absolutamente) solamente si $|z| < 1$ y en ese caso tiene la suma $\frac{1}{1-z}$.

Si en la fórmula $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, (para $|z| < 1$)

se pone $z = \rho e^{i\varphi}$, con $0 \leq \rho < 1$ y se separa lo real de lo imaginario se encuentran las dos fórmulas notables

$$1 + \rho \cos \varphi + \rho^2 \cos 2\varphi + \rho^3 \cos 3\varphi + \dots = \frac{1 - \rho \cos \varphi}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2}$$

$$\rho \sin \varphi + \rho^2 \sin 2\varphi + \rho^3 \sin 3\varphi + \dots = \frac{\rho \sin \varphi}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2}$$

válidas para $0 \leq \varphi < 1$ y cualquier φ .

2 - Retórnense los ejercicios 1 y 3 del Cap. V (suponiendo a complejo) y el ej. 10 del mismo capítulo (suponiendo x complejo) y hágase ver que las fórmulas allí establecidas continúan valiendo. Dedúzcanse de ellas nuevas fórmulas separando la parte real de la imaginaria.

Por ejemplo, con referencia al ej. 1, poniendo $a = b + ic$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+b+ic)(k+b+1+ic)} = \frac{1}{b+1+ic}$$

y de aquí se obtienen las

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+b)(k+b+1)-c^2}{[(k+b)^2+c^2][(k+b+1)^2+c^2]} = \frac{b+1}{(b+1)^2+c^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+2b+1}{[(k+b)^2+c^2][(k+b+1)^2+c^2]} = \frac{1}{(b+1)^2+c^2}.$$

Análogamente en los otros casos.

3 - Demostrar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$, de términos reales o

complejos es absolutamente convergente, también lo será

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} w_k^2$.

En efecto; como $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$ existirá un índice ν de modo que, para $k > \nu$ resulta $|w_k| \leq 1$ y, por ende, $|w_k^2| \leq |w_k|$.

Entonces, siendo convergente por hipótesis la $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ también resultará así la $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k^2|$, que es lo que queríamos demostrar.

Obsérvese que la hipótesis de la absoluta convergencia es necesaria, como muestra el ejemplo de las dos series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Notemos también que no vale la propiedad inversa, es decir, $\sum w_k^2$ puede ser convergente sin que lo sea la $\sum w_k$, como lo prueba el ejemplo de las $\sum \frac{1}{k^2}$, $\sum \frac{1}{k}$.

4 - Retómese el ej. 17 y hágase ver que la función $\zeta(\alpha)$ de Riemann puede definirse para valores complejos de α mediante la misma fórmula

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (1)$$

cuando de k^{α} , con tal que sea $R(\alpha) > 1$, se tome la determinación principal.

Poniendo $\alpha = \beta + i\gamma$ se tiene $k^{\alpha} = e^{(\beta+i\gamma)\log k}$ (con $\log k$ real), o sea, $k^{\alpha} = k^{\beta} e^{i\gamma \log k}$. Por lo tanto $|k^{\alpha}| = k^{\beta}$, y si $\beta > 1$, la serie (1) resulta absolutamente convergente, etc., etc.

5 - DOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA NO ABSOLUTA.

Daremos ahora dos criterios de convergencia no absoluta que generalizan los teoremas I y II de "Lecciones", Cap. V, n° 5.

Con ese motivo conviene ahora introducir un nuevo concepto. Se dirá que una sucesión $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ de términos reales o complejos es de variación total finita cuando resulta convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k - c_{k+1}| \quad (1)$$

En ese caso es convergente también la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{k+1})$, es decir, existe finito el $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k+1}) = c_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}$ y entonces toda sucesión de variación total finita es convergente.

Tras decir esto, pasamos a enunciar el primero de los dos criterios anunciados:

I - Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ (de términos reales o complejos) tiene sus sumas parciales S_n acotadas y si la sucesión $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ (de números reales o complejos) es infinitésima y de variación total finita, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k$ será convergente.

Dem. Es del todo análoga a la del ya citado teor. I. Suponiendo $|S_n| \leq M$ notemos que de la relación $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ y de la convergencia de la (1) sigue que, dado $\epsilon > 0$ puede determinarse un índice ν tal de tenerse

$$|c_k| < \frac{\epsilon}{4M} \quad (\text{para } k > \nu) \quad (2)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k - c_{k+1}| < \frac{\epsilon}{2M} \quad (\text{para } n > \nu \text{ y cualquier } p) \quad (3)$$

Entonces, tras observar que se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k w_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k (S_k - S_{k-1}) = -c_{n+1} S_n + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (c_k - c_{k+1}) S_k + c_{n+p} S_{n+p} \quad (*) \end{aligned}$$

y, como consecuencia,

(*) A esta transformación de la $\sum c_k w_k$ se le da, a menudo, el nombre de transformación de Brunacci - Abel.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k w_k \right| \leq M \left\{ |c_{n+1}| + |c_{n+p}| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |c_k - c_{k+1}| \right\},$$

se deduce que, para $n > \nu$ y cualquier p resulta, debido a las (2), (3) :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k w_k \right| \leq M \left(\frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{2M} \right) = \epsilon,$$

lo que prueba la tesis.

El segundo criterio se enuncia

II - Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ (de términos reales o complejos) es convergente y si la sucesión $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ (de números reales o complejos) es de variación total finita, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k$ es convergente.

Dem. Poniendo $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$ puede escribirse

$$\sum c_k w_k = c \sum w_k + \sum (c_k - c) w_k,$$

donde ambas series del segundo miembro son convergentes: la primera, por hipótesis; la segunda, por el teor. I.

6 - CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SERIE DE FUNCIONES; TEOREMAS DE DERIVACION E INTEGRACION POR SERIE. (ver "Lecciones", Cap. XXVI).

Demostrar que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{(1+kx)(1+(k+1)x)}$$

es convergente en $[0, \infty]$; pero no es, en tal intervalo, uniformemente convergente.

Observando que $\frac{x}{(1+kx)(1+(k+1)x)} = \frac{1}{1+kx} - \frac{1}{1+(k+1)x}$ la suma

$S_n(x)$ de los primeros n términos de la serie resultará

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{1+kx} - \frac{1}{1+(k+1)x} \right] = 1 - \frac{1}{1+nx},$$

por lo que para la suma $f(x)$ de la serie se tendrá

$$f(x) \begin{cases} = 0 & (\text{si } x = 0) \\ = 1 & (\text{si } x > 0) \end{cases};$$

la serie es, entonces, convergente en $[0, +\infty]$. Para su resto n -ésimo tendremos

$$R_n(x) \begin{cases} = 0 & (\text{si } x = 0) \\ = \frac{1}{1+nx} & (\text{si } x > 0) \end{cases}$$

y la desigualdad $R_n(x) < \epsilon$ (con $\epsilon > 0$) queda verificada para todo n si $x = 0$ mientras que para $x > 0$ lo será sólo para $n > \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$.

Suponiendo $\epsilon < 1$, esta última cantidad no se mantiene acotada al variar x (> 0) tendiendo a $+\infty$ cuando $x \rightarrow 0$; de aquí que la serie no sea uniformemente convergente.

7 - Demostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x [k(k+1)x^2 - 1]}{(k^2 x^2 + 1) [(k+1)^2 x^2 + 1]}$$

es convergente en $[-\infty, +\infty]$, sin ser uniformemente convergente en tal intervalo.

$$\text{Se tiene } S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{kx}{k^2 x^2 + 1} - \frac{(k+1)x}{(k+1)^2 x^2 + 1} \right] = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{(n+1)x}{(n+1)^2 x^2 + 1},$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad R_n(x) = \frac{(n+1)x}{(n+1)^2 x^2 + 1}. \quad \text{La desigualdad } |R_n(x)| < \epsilon$$

queda satisfecha para todo n si $x = 0$ mientras que, para $x \neq 0$, lo será solamente si $\left[(n+1)|x| \right]^2 - \frac{1}{\epsilon} (n+1)|x| + 1 > 0$, o sea, si (suponiendo $\epsilon < \frac{1}{2}$):

$$n+1 > \frac{\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 4}}{2|x|}.$$

Esta última cantidad no se mantiene acotada cuando x varía, de donde sigue la tesis. Obsérvese que, aunque la serie no es uniformemente convergente, la suma es de todos modos una función continua.

8 - Considerada en $[-\infty, +\infty]$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k} \log(k^2 x^2 + 1) - \frac{1}{2(k+1)} \log[(k+1)^2 x^2 + 1] \right\}$$

hágase ver que es derivable término por término aunque la serie de las derivadas no sea uniformemente convergente.

La serie dada tiene sumas parciales $S_n(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - \frac{1}{2(n+1)} \log[(n+1)^2 x^2 + 1]$ y suma $f(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$ resultando, por tanto, convergente. La serie de las derivadas es la estudiada en el ejercicio precedente; sabemos que es convergente (no uniformemente) y que su suma es $\frac{x}{x^2 + 1}$. Esta es, precisamente, la derivada de la suma $f(x)$ de la serie dada.

9 - La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right)$ es uniformemente convergente

en $[-1, 1]$ con suma igual a x . Hágase ver que la serie

de las derivadas no converge uniformemente y que la serie dada no es derivable término por término.

Dejamos al lector la fácil demostración.

10 - Del ej. 3 del Cap. V deducir un ejemplo de serie no uniformemente convergente que, sin embargo, es integrable término por término (en un intervalo del tipo $[0, a]$).

11 - Demostrar que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[k^2 x e^{-k^2 x^2} - (k+1)^2 x e^{-(k+1)^2 x^2} \right]$$

es convergente en $[-\infty, +\infty]$; pero no es uniformemente convergente. Demostrar además, que no es integrable término por término en $[0, a]$.

Se tiene $S_n(x) = -n^2 x e^{-n^2 x^2}$, $f(x) = 0$, $R_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$ y puesto que en el punto $x = \frac{1}{n}$ se tiene $R_n = n e^{-1}$ no puede obtenerse $R_n(x)$ pequeño a voluntad, para cualquier x , aunque se intente tomar n de manera conveniente.

La integral $\int_0^a f(x) dx$ vale cero mientras la serie de las integrales es

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left[k^2 \int_0^a x e^{-k^2 x^2} dx - (k+1)^2 \int_0^a x e^{-(k+1)^2 x^2} dx \right] = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1 - e^{-k^2 a^2}}{2} - \frac{1 - e^{-(k+1)^2 a^2}}{2} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-(k+1)^2 a^2} - e^{-k^2 a^2}) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n^2 a^2} - 1) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

12-NOCIONES SOBRE TEOREMAS DE PASAJE AL LIMITE BAJO EL SIGNO DE INTEGRAL EN LAS INTEGRALES DE LE BESGUE.

Con referencia al ej. 50 del Cap. precedente consideraremos nuevamente la teoría de la integral de Lebesgue para poner en evidencia que en ella resultan bastante más simples y expresivos los teoremas de integración por serie, o sea, de pasaje al límite bajo el signo de integral.

Sea

$$f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P), \dots \quad (1)$$

una sucesión de funciones casi continuas en el conjunto E medible (según Lebesgue), acotado o no. Diremos que la sucesión es convergente para casi todo punto de E cuando converge en todos los puntos de E salvo, a lo sumo, en los de un conjunto N de medida nula.

Naturalmente para una sucesión de esta naturaleza no se verifica, en general, la convergencia uniforme en $E - N$; sin embargo, se tiene al respecto el fundamental teorema de Severini-Egoroff:

I - Si la sucesión (1) es convergente para casi todo punto de E [o sea, es convergente en $E - N$, con $m(N) = 0$] y si el conjunto E tiene medida finita, fijado arbitrariamente un número $\epsilon > 0$ puede construirse siempre un conjunto medible G , contenido en $E - N$, con $m(G) < \epsilon$, tal que en $E - N - G$ la convergencia de la sucesión (1) sea uniforme.

Una primera consecuencia del teor. I es la siguiente:

II - Si la sucesión (1), de funciones casi continuas en E , resulta convergente para casi todo punto de E , la función límite $f(P)$ será también casi continua en E .

Tras lo cual, valiéndonos de estos dos teoremas, pueden obtenerse varios teoremas de pasaje al límite bajo el signo de integral, de los que el más simple y útil es el que enunciamos a continuación:

III - Considérese la sucesión (1) constituida por funciones sumables en E y convergente para casi todo punto de E hacia la función $f(P)$. Si existe una función $F(P)$, no negativa y sumable en E , tal que resulte

$$|f_n(P)| \leq F(P), \text{ para todo } n \text{ y para casi todo punto de } E,$$

la $f(P)$ será sumable en E y se tendrá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(P) dT = \int_E f(P) dT.$$

Este teorema se puede transformar de inmediato en uno referente a la integración por serie.

III' - Supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(P)$ tenga sus términos sumables en E y resulte para casi todo punto de dicho conjunto convergente con suma $f(P)$. Entonces, si existe una función $F(P) \geq 0$, sumable en E , tal de tenerse

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(P) \right| \leq F(P) \text{ para todo } n \text{ y para casi todo punto de } E,$$

la $f(P)$ resultará sumable en E y se podrá calcular su integral por medio de una integración término por término, o sea, será

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(P) \right) dT = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(P) dT$$

Si se compara el teor. III del Cap. XXVI de "Lecciones" con el actual teorema III, se ve que en este último no quedan rastros de la hipótesis relativa a la convergencia uniforme de la sucesión considerada. La razón por la que se ha podido abandonar tal hipótesis reside, evidentemente, en el teor. I de Severini-Egoroff; debe tenerse presente, sin embargo, que este último vale solamente en la teoría de la medida de los conjuntos según Lebesgue y no es posible darle validez si se usa la medida según Jordan.

Continuando la comparación entre los dos enunciados citados obsérvese además que en el de este volumen no figura más la hipótesis restrictiva que para todas las funciones se pueda determinar un conjunto singular común N (cerrado y de medida nula). La razón de esta supresión está en el teor. II según el cual la operación de pasaje al límite mantiene la casi continuidad; un teorema análogo no vale para la "general continuidad" (introducida en "Lecciones", Cap. XXV, n^{os} 3, 5) por lo que en el teor. III dado en "Lecciones" se ha debido introducir la citada hipótesis restrictiva para asegurarse que también la función límite sea generalmente continua.

Se pone así en evidencia cómo la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue permite llegar a resultados no sólo más generales sino también más simples que los de la teoría elemental.

13 - SERIE DE TAYLOR EN EL CAMPO REAL (ver "Lecciones", Cap. XXVI, n^o 6)

Escribir los desarrollos en serie de Mac Laurin de las funciones $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\cos^3 x$, $\sin^3 x$.

Sin recurrir al cálculo de las derivadas sucesivas, en el punto $x = 0$, de las funciones consideradas, los desarrollos buscados se pueden obtener inmediatamente de los ya conocidos de $\cos x$, $\sin x$, válidos para toda x , recordando las fórmulas de trigonometría

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}, \quad \sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

Se llega así a las siguientes fórmulas:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} \right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k},$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k},$$

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \frac{1}{4} \left[3 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!} \right] = \\ &= 1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k-1} + 1}{(2k)!} x^{2k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \frac{1}{4} \left[3 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = \\ &= \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{3^{2k} - 1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \end{aligned}$$

que tienen validez para cualquier x .

14 - Escribir el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función

$$f(x) = 1 - \cos x - x \operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2}$$

Procediendo como en el ej. precedente se encontrará, para todo x :

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2k-1}{(2k)!} x^{2k}$$

15 - Escribir el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función $\log \sqrt{1+x^2}$.

Basta observar que $\log \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \log (1+x^2)$ y recordar la serie logarítmica $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$, válida para $-1 < x \leq 1$. Escribiendo en esta última x^2 en lugar de x , y suponiendo entonces $-1 \leq x \leq 1$, se obtiene

$$\log \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \log (1+x^2) = \frac{1}{2} (x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots), \text{ (para } -1 \leq x \leq 1.)$$

16 - Escribir el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^n}$$

También en este caso puede ser evitado el cálculo de las derivadas sucesivas de la $f(x)$ en el punto $x=0$, observando que $f(x) = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}$ y recordando la serie geométrica. Se obtiene así, para $|x| < 1$:

$$f(x) = (1-x)(1+x^{n+1}+x^{2n+2}+\dots) = 1-x+x^{n+1}-x^{n+2}+x^{2n+2}-x^{2n+3}+\dots$$

17 - Determinar el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función $f(x) = \arg \operatorname{senh} x = \log (x + \sqrt{1+x^2})$.

Conviene apoyarse en el desarrollo de la derivada $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, aprovechando la teoría de la serie binomial. Se encuentra

$$f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} \quad (1)$$

y esta fórmula vale para $x^2 \leq 1$, o sea, $-1 \leq x \leq 1$.

La serie escrita es uniformemente convergente en $[-1, 1]$, como resulta del razonamiento que sigue: sus términos son de signo alternado, decrecientes en valor absoluto; entonces $|R_n(x)| < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ y esta última cantidad (que es independiente de x) tiende a cero, para $n \rightarrow \infty$, como consecuencia de la fórmula de Wallis (ver "Ejercicios", Cap. IX, ej.36)*.

Tras lo cual, de la (1), se obtiene con una integración entre 0 y x (supuesto $|x| \leq 1$) y teniendo en cuenta que $f(0) = 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad (\text{para } -1 \leq x \leq 1).$$

18 - Determinar el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1+x^2}$.

Sígase el mismo procedimiento del ejercicio precedente, partiendo del desarrollo de $f'(x) = \operatorname{arctg} x$ (la uniforme convergencia de ésta en $[-1, 1]$ sigue de observar que $|R_n(x)| < \frac{1}{2n+1}$). Se hallará

(*) Puede escribirse $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{\sqrt{(2n-2)!!(2n)!!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$; el primer factor tiende a $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ el segundo a cero.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{2k(2k-1)}, \quad (\text{para } -1 \leq x \leq 1).$$

También puede encontrarse este resultado (lo dejamos para el lector) calculando la diferencia entre los desarrollos de $x \operatorname{arctg} x$ y de $\log \sqrt{1+x^2}$ (ver ej. 16).

19 - Determinar el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función $f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x}$.

Sabemos que para $|x| < 1$ valen ambos desarrollos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots; \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

que son absolutamente convergentes. En consecuencia el producto de Cauchy de las dos series escritas converge y tiene por suma el producto $\frac{\log(1+x)}{1+x}$ de sus sumas. Se encuentra así

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots,$$

(para $|x| < 1$)

20 - Escribir los desarrollos en serie de Mac Laurin de las dos funciones

$$u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad v(x) = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

El camino más rápido para lograr tal objetivo es observar que $u(x) + i v(x) = e^{(\alpha + i\beta)x}$ por lo que, recordando que $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$, cualquiera sea z real o complejo, se obtiene

$$u(x) + iv(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + i\beta)^k}{k!} x^k,$$

con lo que, separando la parte real de la imaginaria, se obtienen los desarrollos buscados. Para hacer esto conviene introducir módulo y argumento del número complejo $\alpha + i\beta$; poniendo $\alpha + i\beta = \rho e^{i\varphi}$ se tiene $(\alpha + i\beta)^k = \rho^k (\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi)$, con lo que, en definitiva, resulta para todo x

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k \cos k\varphi}{k!} x^k, \quad v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k \operatorname{sen} k\varphi}{k!} x^k.$$

21 - Considérense los dos conocidos desarrollos en serie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

y demuéstrese que, si $x > 0$, sus sumas parciales de orden impar dan valores aproximados por exceso de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, mientras que las de orden par dan valores aproximados por defecto (*).

De $\cos x \leq 1$ sigue $\int_0^x \cos x \, dx \leq \int_0^x dx$, o sea, $\operatorname{sen} x \leq x$; de ésta sigue $\int_0^x \operatorname{sen} x \, dx \leq \int_0^x x \, dx$, vale decir, $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$, o sea,

$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$; a su vez de ésta se obtiene $\int_0^x \cos x \, dx \geq \int_0^x (1 - \frac{x^2}{2}) dx$,

o sea, $\operatorname{sen} x \geq x - \frac{x^3}{3!}$; etc., etc.. Un fácil razonamiento por inducción completa la demostración.

(*) Nótese que este teorema no es una consecuencia del tan conocido sobre las series de términos con signos alternados, decrecientes en valor absoluto e infinitésimos (ver "Lecciones", Cap. XXVI, n. 5) ya que, en general, sus términos no son de valor absoluto decreciente.

22 - Determinar el desarrollo en serie de Mac Laurin de la función

$$f(x) = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1)$$

Se podría seguir el método indicado en el ej. 20, realizando el producto de Cauchy de los conocidos desarrollos de $\arcsen x$ y $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ que, para $|x| < 1$, son absolutamente convergentes; pero, con este método no se obtiene una expresión simple para los coeficientes del desarrollo producto. No seguiremos, por ese motivo, tal método, limitándonos a tener presente que el poder aplicarlos asegura a priori la validez, para $|x| < 1$, del desarrollo buscado.

No queda sino efectuar el cálculo directo de los coeficientes $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

De la (1) sigue $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsen x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x f(x)}{1-x^2}$; se tiene así

$$(1-x^2) f'(x) - x f(x) - 1 = 0,$$

y de aquí, derivando n veces y teniendo en cuenta la fórmula de Leibnitz se deduce

$$\left[(1-x^2) f^{(n+1)}(x) - 2nx f^{(n)}(x) - n(n-1) f^{(n-1)}(x) \right] - \\ - \left[x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) \right] = 0,$$

vale decir

$$(1-x^2) f^{(n+1)}(x) - (2n+1)x f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Si aquí se pone $x = 0$ se obtiene

$$f^{(n+1)}(0) = n^2 f^{(n+1)}(0) \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad ,$$

y entonces, siendo $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, se obtiene $f''(0) = f^{IV}(0) = f^{VI}(0) = \dots = 0$; $f'''(0) = 2^2$, $f^V(0) = 2^2 \cdot 4^2$, $f^{VII}(0) = 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2$, ...

Se llega así a que el desarrollo buscado es

$$f(x) = x + \frac{2^2}{3!} x^3 + \frac{(2 \cdot 4)^2}{5!} x^5 + \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2}{7!} x^7 + \dots$$

o sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(2k)!!]^2}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad , \quad \text{para } -1 < x < 1 \quad .$$

23 - Determinar los desarrollos en serie de Mac Laurin de las dos funciones

$$u(x) = \cos(m \operatorname{arcsen} x) \quad , \quad v(x) = \operatorname{sen}(m \operatorname{arcsen} x) \quad , \quad (1)$$

donde m es una constante.

Con un artificio análogo al del ej. 20 obtendremos simultáneamente los dos desarrollos, razonando sobre la función

$$f(x) = u(x) + i v(x) = e^{i m \operatorname{arcsen} x} \quad , \quad (2)$$

de la que calcularemos, ante todo, las derivadas sucesivas en el punto $x = 0$.

Se tiene

$$f'(x) = i m \frac{e^{i m \operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad f''(x) = -m^2 \frac{e^{i m \operatorname{arcsen} x}}{1-x^2} + i m \frac{x e^{i m \operatorname{arcsen} x}}{(1-x^2)^{3/2}} \quad ,$$

y entonces $(1-x^2)f''(x) - x f'(x) + m^2 f(x) = 0$; de aquí, derivando n veces se

obtiene $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)x f^{(n+1)}(x) + (m^2 - n^2)f^{(n)}(x) = 0$, de don-

de, poniendo $x = 0$

$$f^{(n+2)}(0) = -(m^2 - n^2)f^{(n)}(0) \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad .$$

Entonces, siendo $f(0) = 1$, $f'(0) = im$, se obtiene sucesivamente
 $f''(0) = -m^2$, $f^{IV}(0) = m^2(m^2 - 2^2)$, $f^{VI}(0) = -m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)$, ... ,
 $f'''(0) = -im(m^2 - 1^2)$, $f^V(0) = im(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)$, $f^{VII}(0) =$
 $= -im(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)$;

y entonces la serie de Mac Laurin de la función (2) se escribe

$$1 + imx - \frac{m^2}{2!} x^2 - im \frac{m^2 - 1^2}{3!} x^3 + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{4!} x^4 + \\ + im \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{5!} x^5 + \dots$$

y, separando la parte real de la imaginaria se ve que las series de Mac Laurin relativas a las funciones (1) son

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{m^2}{2!} x^2 + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{4!} x^4 - \frac{m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{6!} x^6 + \dots \\ m \left[x - \frac{m^2 - 1^2}{3!} x^3 + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{5!} x^5 - \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)}{7!} x^7 + \dots \right] \end{array} \right. \quad (3)$$

respectivamente.

Si m es un entero par ($= 2p$) la primera serie se reduce a un polinomio de grado $2p$; si m es un entero positivo ($= 2p-1$) la segunda serie se reduce a un polinomio de grado $2p-1$. Excluidos estos casos elementales^(*) se reconoce que las series (3) convergen para $|x| \leq 1$ (para $|x| < 1$ basta aplicar el criterio del cociente; para $x = \pm 1$ es necesario el criterio de Raabe). Queda por ver si sus sumas son precisamente iguales a las funciones (1) y para esto sería necesario estudiar el resto de la fórmula de Mac Laurin. Dicho estudio presenta dificultades casi insuperables; pero puede evitárselo recurrien-

(*) Poniendo $x = \sin \alpha$ se ve fácilmente que, en estos casos, vuelven a encontrarse las fórmulas que proporcionan $\cos(2p\alpha)$, $\sin[(2p-1)\alpha]$ en función de $\sin \alpha$.

do a un teorema dado en "Lecciones", Cap. XXXI, n° 8. Las funciones (1) tienen sentido también para x complejo ($x = z$) y, adoptando para $\arcsen z$ la determinación principal, son holomorfas en el campo obtenido del plano de la variable compleja $z = x + iy$ privándolo de los puntos de las dos semirrectas $y = 0$, $x \leq -1$, e $y = 0$, $x \geq 1$, en particular son holomorfas para $|z| < 1$. Entonces, por el teorema citado, las funciones sobre las que nos estamos ocupando son ciertamente desarrollables en serie de Mac Laurin para $|z| < 1$ y, en particular, sobre el eje real para $-1 < x < 1$. Pero los desarrollos valen también en los puntos $x = \pm 1$ como sigue del teorema de Abel (ver "Lecciones", Cap. XXVI, n° 14) y del hecho ya observado que las series (3) convergen en tales puntos. Se concluye entonces que para $-1 \leq x \leq 1$ valen los desarrollos en serie

$$\cos(m \arcsen x) = 1 - \frac{m^2}{2!} x^2 + \frac{m(m^2 - 2^2)}{4!} x^4 - \frac{m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{6!} x^6 + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(m \arcsen x) = \\ = m \left[x - \frac{m^2 - 1^2}{3!} x^3 + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{5!} x^5 - \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)}{7!} x^7 + \dots \right] \end{aligned}$$

24 - Demostrar que la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ no es desarrollable en serie de Mac Laurin.

El punto $x = 0$ es una singularidad evitable tanto para la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ como para sus derivadas de cualquier orden. Se ve fácilmente que resulta $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$, de donde la correspondiente serie de Mac Laurin tiene todos los términos nulos y converge, por ende, con suma igual a cero; pero tal serie no representa la función dada.

Esta situación queda explicada apenas se considera la misma función en el cam-

po complejo. En efecto; la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ es holomorfa en todo el plano salvo en el punto $z = 0$ y este punto singular no puede eliminarse en el campo complejo (por ejemplo, si z tiende a cero sobre el eje imaginario, la función tiende a $+\infty$).

25 - CALCULO DE LOGARITMOS.

De la serie logarítmica $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ (para $-1 < x \leq 1$) sigue, cambiando x en $-x$, $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$ (para $-1 \leq x < 1$) por lo que, restando miembro a miembro las dos igualdades precedentes se obtiene

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad (\text{para } -1 < x < 1).$$

Si en ésta se pone $x = \frac{1}{2k+1}$, donde k indica un entero positivo, se deduce la nueva fórmula

$$\log \frac{k+1}{k} = 2 \left[\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3 \cdot (2k+1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2k+1)^5} + \frac{1}{7 \cdot (2k+1)^7} + \dots \right], \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots)$$

que resulta sumamente útil para el cálculo numérico de los logaritmos de los números $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$ dada la rapidez con que converge la serie indicada en el segundo miembro. Calculados así los citados logaritmos, se pueden después inmediatamente deducir los correspondientes a los números naturales $2, 3, 4, \dots, n, \dots$ ya que, obviamente, se tiene

$$\log n = \log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \dots + \log \frac{n}{n-1}.$$

Por este camino se puede construir una tabla de logaritmos en base e ; de ésta se pasa después, del modo sabido, a la de logaritmos en base 10.

26 - CALCULO DE π

Si en la serie del arcotangente

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (\text{para } -1 \leq x \leq 1) \quad (1)$$

se pone $x = 1$ se obtiene $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$; pero esta serie, debido a su lenta convergencia, no se presta para el cálculo de π . Conviene a provechar la (1) de otro modo, utilizando el siguiente artificio.

Poniendo $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \alpha$ se tiene $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119}$, lo que nos dice que 4α es poco mayor que $\frac{\pi}{4}$, o sea que $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$ es un número positivo bastante pequeño. Puesto que resulta $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha} = \frac{1}{239}$, puede escribirse $\operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}$ de donde, aplicando la (1), se obtiene la denominada fórmula de Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \dots \right)$$

que se presta muy bien para el cálculo numérico de π , ya que ambas series convergen rápidamente.

27 - FORMULA DE STIRLING.

La fórmula de Stirling proporciona un modo de establecer la rapidez con que crece $n!$ cuando crece n . La misma puede escribirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1; \quad (1)$$

pero de la demostración resultará que es posible precisar las cosas por medio de la acotación

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} < n! < n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n-1}\right), \quad (2)$$

de la que la (1) se obtiene inmediatamente.

Para demostrar la (2) comencemos estableciendo la siguiente desigualdad:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \quad , \quad (3)$$

En efecto; la (3) equivale a la $1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$, o

sea, $\frac{2}{2n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{12n(n+1)}\right)$, y esta última es u-

na consecuencia de la $\log \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3 \cdot (2n+1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2n+1)^5} + \dots\right]$

establecida en el n° 25 ya que es $\frac{1}{3 \cdot (2n+1)^2} + \frac{1}{5 \cdot (2n+1)^4} + \dots <$

$$< \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right] = \frac{1}{12n(n+1)} .$$

Dicho esto observemos que, poniendo

$$\alpha_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \quad , \quad \beta_n = \alpha_n e^{-\frac{1}{12n}} \quad , \quad (4)$$

se deduce, con fácil cálculo

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} \quad , \quad \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

y entonces, por la (3) , resulta $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$, $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} > 1$. La $\{\alpha_n\}$

es, en consecuencia, una sucesión decreciente de números positivos, por lo que admite un límite $l \geq 0$. Por la segunda de las (4) también la sucesión

$\{\beta_n\}$ tiende al límite 1 ; pero la sucesión $\{\beta_n\}$ es creciente y

de términos positivos de lo que sigue ciertamente $l > 0$; se tiene así

$$\beta_n < 1 < \alpha_n \quad .. \quad (5)$$

Probemos ahora que $l = 1$, recurriendo a la fórmula de Wallis (ver "Ejer-

cicios", Cap. IX, ej. 36) que puede también escribirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

Si en el primer miembro se expresan los factoriales por medio de la fórmula $n! = \alpha_n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ que sigue de la primera de las (4), se obtiene tras realizar las simplificaciones $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} = 1$; por otra parte este límite vale $\frac{1^2}{1} = 1$ y entonces $1 = 1$.

Con esto la (5) resulta $\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{12n}} < 1 < \frac{n!}{n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$ y de ésta sigue

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} < n! < n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{1}{12n}}$$

y como consecuencia la (2) apenas se observe que $e^{\frac{1}{12n}} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{12n}\right)^2 +$

$$+ \dots < 1 + \frac{1}{12n} + \left(\frac{1}{12n}\right)^2 + \dots = 1 + \frac{1}{12n - 1}$$

28 - CALCULO DE INTEGRALES POR MEDIO DE SERIES (ver "Lecciones", Cap. XXVI, n° 7).

Calcular por serie la integral definida $\int_0^a x^\alpha e^x dx$, ($a > 0$) .

Debe ser $\alpha > -1$ pues, en caso contrario, la función $x^\alpha e^x$ no es sumable en $[0, a]$. Se tiene $x^\alpha e^x = x^\alpha (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots) = x^\alpha + \frac{x^{\alpha+1}}{1!} + \frac{x^{\alpha+2}}{2!} + \frac{x^{\alpha+3}}{3!} + \frac{x^{\alpha+4}}{4!} + \dots$ y esta serie, prescindiendo del primer término que puede ser infinito en el punto $x = 0$ (si $\alpha < 0$) es una serie de funciones continuas, totalmente convergente en $[0, a]$, con lo que es lícita la integración por serie, obteniéndose

$$\int_0^a x^\alpha e^x dx = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^{\alpha+2}}{(\alpha+2)1!} + \frac{a^{\alpha+3}}{(\alpha+3)2!} + \frac{a^{\alpha+4}}{(\alpha+4)3!} + \dots$$

29 - Calcular por serie la integral definida $\int_1^a \sqrt{\log x} dx$,
($a > 1$) .

Con la sustitución $x = e^{t^2}$ la integral se transforma en

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\sqrt{\log a}} t^2 e^{t^2} dt &= 2 \int_0^{\sqrt{\log a}} t^2 \left(1 + \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \dots \right) dt = \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\log a}} \left(t^2 + \frac{t^4}{1!} + \frac{t^6}{2!} + \frac{t^8}{3!} + \dots \right) dt \end{aligned}$$

y entonces, siendo la última de las series totalmente convergente en $[0, \sqrt{\log a}]$,

$$\int_1^a \sqrt{\log x} dx = 2(\log a)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{\log a}{1!} + \frac{1}{7} \frac{(\log a)^2}{2!} + \frac{1}{9} \frac{(\log a)^3}{3!} + \dots \right) .$$

30 - Calcular por serie la integral definida $\int_0^a e^{\alpha x} \log x dx$,
($\alpha \neq 0$, $a > 0$) .

Con una integración por partes la integral se transforma en

$$\begin{aligned} \left[\log x \cdot \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \right]_0^a - \int_0^a \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \frac{dx}{x} &= \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha a} - 1) \log a - \\ &- \int_0^a \left(1 + \frac{\alpha x}{2!} + \frac{\alpha^2 x^2}{3!} + \frac{\alpha^3 x^3}{4!} + \dots \right) dx \end{aligned}$$

de donde surge que la serie escrita es totalmente convergente en $[0, a]$; se deduce entonces

$$\int_0^a e^{\alpha x} \log x \, dx = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha a} - 1) \log a - (a + \frac{\alpha}{2!} \frac{a^2}{2} + \frac{\alpha^2}{3!} \frac{a^3}{3} + \frac{\alpha^3}{4!} \frac{a^4}{4} + \dots)$$

31 - Calcular por serie la integral definida $I = \int_1^a \log(\log x) dx$,
($a > 1$)

Con la sustitución $x = e^t$ se encuentra $I = \int_0^{\log a} e^t \log t \, dt$ y se aplica lo del ejercicio precedente.

32 - Calcular por serie la integral definida $I = \int_0^1 x^{ax} \, dx$.

Se tiene

$$I = \int_0^1 e^{ax \log x} \, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax \log x)^k}{k!} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \int_0^1 x^k (\log x)^k \, dx,$$

siendo lícita la integración por serie ya que la serie escrita en el 3^{er} miembro es totalmente convergente (obsérvese que en $[0, 1]$ la función $|x \log x|$ tiene por máximo el valor $\frac{1}{e}$). Con sucesivas integraciones por partes se

encuentra fácilmente $\int_0^1 x^k (\log x)^k \, dx = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ y entonces se concluye

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{(k+1)^{k+1}}.$$

33 - Calcular por serie la integral definida $I = \int_0^a \frac{\sin^3 x}{x^2} \, dx$.

Teniendo en cuenta el ej. 13 se encuentra fácilmente

$$I = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{3^{2k} - 1}{(2k+1)!} \frac{a^{2k}}{2k}.$$

34 - Calcular por serie la integral definida $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$.

Realizando la sustitución $x = \arcsen t$ se encuentra, primeramente, $I =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad . \text{ Como es ya sabido es } \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{2k} \quad (\text{para } -1 < t < 1) \text{ y entonces puede escribirse}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{2k-\frac{1}{2}} dt \quad .$$

La serie que aquí aparece es totalmente convergente para todo intervalo del tipo $[0, 1-\epsilon]$; además, tratándose de una serie de términos no negativos, cada suma parcial de la misma resulta mayorada, para $0 \leq x < 1$, por la suma $\frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 \right)$ de la propia serie, suma que es una función sumable de t en $[0, 1]$. Por eso es lícita la integración por serie (ver "Lecciones", Cap. XXVI, n° 4, teor. VI) y entonces se concluye que

$$I = 2 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{4k+1} \right]$$

35 - Calcular por serie la integral definida $I = \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$.

Conviene efectuar la sustitución $1-x=t$; se encuentra así

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots \right) dt =$$

$$= - \int_0^1 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} + \dots \right) dt = - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) ,$$

pudiéndose justificar la integración por serie con un tipo de razonamiento similar al usado en el ej. precedente.

36 - Calcular por serie la integral $I = \int_0^\pi (1 + 2a \cos x + a^2)^\alpha dx$, suponiendo $|a| \neq 1$.

Puesto que la función a integrar es función par de x puede escribirse

$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi (1 + 2a \cos x + a^2)^\alpha dx$; por otra parte se tiene $1 + 2a \cos x + a^2 = (1 + a e^{ix})(1 + a e^{-ix})$ y entonces, suponiendo inicialmente $|a| < 1$ se obtiene

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi (1 + a e^{ix})^\alpha (1 + a e^{-ix})^\alpha dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi (1 + a e^{ix})^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^k e^{-ikx} dx,$$

y siendo la serie escrita totalmente convergente

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^k \int_{-\pi}^\pi (1 + a e^{ix})^\alpha e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^k I_k, \quad (1)$$

habiendo puesto $I_k = \int_{-\pi}^\pi (1 + a e^{ix})^\alpha e^{-ikx} dx$. Procedamos análogamente sobre I_k escribiendo

$$I_k = \int_{-\pi}^\pi e^{-ikx} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\alpha}{h} a^h e^{ihx} dx = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\alpha}{h} a^h \int_{-\pi}^\pi e^{i(h-k)x} dx.$$

Esta última integral vale 0 si $h \neq k$ y vale 2π si $h = k$, por lo que se tiene $I_k = 2\pi \binom{\alpha}{k} a^k$. Sustituyendo en (1) se concluye que

$$I = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}^2 a^{2k}, \quad (\text{si } |a| < 1) \quad (2)$$

El caso $|a| > 1$ se traslada fácilmente al precedente, escribiendo

$$I = a^{2\alpha} \int_0^\pi \left(1 + 2 \frac{1}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}\right)^\alpha dx \quad \text{donde} \quad \left|\frac{1}{a}\right| < 1,$$

y observando que la integral aquí escrita puede expresarse con la (2) cuando se cambie a en $\frac{1}{a}$. Se concluye entonces

$$I = \pi a^{2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}^2 \frac{1}{a^{2k}}, \quad (\text{si } |a| > 1)$$

37 - DESARROLLOS EN SERIE DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS Y APLICACIONES.

En el Cap. XIX, ej. 42, habíamos introducido las integrales elípticas de 1ª, 2ª, 3ª especie

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi,$$

$$\Pi(\varphi, k, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

donde el módulo k^2 está comprendido entre 0 y 1. En el intervalo $[0, \varphi]$ se tiene $|k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi| \leq k^2 < 1$ y entonces, recordando la serie binomial, valen los desarrollos en serie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} &= (1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^n = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \varphi, \end{aligned}$$

$$\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = (1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} k^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \varphi ,$$

que resultan totalmente convergentes. Se deduce inmediatamente

$$F(\varphi, k) = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi ,$$

$$E(\varphi, k) = \varphi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi ,$$

$$\pi(\varphi, k, n) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1+n \operatorname{sen}^2 \varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{sen}^{2n} \varphi}{1+n \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi ,$$

donde las integrales que figuran en el segundo miembro se calculan todas con métodos elementales. Nos limitaremos, por simplicidad, a dar la expresión en el caso de las integrales elípticas completas de 1ª y 2ª especie, o sea en el caso de $F(\frac{\pi}{2}, k) = F(k)$, $E(\frac{\pi}{2}, k) = E(k)$. Haciendo uso de conocidas fórmulas se encuentra de inmediato

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right] , \quad (1)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \right)^2 (2n-1) k^{2n} \right] \quad (2)$$

En los cinco ejercicios sucesivos daremos ejemplos de problemas que llevan a considerar integrales elípticas, a calcularse con los desarrollos en serie ahora considerados.

38 - Calcular la longitud L de la elipse de semiejes a, b (con $a > b$).

Adoptando para la elipse las ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ y limitándonos a considerar un cuarto de la misma, se encuentra

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt$$

y transformando con la sustitución $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$:

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi .$$

Poniendo $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2$ (cuadrado de la excentricidad de la elipse) se ve que resulta $0 < k^2 < 1$ y entonces

$$L = 4a E(k) , \quad (\text{con } k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}) .$$

La longitud de la elipse se expresa entonces con la integral elíptica completa de 2ª especie y, según la (2) del ej. precedente, puede calcularse mediante la fórmula

$$L = 2 \pi a \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \right)^2 (2n-1) \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^n \right] .$$

39 - Calcular la longitud L del arco de senoide $y = \sin x$ que corresponde a un período

Se encuentra

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 4 \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx = 4 \sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

o sea

$$L = 2\pi \sqrt{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \right)^2 (2n-1) \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$$

40 - Calcular la longitud de la lemniscata $\varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Se encuentra

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + a^2 \cos 2\varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

y transformando la integral con la sustitución $\sqrt{\cos 2\varphi} = \cos t$:

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t} - \frac{\cos t \sin t dt}{\sqrt{1 - \cos^4 t}} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} = \frac{4a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}}$$

La longitud de la lemniscata se expresa entonces con la integral elíptica completa de 1ª especie, resultando

$$L = \frac{4a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi a \sqrt{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$$

41 - Considérese la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ y su vértice $A(a, 0)$, calcúlese la longitud del arco AP de la misma, donde P indica cualquier punto de la rama situada en el semiplano $x > 0$.

Asumiendo como parámetro a lo largo de la rama considerada la ordenada y , se encuentra inmediatamente que la longitud buscada s está expresada por

$$s = \int_0^{\eta} \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2 + a^2}} dy$$

donde η indica la ordenada del punto P . Con la sustitución $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} t$ la fórmula precedente se transforma en

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}}, \quad (\text{con } \tau = \arctg \frac{\eta \sqrt{2}}{a}, \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}).$$

Una vez que se haya observado que resulta idénticamente

$$\frac{1}{\cos^2 t \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}} = 2 \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}},$$

puede escribirse

$$s = a \sqrt{2} \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}}{\cos^2 t} dt - \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}}$$

e, integrando por partes la primera integral

$$\begin{aligned} s &= a \sqrt{2} \operatorname{tg} \tau \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau} + \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\tau} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}} dt - \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}} = \\ &= a \sqrt{2} \operatorname{tg} \tau \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau} - a \sqrt{2} \int_0^{\tau} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t} dt + \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 t}} \end{aligned}$$

vale decir

$$s = a \sqrt{2} \left\{ \operatorname{tg} \tau \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau} - E\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} F\left(\tau, -\frac{1}{2}\right) \right\},$$

habiéndose hecho intervenir las integrales elípticas (incompletas) de 1ª y 2ª especie.

42 - Calcular el área de la parte S del paraboloides de rotación $z = x^2 + y^2$ que se proyecta sobre el plano xy en el círculo C limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 - y = 0$.

Por la conocida fórmula es

$$\text{área } S = \iint_C \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

y entonces, transformando en coordenadas polares, y teniendo en cuenta que

$\varrho = \text{sen } \varphi$ es la ecuación polar de la citada circunferencia, se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{área } S &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\text{sen } \varphi} \varrho \sqrt{1 + 4\varrho^2} \, d\varrho = \int_0^\pi \left[\frac{1}{12} (1 + 4\varrho^2)^{3/2} \right]_0^{\text{sen } \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{12} \int_0^\pi \left[(1 + 4\text{sen}^2 \varphi)^{3/2} - 1 \right] d\varphi = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} (1 + 4\text{sen}^2 \varphi)^{3/2} d\varphi - \frac{\pi}{12} . \end{aligned}$$

Esta última integral es una integral elíptica; sin ocuparnos de reducirla a integrales de Legendre, la calcularemos con una integración por serie.

Puede escribirse

$$(1 + 4\text{sen}^2 \varphi)^{3/2} = (5 - 4\cos^2 \varphi)^{3/2} = 5^{3/2} \left(1 - \frac{4}{5} \cos^2 \varphi\right)^{3/2}$$

y, recordando la serie binomial, tendremos

$$(1 + 4\text{sen}^2 \varphi)^{3/2} = 5^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3/2}{k} \left(-\frac{4}{5} \cos^2 \varphi\right)^k ,$$

que resultará totalmente convergente en todo intervalo del eje φ .

La serie precedente puede integrarse término por término, obteniéndose así

$$\text{área } S = \frac{5^{3/2}}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{3/2}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} \varphi \, d\varphi - \frac{\pi}{12} ,$$

o también, recordando que $\int_0^{\pi/2} \cos^{2k} \varphi \, d\varphi = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \text{área } S &= \frac{5^{3/2}}{6} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{3/2}{k} \left(\frac{4}{5} \right)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \right\} - \frac{\pi}{12} = \\ &= \frac{\pi}{12} \left\{ 5\sqrt{5} - 1 + 5\sqrt{5} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{3/2}{k} \left(\frac{4}{5} \right)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right\} . \end{aligned}$$

Dejamos para el lector efectuar, con esta fórmula, una valoración numérica de área S ; encontrará, aproximadamente, 1,21 .

43 - LAS FUNCIONES SENO - INTEGRAL Y COSENO - INTEGRAL.

La función seno integral $\text{Si}(x)$ queda definida por la fórmula

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt \quad (1)$$

hallándose sin dificultad para la misma el siguiente desarrollo en serie, válido para toda x :

$$\text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (2)$$

En base a un resultado conocido $\left(\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \right)$ se tiene que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$. De esta función existen tablas numéricas; varias integrales

les pueden expresarse a través de la misma. He aquí algunos ejemplos:

$$1^o) \quad \int_0^x \log t \cdot \cos t \cdot dt = \left[\log t \cdot \text{sen } t \right]_0^x - \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt = \log x \cdot \text{sen } x - \text{Si}(x);$$

$$2^o) \quad \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[-\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt = -\frac{1 - \cos x}{x} + \text{Si}(x) ;$$

$$\begin{aligned}
3^0) \quad \int_0^{\pi/2} e^{-a \cos x} \cos (a \operatorname{sen} x) dx &= R \left[\int_0^{\pi/2} e^{-ae^{ix}} dx \right]^{(*)} = \\
&= R \left[\int_0^{\pi/2} (1 - a e^{ix} + \frac{a^2}{2!} e^{2ix} - \frac{a^3}{3!} e^{3ix} + \dots) dx \right] = \\
&= R \left[\frac{\pi}{2} - a(1+i) + \frac{a^2}{2!} \cdot \frac{2i}{2} - \frac{a^3}{3!} \cdot \frac{-1+i}{3} + \frac{a^4}{4!} \cdot 0 - \frac{a^5}{5!} \cdot \frac{1+i}{5} + \frac{a^6}{6!} \cdot \frac{2i}{6} - \frac{a^7}{7!} \cdot \frac{-1+i}{7} + \frac{a^8}{8!} \cdot 0 - \dots \right] \\
&= \frac{\pi}{2} - a + \frac{a^3}{3 \cdot 3!} - \frac{a^5}{5 \cdot 5!} + \frac{a^7}{7 \cdot 7!} - \dots = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(a)
\end{aligned}$$

La función coseno-integral $\operatorname{Ci}(x)$ queda definida para $x > 0$ por la fórmula

$$\operatorname{Ci}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad (3)$$

donde la integral del 2^0 miembro es una integral impropia cuya convergencia es una consecuencia de observar que es

$$\int_x^h \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \int_x^h \frac{\operatorname{sen} t}{t^2} dt$$

y que para $h \rightarrow +\infty$ el primer término del 2^0 miembro tiende a cero y el tercero tiende a un límite finito puesto que la función $\frac{\operatorname{sen} t}{t^2}$ es sumable en $[x, +\infty]$.

De la función (3) es posible dar un desarrollo en serie observando, ante todo, la identidad

$$\operatorname{Ci}(x) = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt =$$

(*) Recordemos que con el símbolo $R[z]$ se indica la parte real del número complejo z .

$$= \gamma + \log x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt ,$$

habiendo introducido la constante

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt .$$

Digamos, sin demostrarlo, que esta constante γ coincide con la constante de Euler definida en "Ejercicios", Cap. V, ej. 10 ($\gamma = 0,577215\dots$)

Tras esto es fácil obtener el siguiente desarrollo, válido para toda $x > 0$:

$$Ci(x) = \gamma + \log x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots . \quad (4)$$

También de esta función existen tablas numéricas y por medio de ella se pueden expresar varias integrales. Se tiene, por ejemplo,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt = \frac{\sin x}{x} - Ci(x) ;$$

$$\int_a^b \log t \cdot \sin t dt = -\log b \cdot \cos b + \log a \cdot \cos a - Ci(a) + Ci(b) .$$

44 - LA FUNCION LOGARITMO-INTEGRAL

Se la indica con $li(x)$ y está definida por la fórmula

$$li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} , \quad (\text{para } 0 < x < 1) , \quad (1)$$

que, transformando la integral con la sustitución $t = e^{-u}$, puede también escribirse

$$li(x) = - \int_{-\log x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du , \quad (2)$$

o también

$$\begin{aligned} \text{li}(x) &= \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u} du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_1^{-\log x} \frac{du}{u} - \int_0^{-\log x} \frac{1-e^{-u}}{u} du = \\ &= \gamma + \log(-\log x) - \int_0^{-\log x} \frac{1-e^{-u}}{u} du \end{aligned}$$

Se ha indicado con γ a la constante $\int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u} du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$,

que se puede demostrar es igual a la constante de Euler (cfr. ej. precedente).

Tras esto el lector deducirá sin dificultad que vale el desarrollo

$$\text{li}(x) = \gamma + \log(-\log x) + \log x + \frac{(\log x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\log x)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(\log x)^4}{4 \cdot 4!} + \dots \quad (3)$$

Mediante la función $\text{li}(x)$, de la que existen tablas numéricas, pueden expresarse varias integrales. Se tiene, por ejemplo:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -\text{li}(e^{-x}) \quad \left[\text{para } x > 0, \text{ como sigue de la (2)} \right]$$

$$\int_0^x \frac{dt}{(\log t)^2} = -\frac{x}{\log x} + \text{li}'(x) \quad \left[\text{intégrese por partes en la (1)} \right]$$

45 - LA FUNCION DE LOS ERRORES.

Queda definida para toda x a través de la fórmula

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

El factor $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ha sido introducido para que resulte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{erf}(x) = 1$.

Para esta función se encuentra inmediatamente el desarrollo en serie

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots \right)$$

También de la $\operatorname{erf}(x)$ existen tablas numéricas muy detalladas y, como en los otros casos, por medio de ella se expresan muchas integrales. Demuestre el lector, por ejemplo:

$$\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{x}) \quad , \quad (x > 0)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\right) \right] \quad , \quad (\text{póngase } t = u - \frac{1}{2}) \quad .$$

46 - SERIE DE POTENCIAS Y SERIE DE TAYLOR EN EL CAMPO COMPLEJO (ver "Lecciones", Cap. XXVI, n° 9).

Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k z^k \quad ;$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1) z^k \quad ;$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) z^k \quad ;$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot 2^k} \quad ,$$

y calcular, de cada una de ellas, su suma en el interior del círculo de convergencia. Examinar el comportamiento de cada una de las series sobre la circunferencia que limita el círculo de convergencia.

Sabemos que, dada una serie de potencias $\sum a_k z^k$, si existe el $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$, su recíproco proporciona el radio de convergencia r de tal serie. Usando tal propiedad se encontrará inmediatamente que las series (1), (2), (3) tienen radio de convergencia 1 y que la serie (4) tiene radio de convergencia 2.

Para calcular la suma $f_1(z)$ de la (1) basta recordar que, para $|z| < 1$

se tiene $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, para luego derivar obteniendo $\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$

y, en consecuencia,

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad (\text{para } |z| < 1) \quad (1)$$

Teniendo en cuenta este primer resultado surge inmediatamente para la serie (2) :

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k-1) z^k = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \\ &= \frac{2z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{3z-1}{(1-z)^2}, \quad (\text{para } |z| < 1) \end{aligned} \quad (2)$$

Con referencia a la (3) obsérvese que de (1), derivando, se obtiene $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{k-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$ y entonces

$$\begin{aligned} f_3(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \\ &= \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z}{(1-z)^3}, \quad (\text{para } |z| < 1) \end{aligned} \quad (3)$$

Para la (4) se logra, por último, utilizando resultados conocidos

$$f_4(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^k}{k} = -\log\left(1 - \frac{z}{2}\right), \quad (\text{para } |z| < 2) \quad (4)$$

Las series (1), (2), (3) no convergen en ningún punto de la circunferencia $|z| = 1$ puesto que, para $|z| = 1$, el término general no tiende a cero para $k \rightarrow \infty$.

Por conocidas propiedades de la serie logarítmica ("Lecciones", Cap. XXVI, 1.º 9) la (4) converge en todos los puntos de la circunferencia $|z| = 2$,

excluido el punto $z = 2$.

47 - Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

$$(1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} ; \quad (2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)k!} ;$$

$$(3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^2} .$$

Haciendo uso de la propiedad recordada en el ejercicio precedente, se ve de inmediato que para las tres series aquí consideradas se tiene $r = \infty$, de modo que cada una de ellas define una función holomorfa en todo el plano. Tales funciones no pueden expresarse con los símbolos elementales.

Se puede, sin embargo, observar que llamando $f_1(z)$ a la suma de la (1) se tiene $f_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$, de modo que la $f_1(z)$ se presenta como una extensión, al campo complejo, de la función seno-integral que hemos encontrado en el ej. 43, por lo que podemos indicarla con el símbolo $\operatorname{Si}(z)$.

Análogamente, la suma $f_2(z)$ de la (2) es tal que $f_2'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{k!} = e^{-z^2}$, por lo que la función $\frac{2}{\sqrt{\pi}} f_2(z)$ constituye una extensión al campo complejo de la función de los errores del ej. 45; podemos así escribir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} f_2(z) = \operatorname{erf}(z) .$$

Para expresar la suma $f(z)$ de la (3) necesitamos hacer intervenir las denominadas funciones de Bessel, de las que daremos algunas nociones en el Cap. XXIX. Mientras tanto el lector puede demostrar que, para todo $|z| < 1$, se tiene $z f''(z) + f'(z) - f(z) = 0$.

48 - Examínense nuevamente las distintas series de potencias de la x encontradas en los ej. 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23 y extiéndanse al campo complejo las fórmulas allí encontradas.

49 - Demostrar que las siguientes series de potencias

$$(1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k(\log k)^{\alpha}}, \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{1+\frac{1}{k}}}$$

tienen radio de convergencia 1. Estudiar su comportamiento sobre la circunferencia $|z| = 1$. En la (1) se supone α número real arbitrario.

La tesis $r = 1$ se demuestra fácilmente recurriendo a la propiedad citada en el ej. 46. Para el estudio de las series sobre la circunferencia $|z| = 1$, se puede proceder como se ha hecho en "Lecciones", Cap. XXVI, n° 9, en el caso de la serie logarítmica, es decir, observar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ tiene, para $|z| = 1$ y $z \neq 1$, las sumas parciales acotadas (siendo

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| = \left| \frac{1 - z^n}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|} \quad) \text{ y que los coeficientes } \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}}$$

$\frac{1}{k^{1+1/k}}$ son infinitésimos y definitivamente decrecientes (para $k \rightarrow \infty$) (*)

De este hecho se deduce que las series (1), (2) convergen en todos los pun

(*) El decrecimiento se demuestra, por ejemplo, notando que para las funciones $u = \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}$, $v =$

$$\frac{1}{x^{1+\frac{1}{x}}} \text{ se tiene } \frac{u'}{u} = -\frac{1}{x} - \frac{\alpha}{x \log x}, \quad \frac{v'}{v} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\log x}{x} \text{ y entonces } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{u'}{u} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{v'}{v} \right) = -1; \text{ las derivadas } u', v' \text{ son, entonces, definitivamente negativas.}$$

tos de la circunferencia $|z| = 1$ excluido, a lo sumo, el punto $z = 1$. Para decidir qué es lo que sucede en este punto conviene recordar los ejercicios 24, 25 y 26 del Cap. V.

50 - TEOREMA DE CAUCHY-HADAMARD.

Para el cálculo del radio de convergencia r de una serie de potencias se tiene el siguiente teorema de Cauchy-Hadamard:

Dada la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ y poniendo

$$\max_{k \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lambda,$$

el radio de convergencia r resulta posible obtenerlo de la fórmula $r = \frac{1}{\lambda}$. (*)

Dem.: Sea $0 \leq \lambda < +\infty$. Hagamos ver que el número $r = \frac{1}{\lambda}$ goza de la propiedad que, fijado $z \neq z_0$ de modo que sea $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$, la serie dada converge absolutamente. Se tiene $\lambda |z - z_0| < 1$ pudiendo entonces fijarse un número θ tal de lograrse $\lambda |z - z_0| < \theta < 1$ y escribiendo $\lambda < \frac{\theta}{|z - z_0|}$. Por una conocida propiedad del máximo límite se tiene que $\sqrt[k]{|a_k|}$ resulta definitivamente menor que $\frac{\theta}{|z - z_0|}$; existe, entonces, un índice ν tal que, para $k > \nu$ resulta $\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{\theta}{|z - z_0|}$ y, en consecuencia $\sqrt[k]{|a_k(z - z_0)^k|} < \theta < 1$. Por el criterio de la raíz nuestra serie es absolutamente convergente.

Sea ahora $0 < \lambda \leq +\infty$. Hagamos ver que el número $r = \frac{1}{\lambda}$ ($0 \leq r < +\infty$)

(*) Para el concepto de máximo límite véase "Ejercicios", Cap. IV, ej. 17. Puede ser $\lambda = 0$, $0 < \lambda < +\infty$, $\lambda = +\infty$; en el 1^{er} caso debe ponerse $r = +\infty$; en el 3^{er} caso, $r = 0$.

goza de la propiedad que, para $|z - z_0| > \frac{1}{\lambda}$ la serie dada no converge.

Siendo $\lambda > \frac{1}{|z - z_0|}$, por otra propiedad del máximo límite puede decirse que $\sqrt[k]{|a_k|}$ no es definitivamente menor que $\frac{1}{|z - z_0|}$. Existen, entonces, infinitos valores $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ del índice k para los que resulta $\sqrt[k_i]{|a_{k_i}|} \geq \frac{1}{|z - z_0|}$, o sea, $|a_{k_i} (z - z_0)^{k_i}| \geq 1$.

En consecuencia, el término general de nuestra serie no puede tender a cero (para $k \rightarrow \infty$) y de aquí que la serie no sea convergente.

51 - Determinar los radios de convergencia de las siguientes series de potencias.

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^k} ; \quad (2) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{(\log k)^k} ;$$

$$(3) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2} z^k ; \quad (4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k .$$

Conviene aplicar el teorema del ej. precedente; en los cuatro casos existe el $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, que es igual a cero en los primeros dos e igual a $\frac{1}{e}$ en los otros dos. Esto se verifica inmediatamente en (1), (2); para (3) es necesario recordar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{e}$; para (4) es necesario recurrir a la fórmula $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = \frac{1}{e}$ vista en "Ejercicios", Cap. IV, ej. 15 (o a la fórmula de Stirling). Se concluye que, para las (1), (2) es $r = \infty$ y que para (3), (4) se tiene $r = e$.

52 - TEOREMA DE ABEL SOBRE LA SERIE PRODUCTO DE DOS SERIES DADAS.

Referente al producto de dos series dadas, junto al teor. III de "Lecciones",

Cap. V, n° 3 y al teorema de Mertens ("Ejercicios", Cap. V, ej. 42), es útil señalar otro teorema, debido a Abel, que se enuncia así:

I - Dadas dos series convergentes $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = U$, $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = V$, si la serie producto según Cauchy $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ (donde $w_k = \sum_{i=0}^k u_i v_{k-i}$)

es convergente, la suma W de la misma es necesariamente igual al producto UV .

Dem. De la hipótesis sigue que las tres series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k$, convergentes para $z = 1$, son absolutamente

convergentes para $|z| < 1$. Por otra parte la tercera de ellas es, evidentemente, el producto según Cauchy de las primeras dos y entonces, por el primero de los dos teoremas antes recordados, se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k , \quad (\text{para } |z| < 1). \quad (1)$$

Pero, como consecuencia del teorema de Abel sobre las series de potencias ("Lecciones", Cap. XXVI, n° 10), se tiene:

$$U = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k , \quad V = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k , \quad W = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k , \quad (2)$$

donde debe entenderse que el pasaje al límite se ha realizado a lo largo del segmento que une el punto $z = 0$ al punto $z = 1$. De (1) y (2) sigue la tesis.

53 - USO DE LAS SERIES DE POTENCIAS PARA EL ESTUDIO DE LAS FORMAS INDETERMINADAS.

Los desarrollos en serie de potencias pueden algunas veces ser aplicados pa-

ra calcular límites que se presentan bajo la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ (*). Considérese, por ejemplo, el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ bajo la hipótesis que resulte

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \quad (1)$$

Supongamos que las funciones $f(x)$, $g(x)$ sean desarrollables en serie de Taylor en un entorno $(x_0 - h, x_0 + h)$ del punto x_0 ; en virtud de (1) faltarán en dicho desarrollo los términos de grado cero y se podrá escribir en tal entorno

$$f(x) = a_m (x-x_0)^m + a_{m+1} (x-x_0)^{m+1} + a_{m+2} (x-x_0)^{m+2} + \dots$$

$$(\text{con un cierto } m > 0 \text{ y } a_m \neq 0),$$

$$g(x) = b_n (x-x_0)^n + b_{n+1} (x-x_0)^{n+1} + b_{n+2} (x-x_0)^{n+2} + \dots$$

$$(\text{con un cierto } n > 0 \text{ y } b_n \neq 0),$$

y, por ende,

$$(2) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m (x-x_0)^{m-n} + a_{m+1} (x-x_0)^{m-n+1} + \dots}{b_n + b_{n+1} (x-x_0) + \dots}, \quad (\text{si } m > n),$$

$$(3) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m + a_{m+1} (x-x_0) + \dots}{b_n + b_{n+1} (x-x_0) + \dots}, \quad (\text{si } m = n),$$

$$(4) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m + a_{m+1} (x-x_0) + \dots}{b_n (x-x_0)^{n-m} + b_{n+1} (x-x_0)^{n-m+1} + \dots}, \quad (\text{si } m < n),$$

Las series de potencias que figuran en el numerador y en el denominador de (2), (3), (4) son uniformemente convergentes en un entorno del punto x_0 y entonces sobre ellas puede efectuarse, término por término, el pasaje al límite para $x \rightarrow x_0$. Se encuentra así

(*) Recordemos que siempre es posible llevar las otras formas indeterminadas al caso $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} = 0 & (\text{si } m > n) \\ = \frac{a_m}{b_m} & (\text{si } m = n) \\ = \infty & (\text{si } m < n) \end{cases}$$

El método se puede también aplicar cuando se trate del límite para $x \rightarrow \infty$; basta efectuar el cambio de variable $x = \frac{1}{\xi}$ y hacer tender ξ a cero; pero se puede también evitar la introducción de la variable ξ considerando desarrollos en serie de potencias de $\frac{1}{x}$.

Retomemos desde este punto de vista algunos de los ejemplos considerados en los ej. 3, 6, 9 de "Ejercicios", Cap. X:

$$1^0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots) = \frac{1}{6};$$

$$\begin{aligned} 2^0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x - x}{x - \operatorname{arctg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots) - x}{x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{40} x^2 + \dots}{\frac{1}{3} - \frac{1}{5} x^2 + \dots} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots)}{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} - \frac{3}{40} x^2 - \dots}{(1 - \frac{x^2}{3!} + \dots)^3} = -\frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$4^0) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \cos x}{x^2 (1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots)}{x^2 (1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12} - \frac{x^2}{360} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots} = \frac{1}{6} ;$$

$$5^o) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cotg^2 x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x \cos x) (\operatorname{sen} x + x \cos x)}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \dots) (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \dots)}{x^2 (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} + \dots) (2 - \frac{2}{3} x^2 + \dots)}{(1 - \frac{x^2}{6} + \dots)^2} = \frac{2}{3} ;$$

$$6^o) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2 + 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1) \sqrt{x^2 + 1} - x^2 - 1}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x}) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x}) (1 + \frac{1}{2x^2} + \dots) - 1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2x} + \dots}{1 + \frac{1}{x}} = 1 .$$

Con análogo procedimiento se demuestra fácilmente que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \log(1 + \frac{1}{x}) \right] = \frac{1}{2} , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sqrt{1+x} - 2 \cos x - x}{(\operatorname{arctg} x)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2}{(\arcsen x)^4} = -\frac{1}{12}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + \sen x - 6 \sen \frac{x}{2})^2}{(2 + 3 \cos x - 5 \cos \frac{x}{2})^3} = \frac{8}{3087}$$

54 - SERIE DE FOURIER (ver "Lecciones", Cap. XXVI, n° 11)

Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$, periódica de período 2π , que en el intervalo $[0, 2\pi]$ coincide con la función $\frac{1}{2}(\pi - x)$ (véase fig. 81).

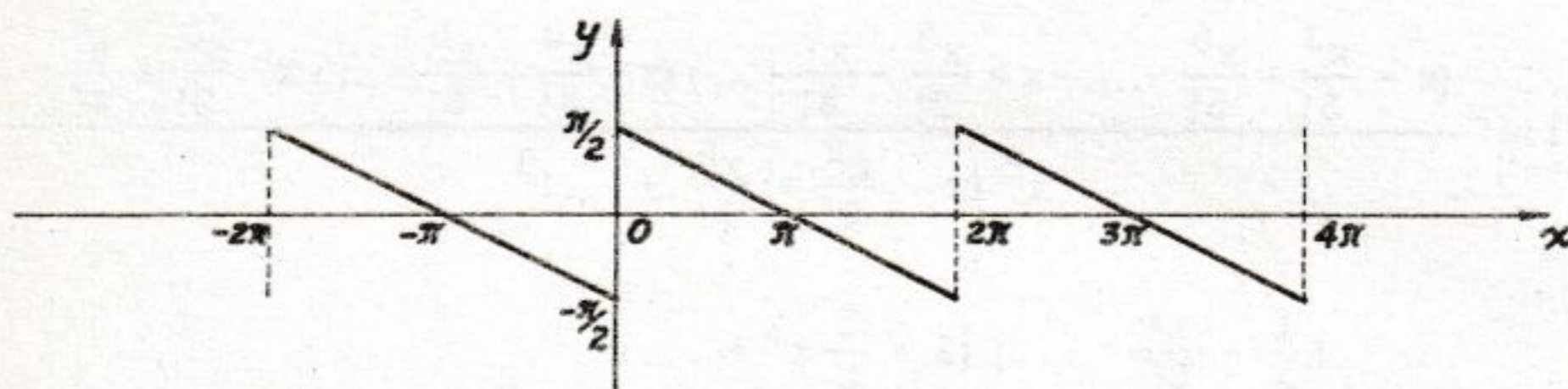


Fig. 81

Se trata de una función impar y entonces la serie de Fourier relativa es solamente una serie de senos. Se tiene

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \sen kx \, dx = \dots = \frac{1}{k}$$

y la serie buscada es, entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sen kx}{k}$$

Por un conocido teorema (*) esta serie converge y tiene por suma la $f(x)$ en todos los puntos $x \neq 2k\pi$; para $x = 2k\pi$ la suma vale cero. En particular, se tiene

(*) Aludimos al teor. II enunciado en "Lecciones" Cap. XXVI, n. 11 que aplicaremos sistemáticamente también en los sucesivos ej. 56, ..., 62 y demostraremos en el ej. 69.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} = \frac{1}{2} (\pi - x) \quad , \quad (\text{para } 0 < x < 2\pi) \quad .$$

55 - Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$, periódica de período 2π , que vale 1 en $[0, \pi)$ y -1 en $(\pi, 2\pi]$ (ver fig. 82).

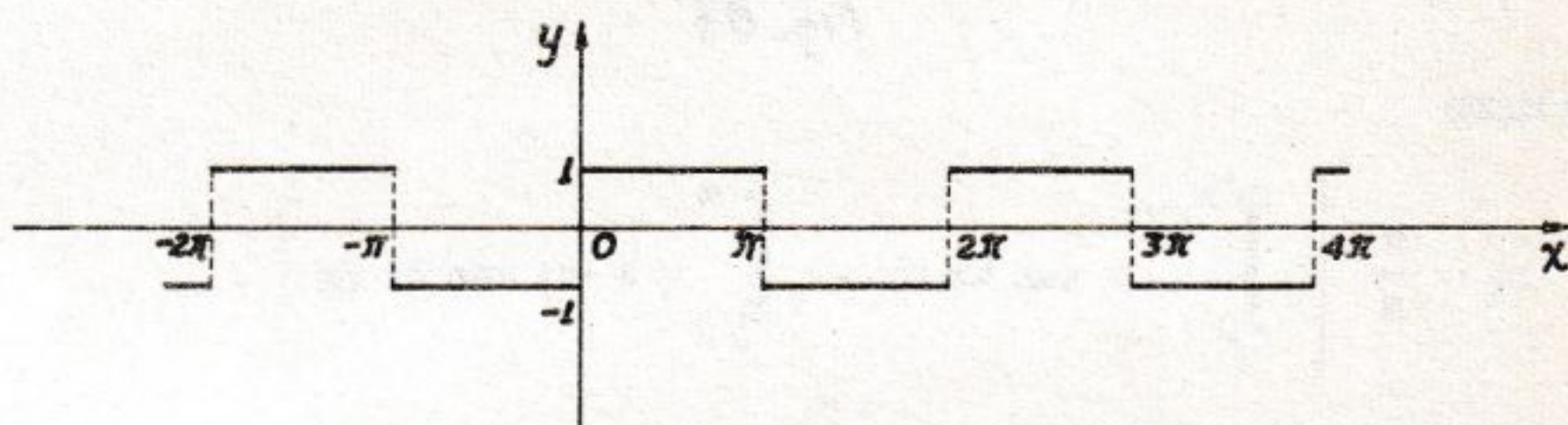


Fig. 82

La $f(x)$ es impar resultando así la serie de Fourier solamente de senos.

Siendo

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx \, dx = \dots = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{4}{\pi} \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \quad ,$$

la serie buscada es $\frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2h+1)x}{2h+1}$. Por el teorema recordado en el ej. precedente, puede escribirse

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} (2h+1)x}{2h+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (\text{para } 0 < x < \pi) \\ -\frac{\pi}{4} & (\text{para } \pi < x < 2\pi) \end{cases} \quad .$$

56 - Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$, periódica de período 2π , que es impar, igual a x en $[0, \frac{\pi}{2})$,

igual a $\pi - x$ en $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ (ver fig. 83) .

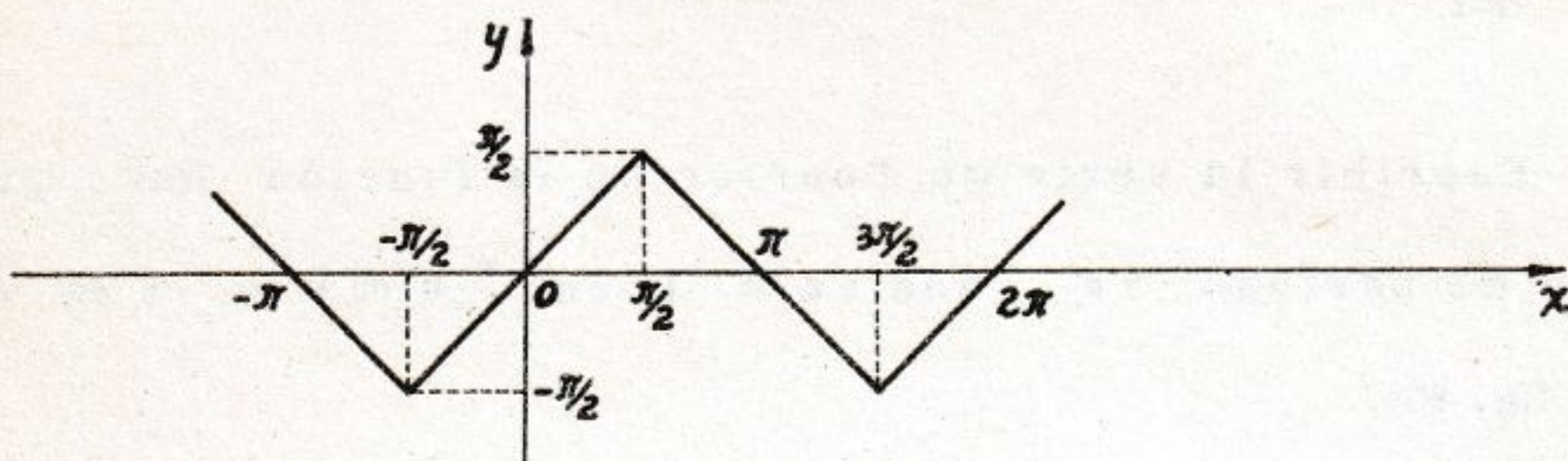


Fig. 83

Se tiene

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} kx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen} kx \, dx \right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & (\text{si } k \text{ es par}) \\ (-1)^h \frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2} & (\text{si } k \text{ es impar} = 2h + 1) \end{cases}$$

Se llega así a la fórmula

$$\frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\operatorname{sen} (2h+1)x}{(2h+1)^2} = \begin{cases} x & (\text{para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & (\text{para } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

Poniendo $x = \frac{\pi}{2}$ se obtiene, en particular

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} .$$

57 - Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$ periódica de período 2π , que en $[-\pi, \pi]$ coincide con la función x^2 (ver fig. 84) .

Se trata de una función par y entonces la serie de Fourier relativa está forma

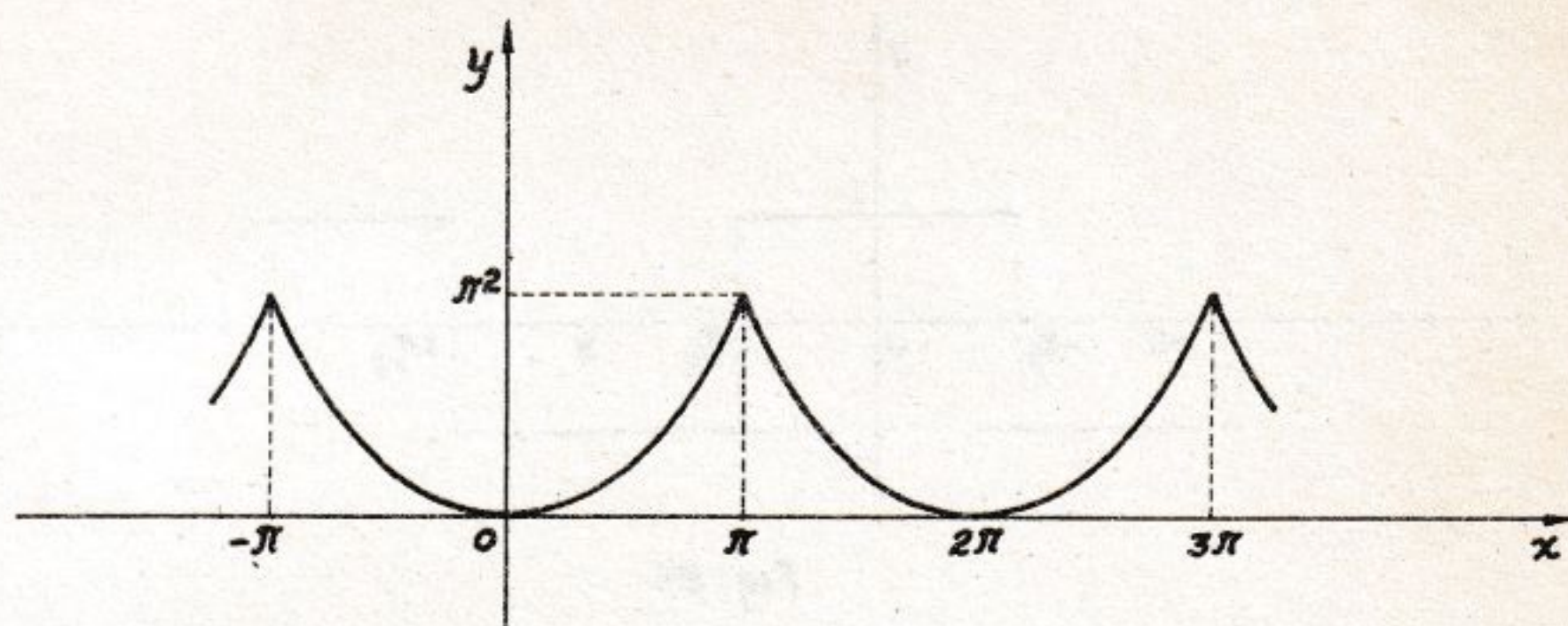


Fig. 84

da solamente por cosenos. Se tiene

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & \text{si } k = 0, \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & \text{si } k > 0, \end{cases}$$

y se llega así a la fórmula

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} = x^2, \quad (\text{para } -\pi \leq x \leq \pi).$$

Poniendo $x = 0$ y $x = \pi$ se encuentra, en particular,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}; \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

58 - Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$, periódica de período 2π , que es par, vale 1 en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, vale -1 en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (ver fig. 85)

La serie buscada estará formada sólo por cosenos, con los coeficientes

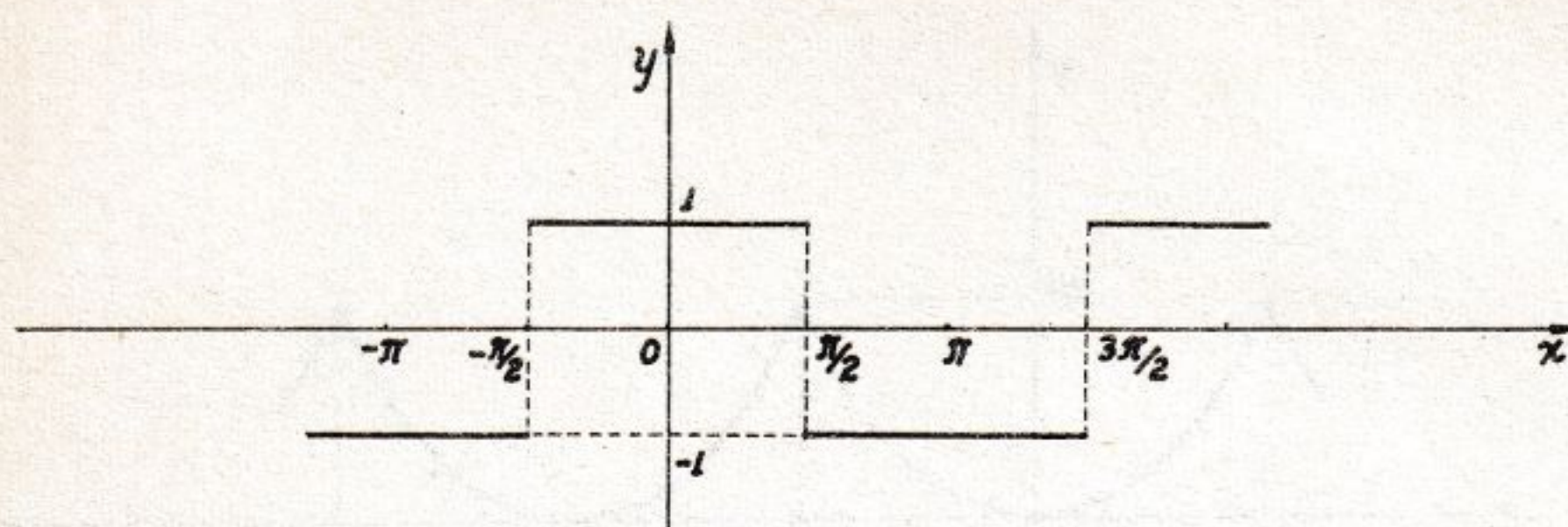


Fig. 85

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos kx \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos kx \, dx \right\} = \begin{cases} 0 & (\text{si } k \text{ es par}) \\ (-1)^h \frac{4}{\pi} \frac{1}{k} & (\text{si } k \text{ es impar} = 2h+1) \end{cases}$$

Se obtiene, entonces, la fórmula

$$\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\cos(2h+1)x}{2h+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (\text{para } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\pi}{4} & (\text{para } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi) \end{cases}$$

59 - Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$, periódica de período 2π , que en $[-\pi, \pi]$ coincide con la función $\cos \frac{x}{2}$ (ver fig. 86)

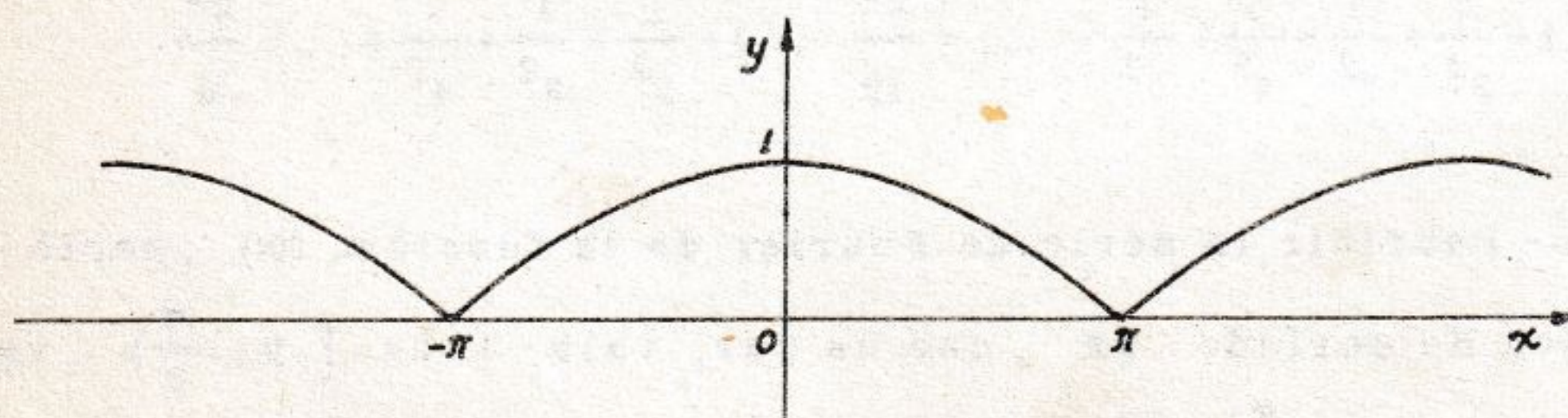


Fig. 86

Tratándose de una función par se tendrá una serie sólo de cosenos, con los coeficientes

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos kx \, dx = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$$

Se llega a la fórmula

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1} \cos kx = \cos \frac{x}{2} \quad , \quad (\text{para } -\pi \leq x \leq \pi) \quad ,$$

en la que, poniendo $x = 0$, se tiene

$$1 + 2\left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots \right) = \frac{\pi}{2}$$

60 - Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$, periódica de período 2π que es igual a x en $[0, \pi)$, igual a 0 en $(\pi, 2\pi]$ (ver fig. 87) .

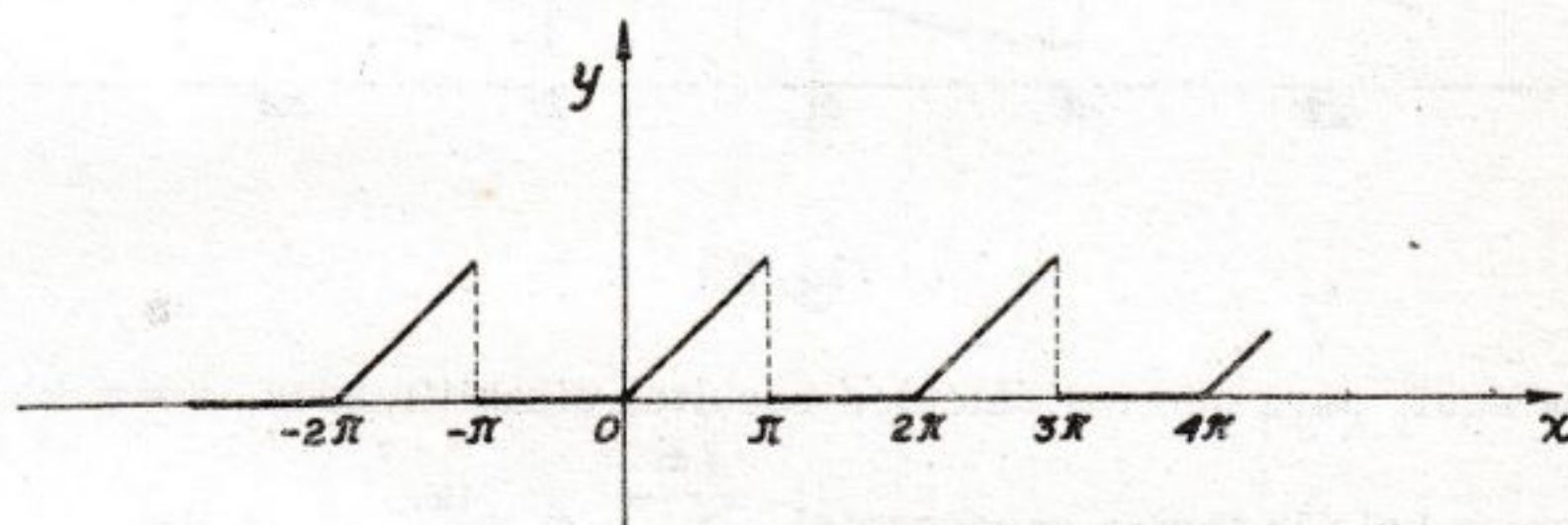


Fig. 87

La función aquí considerada no es ni par ni impar; entonces su serie de Fourier contiene senos y cosenos. Los coeficientes están dados por

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (\text{si } k = 0) \\ 0 & (\text{si } k \text{ es par } > 0) ; \\ -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} & (\text{si } k \text{ es impar}) \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sen kx \, dx = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

y se obtiene la serie

$$\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\sin x}{1} \right) - \frac{\sin 2x}{2} + \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\sin 3x}{3} \right) - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

cuya suma vale x para $0 \leq x < \pi$, vale 0 para $\pi < x \leq 2\pi$ (en el punto π la suma vale $\frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$)

61 - Escribir la serie de Fourier de la función $f(x)$, periódica de período 2π , que es igual a e^x en $[-\pi, \pi]$ (ver fig. 88).

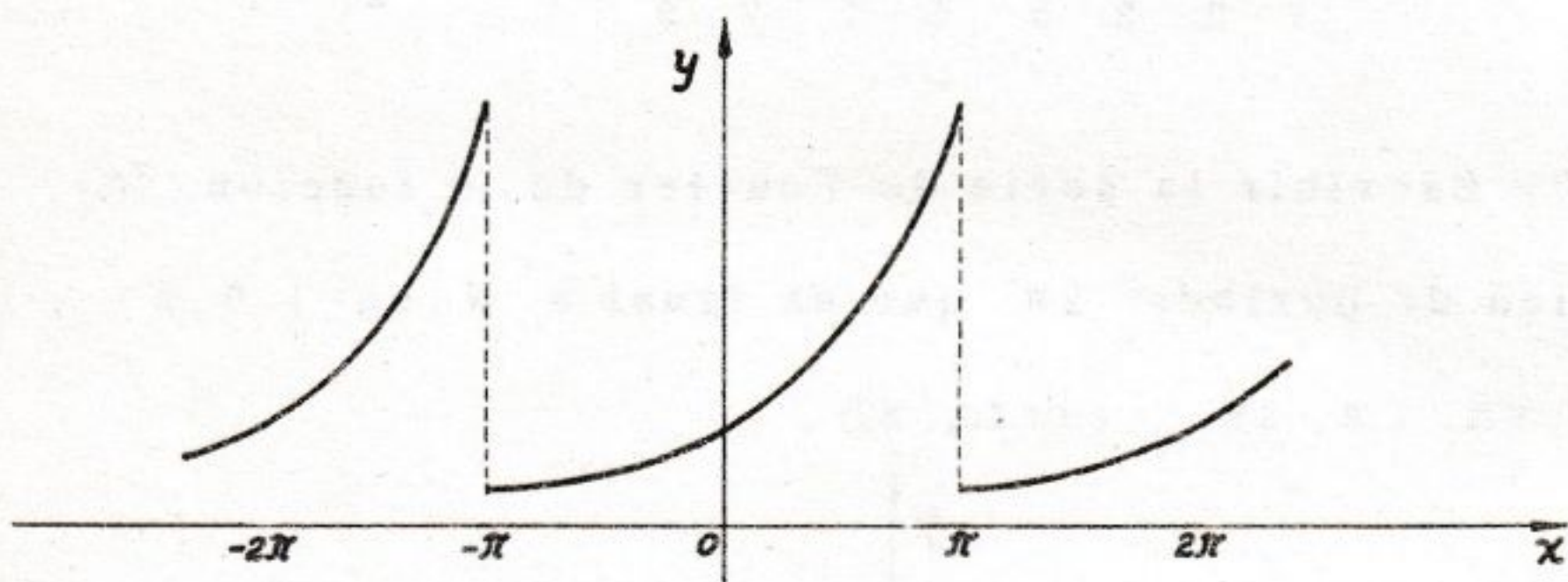


Fig. 88

Conviene aquí, para que los cálculos resulten simplificados, considerar la serie de Fourier bajo la forma exponencial $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$, con $c_k =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \text{ Se encuentra}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^k e^{\pi} - (-1)^k e^{-\pi}}{1-ik} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{\sinh \pi}{1-ik}$$

teniéndose entonces la serie

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{ikx}}{1-ik}$$

Pasando a la forma real se llega, con fácil cálculo, a

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \operatorname{sen} kx) \right\}$$

Esta serie tiene, para $-\pi < x < \pi$, suma igual a e^x ; en los puntos $\pi, -\pi$ su suma vale, en cambio, $\cosh \pi$

62 - TEOREMA DE RIEMANN

Se enuncia del siguiente modo:

I - Si $f(x)$ es generalmente continua y sumable en el intervalo acotado $[a, b]$, se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx = 0 \quad (1)$$

En particular, los coeficientes de Fourier a_k, b_k de una función $f(x)$, generalmente continua y sumable en $[0, 2\pi]$ son infinitésimos para $k \rightarrow \infty$.

Dem. Nos limitaremos a probar la primera de las (1) ya que la demostración de la otra es del todo análoga.

Comencemos suponiendo que la $f(x)$ sea continua en $[a, b]$. Existirá, entonces, $M > 0$ tal de ser $|f(x)| \leq M$ en $[a, b]$; además, en correspondencia a cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, para todo par de puntos x', x'' de $[a, b]$ tales que $|x' - x''| < \delta_\epsilon$, se obtendrá $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Una vez dicho esto, pongamos

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx \quad (2)$$

y, suponiendo, como es lícito $\lambda > 0$ puede también escribirse tras haber e -

fectuado la sustitución $x = t - \frac{\pi}{\lambda}$:

$$\varphi(\lambda) = - \int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^{b+\frac{\pi}{\lambda}} f(t - \frac{\pi}{\lambda}) \cos \lambda t \, dt \quad (3)$$

Reescribiendo x en lugar de t y haciendo la semisuma entre (2) y (3), se obtiene, suponiendo λ ya suficientemente grande como para verificarse que $a + \frac{\pi}{\lambda} < b$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ \int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(x) \cos \lambda x \, dx + \int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b \left[f(x) - f(x - \frac{\pi}{\lambda}) \right] \cos \lambda x \, dx - \right. \\ \left. - \int_b^{b+\frac{\pi}{\lambda}} f(x - \frac{\pi}{\lambda}) \cos \lambda x \, dx \right\} \end{aligned}$$

De aquí, bajo la hipótesis que λ sea también tal de lograrse $\frac{\pi}{\lambda} < \delta_\epsilon$, $\frac{\pi}{\lambda} < \frac{\epsilon}{2M}$, sigue

$$|\varphi(\lambda)| < \frac{1}{2} \left\{ M \cdot \frac{\pi}{\lambda} + \frac{\epsilon}{b-a} (b - a - \frac{\pi}{\lambda}) + M \cdot \frac{\pi}{\lambda} \right\} < \frac{1}{2} (\epsilon + 2M \cdot \frac{\epsilon}{2M}) = \epsilon$$

lo que prueba que, efectivamente, para $\lambda \rightarrow \infty$ se tiene $\varphi(\lambda) \rightarrow 0$.

Pasemos al caso en que $f(x)$ es generalmente continua y sumable en $[a, b]$ y llamemos N al conjunto (cerrado y de medida nula) de sus puntos singulares.

Dado $\epsilon > 0$, por la absoluta continuidad de la integral de la $f(x)$ (véase Cap. XXV, ej. 7) existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que, para todo dominio medible U contenido en $[a, b]$ y de longitud $< \delta_\epsilon$ resulta $\int_U |f(x)| \, dx < \frac{\epsilon}{2}$.

Por otra parte es posible subdividir $[a, b]$ en un número finito de intervalos parciales de modo tal que los intervalos que tienen puntos en común con N tengan, en total, longitud menor que $< \delta_\epsilon$. Llamemos U_ϵ al dominio for-

mado por tales intervalos e indiquemos con $[p_k, q_k]$, $(k = 1, 2, \dots, n_\epsilon)$ los intervalos restantes, en los que la $f(x)$ es continua. Se tiene así

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda)| &= \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx \right| = \left| \int_{U_\epsilon} f(x) \cos \lambda x \, dx + \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \int_{p_k}^{q_k} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \leq \\ &\leq \int_{U_\epsilon} |f(x)| \, dx + \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \left| \int_{p_k}^{q_k} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \left| \int_{p_k}^{q_k} f(x) \cos \lambda x \, dx \right|. \end{aligned}$$

Por la demostración precedente cada término de esta última suma es infinitésimo para $\lambda \rightarrow \infty$ y entonces, para λ suficientemente grande, su suma resulta $< \frac{\epsilon}{2}$. En tales condiciones, se tiene, entonces, $|\varphi(\lambda)| < \epsilon$, que es lo que queríamos demostrar.

El teorema de Riemann vale también en el caso que el intervalo $[a, b]$ sea no acotado. En efecto; suponiendo que, por ejemplo, se tratase del intervalo $[a, +\infty]$, dado $\epsilon > 0$ puede determinarse $b_\epsilon > a$ tal que $\int_{b_\epsilon}^{+\infty} |f(x)| \, dx < \frac{\epsilon}{2}$ y escribir

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| &\leq \left| \int_a^{b_\epsilon} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| + \int_{b_\epsilon}^{+\infty} |f(x)| \, dx < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \left| \int_a^{b_\epsilon} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \end{aligned}$$

Por la demostración precedente el último término tiende a cero para $\lambda \rightarrow \infty$ y entonces....

63 - DEMOSTRACION DE UN CRITERIO DE CONVERGENCIA PUNTUAL PARA LA SERIE DE FOURIER.

Queremos dar aquí la demostración del teor. II de "Lecciones", Cap. XXVI, n° 11, que tiene el siguiente enunciado:

I - Si la función $f(x)$, periódica de período 2π , es generalmente continua y sumable en $[0, 2\pi]$, puede afirmarse que:

1^o) en todo punto x_0 en el que la $f(x)$ sea continua y en el que existan tanto la derivada a la izquierda como la derivada a la derecha de la $f(x)$ [en particular: en el que la $f(x)$ sea derivable], la serie de Fourier de la $f(x)$ converge y tiene por suma $f(x_0)$;

2^o) en todo punto x_0 en que la $f(x)$ tenga una discontinuidad de 1^a especie y en el que existan tanto la derivada a la izquierda como la derivada a la derecha de la $f(x)$, la serie de Fourier de la $f(x)$ converge y tiene por suma $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

Dem. Comencemos deduciendo una expresión notable de la suma parcial, en un punto x_0 fijado:

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$$

de la serie de Fourier de la $f(x)$. Teniendo en cuenta las expresiones de los coeficientes a_k , b_k , puede escribirse

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \cdot \cos kx_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \cdot \sin kx_0 \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-x_0) \right] dx ;$$

pero se tiene

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-x_0) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)^{(*)}}{2 \sin \frac{1}{2}(x-x_0)}$$

y entonces

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)} dx ,$$

o también, teniendo en cuenta la periodicidad de la función que se integra,

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)} dx . \quad (1)$$

Esta es la expresión a la que necesitábamos llegar y que toma el nombre de integral de Dirichlet.

Veamos ahora la forma que toma la (1) cuando $f(x) \equiv 1$. En ese caso todos los coeficientes de Fourier de la $f(x)$ son nulos a excepción de $a_0 = 2$ por lo que resulta $S_n(x_0) = 1$; de la (1) se deduce, entonces,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)} dx \quad (2)$$

La integral que aquí figura en el segundo miembro puede dividirse en la suma de las dos integrales $\frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0} \dots$, $\frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+\pi} \dots$; pero, transformando la segunda con la sustitución $x = 2x_0 - t$ se ve inmediatamente que resulta igual a la primera, por lo que, de la (2), siguen las

(*) Esta relación sigue inmediatamente de la primera fórmula de "Ejercicios", Cap. XI, ej. 42.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)} dx \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)} dx$$

Tras obtener las (3) observemos que, de las dos afirmaciones de nuestro teorema basta, evidentemente, demostrar la segunda.

Multipliquemos las (3) por $f(x_0^-)$ y por $f(x_0^+)$, respectivamente, tras lo cual se las restamos a la (1); obtenemos así

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0} [f(x) - f(x_0^-)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)} dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+\pi} [f(x) - f(x_0^+)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)} dx$$

por lo que la tesis será justificada apenas logremos demostrar que para $n \rightarrow \infty$ los dos términos del segundo miembro tienden a cero. Expondremos la demostración para el segundo término pues la relativa al primero es del todo análoga.

Poniendo $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0^+)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_0)}$ el término en consideración se escribe

$$\Gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+\pi} \varphi(x) \sin(n + \frac{1}{2})(x-x_0) dx \quad (4)$$

La función $\varphi(x)$ es generalmente continua en el intervalo $[x_0, x_0 + \pi]$ puesto que lo es por hipótesis la $f(x) - f(x_0^+)$ mientras que el denominador $\sin \frac{1}{2}(x-x_0)$ se anula sólo para $x = x_0$. Pero puede observarse que el punto x_0 es, para $\varphi(x)$, una singularidad evitable (sobre el citado intervalo).

Recordemos, en efecto, que por hipótesis la $f(x)$ es, en el punto x_0 , derivable a la derecha, o sea que existe determinado y finito el $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} = 1$, de donde

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} 2 \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} \cdot \frac{\frac{1}{2}(x - x_0)}{\sin \frac{1}{2}(x - x_0)} = 2.1$$

Esto prueba también la existencia de un entorno a la derecha de x_0 , de amplitud δ , con $0 < \delta < \pi$ en el que se tiene $|\varphi(x)| < 2|1| + 1$, es decir, en el que la $\varphi(x)$ es generalmente continua y acotada. En el intervalo restante $[x_0 + \delta, x_0 + \pi]$ resulta, evidentemente, $|\varphi(x)| \leq \frac{|f(x)| + |f(x_0+)|}{\sin \frac{1}{2}\delta}$, por lo que la $\varphi(x)$ es también sumable en tal intervalo. En conclusión, la $\varphi(x)$ es sumable en $[x_0, x_0 + \pi]$ y entonces, retornando a la (4), utilizando el teorema de Riemann demostrado en el ejercicio precedente, queda demostrada nuestra tesis, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$.

64 - UN TEOREMA SOBRE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE UNA FUNCION.

Sea $f(x)$ una función continua en $[0, 2\pi]$ de la que se suponen conocidos los coeficientes de Fourier a_k, b_k ; queremos demostrar que la $f(x)$ resulta completamente individualizada por estos coeficientes, vale decir, que ella es la única función continua que tiene tales números a_k, b_k como coeficientes de Fourier. Evidentemente este teorema será demostrado si probamos que:

I - Si una función $f(x)$, continua en $[0, 2\pi]$, es tal de tenerse.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0 \quad , \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad ;$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad ,$$
(1)

resultará idénticamente nula en $[0, 2\pi]$.

Dem. Razonemos por el absurdo y supongamos que la $f(x)$ no sea idénticamente nula. Debido a la continuidad se podrá encontrar un intervalo $[a, b]$, contenido en $[0, 2\pi]$ en el que la $f(x)$ sea, por ejemplo, positiva.

Introducida la función $\varphi(x) = 1 + \cos(x - \frac{a+b}{2}) - \cos \frac{a-b}{2}$ es fácil convencerse de que, para $a < x < b$ resulta $\varphi(x) > 1$, mientras en todos los otros puntos de $[0, 2\pi]$ se tiene $|\varphi(x)| \leq 1$. Por lo tanto, llamando $[\alpha, \beta]$ a un intervalo interior al $[a, b]$, existirá un $\sigma > 0$ tal que, en $[\alpha, \beta]$, se tenga $\varphi(x) \geq 1 + \sigma$.

Dicho esto, consideremos la función $[\varphi(x)]^n$, con n entero positivo arbitrario. Se ve de inmediato que esta función es un polinomio trigonométrico de orden n y entonces, en virtud de la (1), se deduce que

$$\int_0^{2\pi} [\varphi(x)]^n f(x) \, dx = 0 \quad (\text{cualquiera sea } n) \quad .$$
(2)

Por otra parte se tiene

$$\int_0^{2\pi} [\varphi(x)]^n f(x) \, dx = \int_0^a [\varphi(x)]^n f(x) \, dx + \int_b^{2\pi} [\varphi(x)]^n f(x) \, dx +$$

$$+ \int_a^b [\varphi(x)]^n f(x) \, dx \quad .$$
(3)

Los dos primeros términos del segundo miembro se mantienen acotados cuando n varía, pues, llamando M al máximo de

$|f(x)|$ en $[0, 2\pi]$ y recordando las propiedades de $\varphi(x)$ se ve que el valor absoluto de cada uno de ellos no supera $2\pi M$.

En cambio, el último término del segundo miembro de (3) tiende a $+\infty$ para $n \rightarrow \infty$ pues, llamando $m > 0$ al mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$ se tiene

$$\int_a^b [\varphi(x)]^n f(x) dx > \int_a^\beta [\varphi(x)]^n f(x) dx \geq m(1+\sigma)^n (\beta - \alpha).$$

De las dos propiedades ahora observadas y de la (3) sigue, evidentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [\varphi(x)]^n f(x) dx = +\infty,$$

lo que está en contradicción con la (2), que es lo que queríamos demostrar.

Si no se exige la hipótesis de la continuidad de la $f(x)$, la precedente afirmación, tomada al pie de la letra, no mantiene su validez; sin embargo, puede mantenerla si se modifica levemente el concepto de funciones idénticamente iguales (o de función idénticamente nula). Tal modificación es de gran ayuda en el cuadro de la teoría de la integral de Lebesgue (ver Cap. XXV, ej. 49, 50); se tiene, en efecto:

II - Si una función $f(x)$, sumable en $[0, 2\pi]$, satisface la (1) resultará, para casi todo punto de $[0, 2\pi]$, igual a cero.

Dem. Poniendo

$$F(x) = c + \int_0^x f(t) dt, \quad (4)$$

la $F(x)$ es continua en $[0, 2\pi]$ y resulta $F(0) = c$, $F(2\pi) = c$, esta última en virtud de la primera de las (1), escrita para $k = 0$.

Se puede hacer de modo que resulte

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx = 0 \quad ; \quad (5)$$

basta para eso elegir $c = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \int_0^x f(t) dt$. Transformando las

(1) con una integración por partes se obtiene, para $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\left[F(x) \cos kx \right]_0^{2\pi} + k \int_0^{2\pi} F(x) \operatorname{sen} kx dx = 0 \quad ,$$

$$\left[F(x) \operatorname{sen} kx \right]_0^{2\pi} - k \int_0^{2\pi} F(x) \cos kx dx = 0 \quad ,$$

o sea

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} F(x) \operatorname{sen} kx dx = 0 \quad , \quad (k=1, 2, 3, \dots) .$$

Estas, junto con la (5), expresan que también la $F(x)$ (continua) verifica la (1); por el teorema I es, entonces, $F(x) \equiv 0$. Pero, por la (4), la $F'(x)$ ($\equiv 0$) es para casi todo punto igual a $f(x)$, de donde sigue la tesis.

65 - Demostrar que se tiene (cfr. Cap. XXV, ej. 40):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi \alpha} \quad , \quad (0 < \alpha < 1) \quad , \quad (1)$$

calculando los coeficientes de Fourier de la función $f(\alpha)$, periódica de período 2, que es par y en $[0, 1]$ coincide

con $\operatorname{sen} \pi \alpha \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$

La serie de Fourier de la $f(\alpha)$ está constituida solamente por cosenos; se tiene, entonces, $b_k = 0$ y

$$a_k = 2 \int_0^1 \sin \pi \alpha \cdot \varphi(\alpha) \cdot \cos k \pi \alpha \cdot d\alpha = \int_0^1 \varphi(\alpha) \sin(k+1) \pi \alpha d\alpha - \int_0^1 \varphi(\alpha) \sin(k-1) \pi \alpha d\alpha \quad (2)$$

donde se ha puesto

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t} dt, \quad (\text{sustitución } x = e^t)$$

Por otra parte, se obtiene, para n entero

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(\alpha) \sin n \pi \alpha d\alpha &= \int_0^1 \sin n \pi \alpha d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} \int_0^1 e^{\alpha t} \sin n \pi \alpha d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} \left[\frac{e^{\alpha t}}{t^2 + n^2 \pi^2} (t \sin n \pi \alpha - n \pi \cos n \pi \alpha) \right]_{\alpha=0}^{\alpha=1} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} \frac{n \pi}{t^2 + n^2 \pi^2} \left[1 - (-1)^n e^t \right] \end{aligned}$$

por lo que, si n es impar se tendrá

$$\int_0^1 \varphi(\alpha) \sin n \pi \alpha d\alpha = n \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2 \pi^2} = \pi, \quad (3)$$

mientras que, para n par resulta

$$\int_0^1 \varphi(\alpha) \sin n \pi \alpha d\alpha = n \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^t}{1+e^t} \frac{dt}{t^2 + n^2 \pi^2} = 0, \quad (4)$$

ya que, en la última integral, la función a integrar es impar.

Volviendo a la (2), y teniendo en cuenta (3) y (4) se ve que

$$a_0 = 2\pi; \quad a_k = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

Puede decirse que la función $f(\alpha) - \frac{a_0}{2} = f(\alpha) - \pi$ tiene todos los coeficientes de Fourier nulos; ahora, por lo dicho en el ejercicio precedente, se tie-

ne $f(\alpha) - \pi \equiv 0$, o sea, $f(\alpha) = \pi$. Y esta igualdad no es sino la (1).

66 - PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LAS FUNCIONES DE NORMA SUMABLE. NOCIONES SOBRE LA CONVERGENCIA EN MEDIA.

Sea $f(x)$ una función (real o compleja) cuya norma $|f(x)|^2$ sea sumable en $[0, 2\pi]$. Sabemos (ver Cap. XXV, ej. 42) que resulta sumable en $[0, 2\pi]$ pudiéndose entonces hablar de sus coeficientes de Fourier, que consideraremos bajo la forma

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

Queremos poner en evidencia otra propiedad notable de estos coeficientes. Fijado un entero positivo n , consideremos un polinomio trigonométrico arbitrario de orden n :

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ikx}, \quad (2)$$

y tratemos de determinar sus coeficientes γ_k (reales o complejos) de modo que, en $[0, 2\pi]$, el polinomio trigonométrico $p_n(x)$ proporcione la mejor aproximación posible de la función dada $f(x)$, en el sentido que resulte mínima la siguiente integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - p_n(x)|^2 dx \quad (3)$$

que es, evidentemente, una función real no negativa $\varphi(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_{-1}, \dots, \gamma_n, \gamma_{-n})$ de los coeficientes de $p_n(x)$. Este modo de considerar la aproximación (aproximación en media o global) se inspira en el mismo concepto sobre el que se apoya el método de los mínimos cuadrados (ver "Ejer-

cicios", Cap. XVI, ej. 45); la integral (3) [o mejor aún: su raíz cuadrada] puede denominarse el error cuadrático medio con que $p_n(x)$ aproxima a $f(x)$.

De las (2), (3) sigue

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_{-1}, \dots, \gamma_n, \gamma_{-n}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ikx} \right] \left[\bar{f}(x) - \sum_{k=-n}^n \bar{\gamma}_k e^{-ikx} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^n \bar{\gamma}_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx - \\ &- \sum_{k=-n}^n \gamma_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(x) e^{ikx} dx + \sum_{h=-n}^n \sum_{k=-n}^n \gamma_h \bar{\gamma}_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(h-k)x} dx \end{aligned}$$

o también, teniendo en cuenta (1) y observando que $\int_0^{2\pi} e^{i(h-k)x} dx = 0$,

(si $h \neq k$), $= 2\pi$ (si $h = k$):

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_{-1}, \dots, \gamma_n, \gamma_{-n}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^n \bar{\gamma}_k c_k - \\ &- \sum_{k=-n}^n \gamma_k \bar{c}_k + \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Si, en particular, se ponen los coeficientes γ_k iguales a los coeficientes de Fourier c_k , se obtiene

$$\varphi(c_0, c_1, c_{-1}, \dots, c_n, c_{-n}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \quad (5)$$

De (4) y (5) sigue, restando miembro a miembro:

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_{-1}, \dots, \gamma_n, \gamma_{-n}) - \varphi(c_0, c_1, c_{-1}, \dots, c_n, c_{-n}) =$$

$$= \sum_{k=-n}^n |\gamma_k - c_k|^2$$

lo que muestra que siempre es $\varphi(\gamma_0, \dots) \geq \varphi(c_0, \dots)$, valiendo el signo = sólo si $\gamma_0 = c_0$, $\gamma_1 = c_1$, $\gamma_{-1} = c_{-1}$, ..., $\gamma_n = c_n$, $\gamma_{-n} = c_{-n}$. Hemos así obtenido el siguiente resultado:

I - Entre todos los polinomios trigonométricos de orden n , el que realiza la mejor aproximación en media de la $f(x)$ es el polinomio trigonométrico que coincide con la suma parcial $S_n(x)$ de la serie de Fourier relativa a dicha $f(x)$.

Además, como la integral (3) es siempre ≥ 0 , también será así su valor mínimo, que está expresado en (5); escribiendo esto se obtiene la desigualdad

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \quad (6)$$

Esta vale cualquiera sea el entero n y como el segundo miembro no depende de n , la (6) expresa que la serie de términos no negativos $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$ tiene sus sumas parciales acotadas; tal serie es, entonces, convergente y vale la denominada desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \quad (7)$$

Si se introducen los coeficientes habituales a_k, b_k , dado que se tiene $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_{\pm k} = \frac{a_k \mp ib_k}{2}$, la (7) se transforma en la

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \quad (7')$$

Mediante consideraciones que requieren más elementos de los que dispone — mos y que, por tanto, aquí no intentamos desarrollar, se demuestra que sea en la (7) como en la (7') vale siempre el signo de igualdad, es decir, vale la así llamada relación de Parseval:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \quad (8)$$

o también

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (8')$$

De la (8) [o de la (8')] puede darse una interpretación notable. La (8) puede escribirse también

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \right] = 0;$$

pero, por la (5), la expresión entre paréntesis cuadrados no es sino la integral (3) cuando en ella se ponga $\gamma_k = c_k$, o sea, $p_n(x) = S_n(x)$ [suma parcial de la serie de Fourier de $f(x)$], por lo que la (8) equivale a la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = 0. \quad (9)$$

La (9) expresa que la suma parcial $S_n(x)$ de la serie de Fourier, aproxima en media la $f(x)$ con un error cuadrático medio que tiende a cero para $n \rightarrow \infty$; este hecho suele enunciarse brevemente diciendo que la serie de Fourier de la $f(x)$ converge en media hacia la propia $f(x)$. La convergencia en media, en general, no tiene nada que ver con la convergencia ordinaria, expresada por la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0 \quad , \quad (10)$$

ya que puede mostrarse con ejemplos que puede verificarse la (9) sin que en ningún punto x se verifique la (10). La relación de Parseval equivale, entonces, al siguiente teorema:

II - Para toda función $f(x)$, de norma sumable en $[0, 2\pi]$, la correspondiente serie de Fourier converge en media hacia la $f(x)$.

67 - INTEGRAL DE FOURIER.

La integral de Fourier proporciona, bajo oportunas hipótesis, una representación integral de una función $f(x)$ definida en $[-\infty, +\infty]$. Tal integral se escribe del siguiente modo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-ist} ds \quad , \quad (1)$$

donde el asterisco puesto delante de la primera integral indica que ésta debe interpretarse como una integral impropia con el valor principal de Cauchy (es decir como $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \dots$) o sea que, con mayor precisión, la (1) debería escribirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{itx} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-ist} ds \quad . \quad (1')$$

Esta expresión es, evidentemente, una función de x y veremos ahora que, bajo oportunas hipótesis, resulta igual a $f(x)$. Observemos, previamente, que la expresión (1) viene sugerida por la propia forma de la serie de Fourier de una función $f(x)$ de período T :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2k\pi x}{T}} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-i \frac{2k\pi s}{T}} ds \quad (2)$$

cuando se haga tender T al infinito; en efecto, poniendo $\frac{2k\pi}{T} = t_k$, y entonces, $\frac{2\pi}{T} = t_k - t_{k-1}$, la (2) puede escribirse

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{it_k x} (t_k - t_{k-1}) \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-ist_k} ds$$

y de aquí surge claramente cómo, a través de un pasaje formal al límite para $T \rightarrow \infty$, se obtiene la (1). Demostremos ahora un teorema análogo al del ej. 63:

I - Sea $f(x)$ sumable en $[-\infty, +\infty]$. En todo punto x en el que la $f(x)$ sea continua y admita derivada a la derecha y a la izquierda (en particular: en que la $f(x)$ sea derivable) la integral de Fourier (1) resulta igual a $f(x)$. En todo punto x en el que la $f(x)$ tenga una discontinuidad de 1ª especie y en el que existan tanto la derivada a la derecha como a la izquierda de la $f(x)$, la integral de Fourier (1) resulta igual a $\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$.

Dem. Fijado cualquier x y para todo $n > 0$, se ve inmediatamente que la función $f(s) e^{it(x-s)}$ de las variables s, t resulta sumable en la faja $(-\infty < s < +\infty, -n \leq t \leq n)$. Sigue que, considerada la integral iterada que figura en (1') se puede invertir en ella el orden de las integraciones y escribir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{itx} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-ist} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds \int_{-n}^n e^{i(x-s)t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds \left[\frac{e^{i(x-s)t}}{i(x-s)} \right]_{t=-n}^{t=n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{\operatorname{sen} n(x-s)}{x-s} ds.$$

En esta última integral dividimos el intervalo de integración en los tres intervalos $[-\infty, x-\pi]$, $[x-\pi, x+\pi]$, $[x+\pi, +\infty]$; se obtiene, de tal modo,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{itx} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-ist} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x-\pi} \frac{f(s)}{x-s} \operatorname{sen} n(x-s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \frac{\operatorname{sen} n(x-s)}{x-s} ds + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{x+\pi}^{+\infty} \frac{f(s)}{x-s} \operatorname{sen} n(x-s) ds. \end{aligned}$$

En la primera y en la tercera integral del segundo miembro se tiene $|x-s| \geq \pi$ y entonces $\left| \frac{f(s)}{x-s} \right| \leq \frac{|f(s)|}{\pi}$; la función $\frac{f(s)}{x-s}$ es entonces sumable en los correspondientes intervalos y entonces, aplicando el teorema de Riemann (ej. 62), se concluye que tales términos tienden a cero. Por lo tanto, para estudiar el límite (1') basta estudiar este otro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \frac{\operatorname{sen} n(x-s)}{x-s} ds.$$

Con tal motivo consideremos la función periódica de período 2π que en $[x-\pi, x+\pi]$ coincide con nuestra $f(x)$ y pensemos en su serie de Fourier. Por lo que se ha visto en el ej. 63 la suma parcial $S_n(x)$ de esta serie está expresada mediante la integral de Dirichlet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})(x-s)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-s)} ds$$

y entonces, por el teorema demostrado en tal ejercicio, el actual quedará probado si hacemos ver que la diferencia

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \frac{\sin n(x-s)}{x-s} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-s)}{\sin \frac{1}{2}(x-s)} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \left[\frac{1}{x-s} - \frac{\cos \frac{1}{2}(x-s)}{2 \sin \frac{1}{2}(x-s)} \right] \sin n(x-s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \cos n(x-s) ds \end{aligned}$$

tiene límite cero cuando $n \rightarrow \infty$. Pero esto sigue inmediatamente del citado teorema de Riemann, cuando se haya observado que la función $\frac{1}{x-s} - \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2}(x-s)$ es continua también en el punto $s = x$, de donde en las dos últimas integrales las funciones que multiplican $\sin n(x-s)$ y $\cos n(x-s)$ son sumables en $[x-\pi, x+\pi]$.

CAPITULO XXVII

Funciones Implícitas

1 - UNA OBSERVACION SOBRE EL TEOREMA DE DINI (ver "Lecciones", Cap. XXVII, n^{OS} 1, 2, 3).

Señalemos que el hecho de que el jacobiano sea distinto de cero en el punto solución \bar{P} considerado es condición suficiente, pero no necesaria, para que el sistema

[illegible]

sea resoluble de modo único en un entorno conveniente de \bar{P} . Si, por ejem-
plo, se considera la ecuación $f(x, y) \equiv y^3 - x = 0$, el jacobiano (que en este ca-
so se reduce a la $f_y \equiv 3y^2$) vale 0 en el punto solución $\bar{P}(0, 0)$; sin em-
bargo la ecuación en consideración es evidentemente resoluble, de modo único, a
trâvés de la $y = \sqrt[3]{x}$.

Análogamente la función definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) \equiv (x + y)^2 (x - y) + 4x = 0$ resulta uniforme en un entorno del origen (punto solución) aunque en tal punto la derivada parcial $f_y \equiv x^2 - 3y^2 - 2xy$ se anule.

En efecto; la ecuación $f(x, y) = 0$ es de 3^{er} grado en y , admitiendo, en-

tonces, para todo x , por lo menos una raíz real y . Demostremos que es única. Esto es evidente para $x = 0$; para $x \neq 0$ la $f(x, y)$ requiere que $x - y$ tenga signo opuesto a x , es decir, $x^2 < xy$. Y, en este caso ($x^2 < xy$), se tiene

$$f_y = 2(x^2 - xy) - (x^2 + 3y^2) < 0,$$

lo que nos dice que, para x fijo y $x^2 < xy$, la $f(x, y)$ es decreciente, con lo que no puede anularse en más de un punto.

2 - DERIVACION DE LAS FUNCIONES IMPLICITAS (ver "Lecciones", Cap. XXVII, nos 1, 2, 3).

Calcular las derivadas parciales de 1^{er} orden de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación

$$f(x, y, z) = x^3 + z^3 - 2xyz + 4 = 0.$$

Puesto que $f_x \equiv 3x^2 - 2yz$, $f_y \equiv -2xz$, $f_z \equiv 3z^2 - 2xy$, se encuentra por fórmulas conocidas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 2yz}{3z^2 - 2xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xz}{3z^2 - 2xy}.$$

3 - Análogo ejercicio para la ecuación

$$f(x, y, z) \equiv xy \operatorname{sen} z + z = 0; \quad (1)$$

$$f(x, y, z) \equiv e^{xyz} - xyz + 2 = 0. \quad (2)$$

Se encuentra, respectivamente,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y \operatorname{sen} z}{xy \cos z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{sen} z}{xy \cos z + 1}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}. \quad (2)$$

4 - Calcular las derivadas de las funciones $y(x)$, $z(x)$ defi

nidas por el sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z^2 - 5 = 0 \\ g(x, y, z) \equiv xy + 2yz - xz - 4 = 0 \end{cases}$$

Puesto que resulta $f_x \equiv 2x$, $f_y \equiv 2y$, $f_z \equiv -2z$ y $g_x \equiv y - z$, $g_y \equiv x + 2z$, $g_z \equiv 2y - x$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\begin{vmatrix} 2x & -2z \\ y-z & 2y-x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -2z \\ x+2z & 2y-x \end{vmatrix}} = \frac{x^2 + z^2 - 2xy - yz}{2y^2 + 2z^2 - xy + xz},$$

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ x+2z & y-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & -2z \\ x+2z & 2y-x \end{vmatrix}} = \frac{x^2 - y^2 + 2xz + yz}{2y^2 + 2z^2 - xy + xz}.$$

5 - Análogo ejercicio de cálculo de las derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ para las funciones definidas por el sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) \equiv e^x - e^{-y} + z - 4 = 0 \\ g(x, y, z) \equiv z e^{-x} + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Se encuentra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + z e^{-x}}{1 - e^{-x-y}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z + e^{2x+y}}{1 - e^{x+y}}.$$

6 - TANGENTES A CURVAS DEL PLANO Y DEL ESPACIO (ver "Lecciones", Cap. XXVII, n° 4).

Escribir la ecuación de la tangente a la curva plana de ecuación $y^3(4-y) - x^2 = 0$ en el punto $P(\sqrt{3}, 1)$.

Siendo $f_x \equiv -2x$, $f_y \equiv 4y^2(3-y)$ se tiene $f_x(\sqrt{3}, 1) = -2\sqrt{3}$, $f_y(\sqrt{3}, 1) = 8$, y entonces la ecuación buscada es $-2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 8(y - 1) = 0$, o se-

a, $\sqrt{3}x - 4y + 1 = 0$.

7 - Escribir las ecuaciones de las tangentes a las curvas planas siguientes, en los puntos indicados:

(1) $x(x^2 + y^2) - 2y^2 = 0$, en $P(1, 1)$;

(2) $y \operatorname{sen} x + x e^y - 2 = 0$, en $P(2, 0)$;

(3) $x e^y + y \operatorname{sen}(x-1) - 2x - 4y + 1 = 0$, en $P(1, 0)$;

(4) $e \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2} e^{xy} + e \frac{\pi}{4} = 0$ en $P(-1, -1)$;

(5) $\log \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{6} - \log 2 = 0$ en $P(\sqrt{3}, 1)$;

Se encuentra, respectivamente:

(1) $2x - y - 1 = 0$;

(2) $x + (2 + \operatorname{sen} 2) y - 2 = 0$;

(3) $x + 3y - 1 = 0$;

(4) $(\pi + 1)x + (\pi - 1)y + 2\pi = 0$;

(5) $y = (2 + \sqrt{3})x - 2(1 + \sqrt{3})$.

8 - Escribir la ecuación de la normal a la curva plana $x^4 - 4y(1 - x^2) = 0$ en el punto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4\sqrt{3}})$.

Aplicando conocidas fórmulas de la Geometría Analítica se encuentra

$$6x + \frac{7}{\sqrt{3}}y - \frac{43}{12} = 0$$

9 - Determinar los puntos de la curva plana definida por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ en los que la tangente resulta paralela al eje de las x .

Siendo $f_x \equiv 4x(x^2 + y^2 - 1)$, $f_y \equiv 4y(x^2 + y^2 + 1)$, por una conocida fórmula tendremos

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y} = - \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{y(x^2 + y^2 + 1)}$$

Las coordenadas del punto buscado, además de anular la $\frac{dy}{dx}$, deberán satisfacer la ecuación de la curva dada y entonces se obtendrán resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Se encuentran así cinco puntos reales de coordenadas $(x = 0, y = 0)$, $(x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \pm \frac{1}{2})$; pero el origen debe ser descartado ya que, como en él resultan $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, la fórmula que da la derivada $\frac{dy}{dx}$ pierde significado (*). Quedan entonces los otros cuatro puntos, que son los buscados.

10 - Escribir las ecuaciones de la tangente a la curva del espacio definida por el sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - 2xz - 1 = 0 \\ g(x, y, z) \equiv x^2 + z^2 + 2xy - 4 = 0 \end{cases}$$

en el punto $P(0, 1, 2)$.

Teniéndose

$$J_1 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 4(yz + x^2) ,$$

(*) El origen es un punto doble de la curva.

$$J_2 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)} = \begin{vmatrix} -2x & 2x-2z \\ 2z & 2x+2y \end{vmatrix} = 4(z^2 - xz - xy - x^2) ,$$

$$J_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x-2z & 2y \\ 2x+2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 - xz - xy - y^2) ,$$

en el punto P resulta $J_1 = 8$, $J_2 = 16$, $J_3 = -4$ y entonces las ecuaciones de la tangente son

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = 2-z .$$

11 - Escribir las ecuaciones de la tangente a la curva

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 2z + 4 = 0 \\ xy - 5(x - y) + z^3 = 0 \end{cases}$$

en el punto $(1, 1, -1)$.

Se encuentra

$$\frac{x-1}{15} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+1}{6} .$$

12 - PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE EN UN PUNTO.
(ver "Lecciones", Cap. XXVII, n° 4).

Escribir las ecuaciones del plano tangente a la superficie $2x^2 + 4y^2 - z^2 - 6xy + 4x = 0$ en el punto $P(1, 1, -2)$.

Siendo $f_x \equiv 2(2x - 3y + 2)$, $f_y \equiv 2(4y - 3x)$, $f_z \equiv -2z$, la ecuación buscada resulta ser $x + y + 2z + 2 = 0$.

13 - Análogo ejercicio para las siguientes superficies en los puntos indicados

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$, en $P(3, -1, 2)$;

- (2) $xyz - 6 = 0$, en $P(1, -2, -3)$;
 (3) $xy + yz + zx - 3 = 0$, en $P(1, 1, 1)$.

Se encuentra, respectivamente

- (1) $x - 3 = 0$;
 (2) $6x - 3y - 2z - 18 = 0$;
 (3) $x + y + z - 3 = 0$.

14 - Determinar los planos tangentes a la superficie de ecuación $f(x, y, z) = xy + yz + zx + 3 = 0$, paralelos al plano $x - y + 2z = 0$.

Indicando al punto de contacto con $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, dado que resultan $f_x \equiv y + z$, $f_y \equiv x + z$, $f_z \equiv x + y$ sigue que la ecuación del plano tangente en \bar{P} es

$$(\bar{y} + \bar{z})(x - \bar{x}) + (\bar{x} + \bar{z})(y - \bar{y}) + (\bar{x} + \bar{y})(z - \bar{z}) = 0 .$$

Este plano debe resultar paralelo al plano dado y entonces las coordenadas del punto P deben ser soluciones del sistema

$$\begin{cases} \bar{y} + \bar{z} = -\bar{x} - \bar{z} \\ 2\bar{y} + 2\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \\ \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{z} + 3 = 0 \end{cases} .$$

Se encuentran las soluciones: $(0, \pm 2\sqrt{\frac{3}{2}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2}})$ y entonces, los dos planos tangentes buscados tienen las respectivas ecuaciones

$$x - y + 2z - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 0 , \quad x - y + 2z + 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 0 .$$

15 - DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA FUNCIONAL.

Sean

- (1) $u_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $u_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_r)$, \dots , $u_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_r)$

n funciones continuas en un campo A de S_r , junto con sus derivadas parciales primeras.

Cuando el punto (x_1, x_2, \dots, x_r) varía en A , el punto (u_1, u_2, \dots, u_n) describe, en S_n , cierto conjunto U . Supongamos haber logrado definir, en un campo B de S_n que contenga U , una función continua $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)$, que admita derivadas primeras continuas, nunca simultáneamente nulas, tal que resulte

$$\varphi[f_1(x_1, x_2, \dots, x_r), f_2(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_r)] = 0, \quad (2)$$

idénticamente, es decir, para todos los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in A$. Si esto sucede diremos que las n funciones dadas son funcionalmente dependientes en A .

Las mismas funciones serán, en cambio, funcionalmente independientes en A cuando no exista ninguna función $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ que goce de las propiedades citadas; entonces, fijado arbitrariamente un campo B de S_n que contenga U , y cada vez que se defina en él una función $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ continua, que admita derivadas primeras continuas nunca simultáneamente nulas, existirá en A por lo menos un punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$ en el que la (2) no queda satisfecha.

Demostremos los teoremas siguientes:

I - Si las funciones (1) son, en A , funcionalmente dependientes, fijado arbitrariamente un punto $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$, de A , existirá en A un entorno R de \bar{P} tal que en R una (por lo menos) de las n funciones dadas puede expresarse en función de las restantes.

Dem.: Por hipótesis existe una función $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ para la que va-

len las propiedades antes citadas. Poniendo $f_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r) = \bar{u}_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$) e indicando con \bar{Q} al punto $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$ en este punto al menos una de las derivadas $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}$ es distinta de cero; sea, por ejemplo, $\varphi_{u_1}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) \neq 0$. Entonces, por el teorema de Dini, la expresión es unívocamente resoluble respecto de u_1 en un entorno S de \bar{Q} , es decir que dicha ecuación equivale, en S , a una del tipo $u_1 = \psi(u_2, \dots, u_n)$. Por la continuidad de las n funciones (1), existe un entorno R del punto $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$ tal que, al variar en él el punto (x_1, x_2, \dots, x_r) , el punto $[u_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, u_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_r)]$ pertenece siempre al entorno S de \bar{Q} . Por lo tanto, manteniendo (x_1, x_2, \dots, x_r) en R , la relación (2) puede sustituirse por la

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = \psi[f_2(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_r)],$$

lo que prueba la tesis.

II - Dadas en A las n funciones (1), si la característica de su matriz jacobiana resulta igual a n en todos los puntos de A (con lo que seguramente es $r \geq n$), tales funciones serán en A funcionalmente independientes.

Dem. Razonemos por el absurdo. Si las (1) fueran en A funcionalmente dependientes, existiría una función $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ que verifique las propiedades ya citadas anteriormente, entre las que destacaremos la identidad (2). De ésta seguiría, derivando respecto de una x_k de las variables x_1, x_2, \dots, x_r :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Se tendría así un sistema de r ecuaciones lineales homogéneas en las n incógnitas $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}$ tal que la matriz de sus coeficientes coincidiría con la matriz jacobiana de las (1). Puesto que en cada punto $P(x_1, x_2, \dots, x_r) \in A$ tal matriz tiene característica n (igual al número de las incógnitas), el sistema precedente no puede tener otra solución que la trivial ($\varphi_{u_1} = \varphi_{u_2} = \dots = \varphi_{u_n} = 0$). Entonces, en los puntos $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in B$ correspondientes [según las (1)] a los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in A$ la φ tendría todas las derivadas parciales nulas; pero esto contradice una de las hipótesis hechas sobre la función φ .

III - Dadas en A las n funciones (1), si en todos los puntos de A la característica de la matriz jacobiana de tales funciones resulta igual a un número p menor que $n^{(*)}$, tales funciones serán en A funcionalmente dependientes. Y precisamente, fijado arbitrariamente en A un punto $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$ existirá un entorno R de \bar{P} tal que en él, entre las funciones dadas, p serán funcionalmente independientes, mientras que las restantes $n-p$ pueden expresarse en funciones de aquéllas.

Dem. En el punto P la característica de la matriz jacobiana vale p ; de tal matriz puede entonces extraerse un menor de orden p que en \bar{P} resulta distinto de cero. Podemos perfectamente suponer que tal menor sea el formado con las primeras p filas y las primeras p columnas; es decir, podemos su-

(*) Esto se verifica siempre si $r < n$; de aquí que n funciones de r variables, con $r < n$, resultan siempre funcionalmente dependientes.

Consideremos ahora las restantes funciones $f_{p+1}(x_1, \dots, x_r)$, $f_{p+2}(x_1, x_2, \dots, x_r)$, ..., $f_n(x_1, x_2, \dots, x_r)$ y observemos que por las (5) resulta

$$\begin{aligned} f_{p+j}(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_r) = \\ = f_{p+j} \left[\psi_1(x_{p+1}, \dots, x_r; u_1, \dots, u_p), \psi_2(x_{p+1}, \dots, x_r; u_1, \dots, u_p), \dots, \right. \\ \left. \psi_p(x_{p+1}, \dots, x_r; u_1, \dots, u_p), x_{p+1}, \dots, x_r \right], \quad (j = 1, 2, \dots, n-p), \end{aligned} \quad (6)$$

fórmula que en forma concisa escribiremos así

$$f_{p+j}(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_r) = \phi_{p+j}(x_{p+1}, \dots, x_r; u_1, \dots, u_p), \quad (7)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n-p)$$

y que vale para todos los puntos $(x_1, \dots, x_r; u_1, \dots, u_p)$ del campo T antes definido.

Queremos demostrar que las $n-p$ funciones $\phi_{p+j}(x_{p+1}, \dots, x_r; u_1, \dots, u_p)$ no dependen para nada de las variables $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_r$. Basta-
rá hacer ver que en el campo T' ya mencionado resulta

$$\frac{\partial \phi_{p+j}}{\partial x_{p+1}} = \frac{\partial \phi_{p+j}}{\partial x_{p+2}} = \dots = \frac{\partial \phi_{p+j}}{\partial x_r} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n-p). \quad (8)$$

En efecto; teniendo en cuenta que la función ϕ_{p+j} coincide con la indicada en el segundo miembro de (6), puede escribirse

$$\frac{\partial \phi_{p+j}}{\partial x_{p+1}} = \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{p+1}} + \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_{p+1}} + \dots + \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_p} \frac{\partial \psi_p}{\partial x_{p+1}} + \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_{p+1}},$$

$$(j = 1, 2, \dots, n-p; l = 1, 2, \dots, r-p);$$

pero, por la regla de derivación de las funciones implícitas se tiene

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_{p+1}} = - \frac{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_{p+1}, x_2, \dots, x_p)}}{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)}}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_{p+1}} = - \frac{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_{p+1}, \dots, x_p)}}{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)}}, \dots,$$

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial x_{p+1}} = - \frac{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{p+1})}}{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)}}$$

y entonces resulta

$$\frac{\partial \phi_{p+j}}{\partial x_{p+1}} = \frac{1}{\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)}} \left\{ - \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_1} \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_{p+1}, x_2, \dots, x_p)} - \right.$$

$$- \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_2} \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_2, x_{p+1}, \dots, x_p)} - \dots - \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_p} \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{p+1})} +$$

$$\left. + \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_{p+1}} \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)} \right\}.$$

Es fácil así reconocer que la expresión entre llaves no es otra cosa que el desarrollo según los elementos de la última columna del determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{p+1}} & \frac{\partial f_{p+j}}{\partial x_{p+1}} \end{vmatrix}$$

que es un menor de orden $p + 1$ de la matriz jacobiana de las funciones (1) y entonces, por hipótesis, vale cero en todo A . Con esto quedan probadas las (8) y entonces las (7) pueden volver a escribirse del siguiente modo

$$f_{p+j}(x_1, \dots, x_r) = \phi_{p+j}(u_1, \dots, u_p), \quad (j = 1, 2, \dots, n-p) \quad (9)$$

Por las (4) estas fórmulas equivalen a las

$$f_{p+j}(x_1, \dots, x_r) = \phi_{p+j}[f_1(x_1, \dots, x_r), f_2(x_1, \dots, x_r), \dots, f_p(x_1, \dots, x_r)],$$

$$(j = 1, 2, \dots, n-p),$$

y demuestran precisamente que, en el entorno de \bar{P} definido por $|x_h - x_h| < \sigma$, ($h = 1, 2, \dots, r$) las $n-p$ funciones pueden expresarse como funciones de las f_1, f_2, \dots, f_p . Estas últimas son, entonces, funcionalmente independientes en el citado entorno debido a que allí el jacobiano es distinto de cero y por el teorema II.

El teorema III queda así demostrado.

Demos algún ejemplo simple en que se aplique el teorema. Consideremos tres funciones de tres variables definidas por

$$u = x + 2y - z, \quad v = x - 2y + z, \quad w = 3x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz. \quad (10)$$

La matriz jacobiana de las mismas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6x \\ 2 & -2 & 8y - 4z \\ -1 & 1 & -4y + 2z \end{pmatrix} \quad (11)$$

y se ve inmediatamente que la misma proporciona un determinante de 3^{er} or —

den nulo en todo el espacio xyz . Por otra parte el menor de 2º orden

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{es distinto de cero y de aquí que en todo el espacio,}$$

la característica de la matriz (11) vale 2. Sigue que las dos funciones u, v son funcionalmente independientes mientras que la tercera puede expresarse en función de las precedentes. Para encontrar tal expresión basta seguir el esquema de la demostración precedente, es decir, resolver el sistema $x + 2y - z - u = 0$, $x - 2y + z - v = 0$ respecto a x, y lo que brinda $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v+2z}{4}$ y sustituir estas expresiones de x e y en la tercera de las (10). Con esta sustitución, la variable z debe desaparecer y, en efecto, se encuentra

$$w = 3 \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 + 4 \left(\frac{u-v+2z}{4} \right)^2 + z^2 - (u-v+2z)z = u^2 + v^2 + uv.$$

Como segundo ejemplo puede observarse que las funciones $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ (para $\rho > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) son funcionalmente independientes puesto que su jacobiano vale $\rho > 0$. Análogamente así resultan las $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$ (para $\rho > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) ya que su jacobiano, igual a $\rho^2 \sin \theta$, no se anula jamás en el citado conjunto.

16 - Verificar que las funciones $u = 2x + y^2$, $v = y^4 + 4x^2 + 4xy^2 + 2$ son funcionalmente dependientes.

En efecto; se tiene $u_x = 2$, $v_x = 8x + 4y^2$, $u_y = 2y$, $v_y = 4y^3 + 8xy$ lo

que proporciona $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2 & 8x + 4y^2 \\ 2y & 4y^3 + 8xy \end{vmatrix} \equiv 0$, hecho que prueba la

tesis. Es fácil ver que resulta $v = u^2 + 2$, que es precisamente la relación funcional que vincula las dos funciones dadas.

17 - Verificar que las funciones $u = x + y$, $v = \sin x \cos y + \sin y \cos x - 5$ son funcionalmente dependientes y hallar la relación que las vincula.

Se tiene de inmediato $v = \sin u - 5$.

18 - Análogo ejercicio para las funciones

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = \frac{2 \cos x (\sin x + \cos 2x \cdot \cos y)}{\cos 2x}.$$

Se encuentra $w = \cos u + \cos v + \operatorname{tg}(u + v)$.

19 - Dadas las cuatro funciones

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (1)$$

$$x = x(\lambda, \mu), \quad y = y(\lambda, \mu), \quad (2)$$

que suponemos sean funcionalmente independientes en los campos A, B respectivamente, verificar que las funciones compuestas $u = u[x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu)]$, $v = v[x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu)]$ también resultan funcionalmente independientes en el campo B.

En efecto; como se tiene $u_\lambda = u_x \cdot x_\lambda + u_y \cdot y_\lambda$, $u_\mu = u_x \cdot x_\mu + u_y \cdot y_\mu$; $v_\lambda = v_x \cdot x_\lambda + v_y \cdot y_\lambda$, $v_\mu = v_x \cdot x_\mu + v_y \cdot y_\mu$, resultará

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\lambda, \mu)} = \begin{vmatrix} u_x \cdot x_\lambda + u_y \cdot y_\lambda & v_x \cdot x_\lambda + v_y \cdot y_\lambda \\ u_x \cdot x_\mu + u_y \cdot y_\mu & v_x \cdot x_\mu + v_y \cdot y_\mu \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_\lambda & y_\lambda \\ x_\mu & y_\mu \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)},$$

que, por las hipótesis hechas, es siempre distinto de cero en B .

20 - MAXIMOS Y MINIMOS VINCULADOS; METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (ver "Lecciones", Capítulo XXVII, n° 5).

Dada la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ y la recta AB que pasa por sus vértices $A(2, 0)$, $B(0, 1)$ determinar sobre la curva un punto P de modo que el área del triángulo APB sea máxima.

Indicadas con x, y las coordenadas de P , el área del triángulo APB viene dada por la función

$$f(x, y) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix},$$

con la condición $\varphi(x, y) \equiv x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. El máximo buscado existirá por el teor. de Weierstrass, ya que la elipse es un conjunto cerrado y acotado.

Considerada la expresión

$$f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = \pm \frac{1}{2} (2 - x - 2y) + \lambda (x^2 + 4y^2 - 4),$$

y anulando las derivadas parciales se tiene el sistema

$$\begin{cases} \mp \frac{1}{2} + 2\lambda x = 0 \\ \mp 1 + 8\lambda y = 0 \end{cases},$$

de donde, eliminando el parámetro λ sigue $x = 2y$. Sustituyendo en la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ se obtiene $y^2 = \frac{1}{2}$ y, de aquí, los puntos $P_1(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_2(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Al punto P_2 del primer cuadrante le corresponde el triángulo ABP_2 de altura mínima; al punto P_1 , que cae en el tercer cuadrante, el triángulo ABP_1 de altura máxima. Este último triángulo, de área $1 + \sqrt{2}$,

resuelve el problema.

21 - Dada la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ considérese un punto P sobre la rama de curva del 1^{er} cuadrante; determinar para qué posición de P es máxima el área del rectángulo, del que un vértice es P y los otros tres son el origen y las proyecciones de P sobre los ejes.

Si x, y son las coordenadas de P debe encontrarse el máximo de xy bajo la condición $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$.

Considerada la expresión

$$xy + \lambda (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}),$$

si planteamos el anularse de sus derivadas parciales

$$y + \frac{2}{3} \lambda x^{-\frac{1}{3}} = 0, \quad x + \frac{2}{3} \lambda y^{-\frac{1}{3}} = 0$$

obtendremos, tras eliminar λ , $y = x$. Del sistema formado por la ecuación $y = x$ y la de la astroide se llega a las coordenadas del punto P : $x = y = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, al que corresponde el rectángulo de área máxima $\frac{a^2}{8}$ buscado.

22 - Se verifica inmediatamente que la recta $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ es tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si se satisface la condición $\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} = 1$. Advertidos de esto, determínese el mínimo de los segmentos que, sobre las rectas tangentes, de terminan los ejes coordenados.

Para asegurar la existencia del mínimo no puede apelarse al teorema de Weierstrass ya que la curva $\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} = 1$ del plano p, q no es un conjunto acotado; sin embargo, con consideraciones geométricas que dejamos al lector

desarrollar, se hace evidente la existencia del mínimo buscado, que podremos determinar con el método de los multiplicadores de Lagrange.

Se debe encontrar el mínimo de la función $p^2 + q^2$, bajo la condición antedicha. Considérese entonces la combinación lineal

$$p^2 + q^2 + \lambda \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} - 1 \right)$$

y anúlense sus derivadas parciales primeras, respecto de p y q . Resulta $p - \frac{\lambda a^2}{p^3} = 0$, $q - \frac{\lambda b^2}{q^3} = 0$, de donde, eliminando λ , sigue $\frac{p^2}{a} = \frac{q^2}{b}$. Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la de condición, se encuentra $p^2 = a(a+b)$, $q^2 = b(a+b)$; el mínimo de los segmentos es, entonces, $l = a + b$.

23 - El lector puede volver a encontrar, con el método de los multiplicadores de Lagrange, todos los resultados establecidos directamente en el ej. 96 de "Ejercicios", Cap. X.

24 - FORMAS CUADRATICAS Y HERMITIANAS.

En "Lecciones", Cap. XVI, n° 9 se han dado nociones sobre las formas cuadráticas en r variables reales.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r a_{hk} x_h x_k, \quad (a_{kh} = a_{hk}), \quad (1)$$

con los coeficientes a_{hk} reales. Tales formas son un caso particular de las denominadas formas hermitianas en r variables reales o complejas z_1, z_2, \dots, z_r , dadas por una fórmula del tipo

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_r) = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r a_{hk} z_h \bar{z}_k, \quad (2)$$

donde, como de costumbre, \bar{z}_k indica el conjugado de z_k y los coeficientes a_{hk} son números reales o complejos tales de verificar las

$$a_{kh} = \bar{a}_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

Nótese que las (3) implican, en particular, que los coeficientes a_{hh} son reales.

Si en (2) los coeficientes y las variables se suponen reales, la forma hermitiana se reduce a una forma cuadrática del tipo (1), por lo tanto, estudiando las formas hermitianas, quedarán estudiadas al mismo tiempo las formas cuadráticas.

Se denomina discriminante de la forma hermitiana (2) al determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} ; \quad (4)$$

se trata de un determinante hermitiano [debido a las (3)] y, por ende, de valor real.

Obsérvese además que, cualesquiera sean los valores reales o complejos de las variables z_1, z_2, \dots, z_r , la forma hermitiana (2) asume siempre valores reales; en efecto, recordando las (3) se tiene:

$$\overline{\varphi(z_1, z_2, \dots, z_r)} = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r \bar{a}_{hk} \bar{z}_h z_k = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r a_{kh} z_k \bar{z}_h$$

y entonces

$$\overline{\varphi(z_1, z_2, \dots, z_r)} = \varphi(z_1, z_2, \dots, z_r)$$

dado que la última sumatoria escrita difiere de la (2) solamente por el cambio de los índices h, k .

Se puede entonces hablar de forma hermitiana definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa), indefinida, como para las formas cuadráticas.

Planteémonos ahora el siguiente problema: hallar el mínimo y el máximo absoluto de la forma hermitiana (2), cuando z_1, z_2, \dots, z_r varían de modo que sea

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_r|^2 = 1, \quad (5)$$

Observemos, antes que todo, que poniendo $z_h = x_h + i y_h$, ($h = 1, 2, \dots, r$) la forma hermitiana φ puede considerarse como una función real y continua de las $2r$ variables reales $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r$. Por otra parte, la (5) equivale a la

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + \dots + x_r^2 + y_r^2 = 1, \quad (6)$$

que, en el espacio S_{2r} de las mencionadas variables, representa una hipersuperficie esférica con centro en el origen y radio 1. Por lo tanto nuestro problema es el de encontrar el mínimo y el máximo absoluto de una función continua en un conjunto cerrado y acotado; por el teorema de Weierstrass se puede afirmar a priori que el problema tendrá solución. Para obtenerla podemos, tratándose de un problema de máximos y mínimos vinculados, usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Igualamos entonces a cero las derivadas parciales respecto de $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r$ de la función

$$\phi = \varphi(x_1, y_1, \dots, x_r, y_r) - \lambda(x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_r^2 + y_r^2 - 1),$$

habiendo indicado con $-\lambda$ al multiplicador de Lagrange. Se tiene, recordan-

do que $z_h = x_h + i y_h$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_h} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_h} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_h} - 2\lambda x_h, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y_h} = i \frac{\partial \varphi}{\partial z_h} - i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_h} - 2\lambda y_h,$$

o sea, por las (2) , (3) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_h} = \sum_{k=1}^r a_{hk} \bar{z}_k + \sum_{k=1}^r \bar{a}_{hk} z_k - \lambda (z_h + \bar{z}_h),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_h} = i \sum_{k=1}^r a_{hk} \bar{z}_k - i \sum_{k=1}^r \bar{a}_{hk} z_k + i \lambda (z_h - \bar{z}_h),$$

de donde obtenemos las ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^r a_{hk} \bar{z}_k + \sum_{k=1}^r \bar{a}_{hk} z_k - \lambda (z_h + \bar{z}_h) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^r a_{hk} \bar{z}_k - \sum_{k=1}^r \bar{a}_{hk} z_k + \lambda (z_h - \bar{z}_h) = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

que, combinadas mediante oportunas sumas y restas proporcionan las

$$\sum_{k=1}^r a_{hk} \bar{z}_k - \lambda \bar{z}_h = 0, \quad (7)$$

$$(h = 1, 2, \dots, r).$$

$$\sum_{k=1}^r \bar{a}_{hk} z_k - \lambda z_h = 0, \quad (8)$$

Consideremos las (7) ; constituyen un sistema de r ecuaciones lineales y homogéneas en las r incógnitas $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_r$ que no pueden ser todas nulas, ya que debe satisfacerse la (5) . Entonces debe ser nulo el determinante de los coeficientes, o sea

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Hemos así encontrado que λ debe ser raíz de esta ecuación algebraica de grado r . Sabemos (ver "Ejercicios", Cap. XII, ej. 8) que la misma equivale a la

$$A - A_{r-1}x + A_{r-2}x^2 - A_{r-3}x^3 + \dots + (-1)^{r-1}A_1x^{r-1} + (-1)^r x^r = 0, \quad (10)$$

donde A_k indica la suma de todos los menores principales de orden k de la matriz (4), y sabemos también ("Ejercicios", Cap. XIII, ej. 12) que todas sus raíces son reales.

Tenemos así que, siendo λ real, es inútil tener en cuenta las (8) cuyos primeros miembros son las conjugadas de los primeros miembros de las (7). Se tiene además que, para toda raíz λ de la (9), el sistema (7) \cup (8) admite autosoluciones que, haciendo uso de los factores arbitrarios (por lo menos uno) contenidos en cada una de ellas, se pueden siempre elegir de modo que la (5) quede satisfecha.

Entonces, para cada raíz λ de la (9) se encuentran sobre la hiperesfera (5) puntos $P(z_1, z_2, \dots, z_r)$ en los que quedan satisfechas las (7) \cup las (8) y entre todos los puntos P así obtenidos estarán ciertamente aquellos en los que se presenta el máximo y el mínimo buscados. Para resolver nuestro problema basta entonces calcular la ϕ en todos los puntos P recién mencionados y tomar el menor y el mayor entre los valores obtenidos. Ahora bien, tal cálculo se logra rápidamente pues, de la (7), multiplicando por z_h y sumando respecto del índice h se obtiene

$$\sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r a_{hk} z_h \bar{z}_k - \lambda \sum_{h=1}^r |z_h|^2 = 0 \quad ,$$

o sea, por las (2) , (5) :

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_r) = \lambda \quad ,$$

lo que muestra que en cada uno de los puntos P antes mencionados la φ assume un valor igual al λ correspondiente. Se concluye así:

I - El mínimo y el máximo valor asumidos por la forma hermitiana φ , bajo la condición (5) , son iguales a la menor y a la mayor, respectivamente, de las raíces (reales) de la ecuación algebraica (9) .

Establecido este resultado, podemos fácilmente dar la condición para que la forma hermitiana φ sea definida, semidefinida o indefinida. Observemos, con ese objeto, que a cada punto $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r) \neq (0, 0, \dots, 0)$ se le puede hacer corresponder un punto (z_1, z_2, \dots, z_r) que verifique la (5) y tal que $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r)$ y $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_r)$ tengan el mismo signo. En efecto: poniendo $\sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_r|^2} = \rho > 0$ basta poner $z_h = \frac{\zeta_h}{\rho}$, $(h = 1, 2, \dots, r)$, para tener

$$|z_1|^2 + \dots + |z_r|^2 = \frac{|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_r|^2}{\rho^2} = 1 \quad ;$$

$$\varphi(z_1, \dots, z_r) = \varphi\left(\frac{\zeta_1}{\rho}, \dots, \frac{\zeta_r}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2} \varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_r) \quad .$$

De esta simple observación sigue que, para estudiar los posibles signos de los valores asumidos por φ , basta estudiar los signos de la φ en los puntos (z_1, z_2, \dots, z_r) que verifican la (5) . De esto y del teor. I sigue inme-

diatamente:

II - Condición necesaria y suficiente para que la forma hermitiana φ sea definida positiva es que la menor de las raíces de la ecuación (9) sea positiva; para que sea semidefinida positiva es que la menor de tales raíces sea nula^(*); para que sea indefinida es que la menor entre las raíces de la (9) sea negativa y la mayor positiva.

Si se tiene en cuenta que la (9) equivale a la (10) y que el producto de las raíces de esta última vale A (ver "Lecciones", Cap. XVIII, n° 8) se deduce:

III - Condición necesaria para que la forma φ sea definida o semidefinida positiva es que su discriminante A resulte, respectivamente, positivo o nulo.

Queremos todavía agregar otro teorema, consecuencia de los teor. II y III:

IV - Condición necesaria y suficiente para que la forma hermitiana φ sea definida positiva es que su discriminante A y todos los menores principales del mismo sean positivos.

Dem. La condición es necesaria. Ya se ha visto que debe ser $A > 0$. Fijado después cualquier menor principal de orden s (con $1 \leq s < r$) éste puede considerarse como el discriminante de la forma hermitiana φ' , de s variables, deducida de la φ poniendo igual a cero todas las $r - s$

(*) Nos hemos limitado a las formas definidas o semidefinidas positivas porque es obvio que, para que φ sea definida o semidefinida negativa es necesario y suficiente que $-\varphi$ sea definida o semidefinida positiva.

variables que tienen índices distintos de los que intervienen en el menor considerado. También la φ' es obviamente definida positiva y entonces tal menor principal será positivo.

La condición es suficiente: Si todos los menores principales son positivos los coeficientes de la ecuación (10) presentan r variaciones de signo, y entonces todas las raíces (reales) de tal ecuación son positivas (ver "Ejercicios", Cap. XVIII, ej. 35); entonces, por el teor. II, la φ es definida positiva.

25 - DESIGUALDAD DE HADAMARD RELATIVA A LOS DETERMINANTES.

Consideremos un determinante cuyos elementos sean reales

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

y considerémoslo como una función de sus n^2 elementos a_{hk} . Busquemos el mínimo y el máximo valor asumidos por A cuando se imponga a los elementos a_{hk} estar ligados por n relaciones del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 = q_1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{2n}^2 = q_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 = q_n \end{array} \right. , \quad (2)$$

donde q_1, q_2, \dots, q_n son n constantes positivas asignadas.

Con una fácil aplicación del teorema de Weierstrass queda asegurada a priori la existencia del mínimo y del máximo buscados.

Obsérvese además que entre todos los posibles valores que puede asumir A , con los vínculos (2), existen ciertamente valores positivos [por ejemplo, si se asume $a_{11} = \sqrt{q_1}$, $a_{22} = \sqrt{q_2}$, ..., $a_{nn} = \sqrt{q_n}$ y $a_{hk} = 0$ para $h \neq k$, resulta $A = \sqrt{q_1 q_2 \dots q_n} > 0$] y también valores negativos [basta, en el ejemplo precedente, cambiar el signo de a_{11}]. Además, para cada valor asumido por A existe también el valor opuesto [basta cambiar de signo los elementos de una fila].

Se deduce que el máximo buscado tiene ciertamente un valor positivo μ y el mínimo el valor $-\mu$.

Para calcular μ , procedemos con el método de los multiplicadores de Lagrange, igualando a cero las derivadas parciales de

$$\phi = A + \lambda_1(a_{11}^2 + \dots + a_{1n}^2 - q_1) + \lambda_2(a_{21}^2 + \dots + a_{2n}^2 - q_2) + \dots + \lambda_n(a_{n1}^2 + \dots + a_{nn}^2 - q_n).$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial A}{\partial a_{hk}} = a'_{hk}$ (complemento algebraico de a_{hk}) se deduce que los elementos a_{hk} que proporcionan el máximo y el mínimo buscado deben verificar, además de las (2), las siguientes n^2 ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_{hk}} = a'_{hk} + 2 \lambda_h a_{hk} = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Observemos que, en correspondencia con tales elementos a_{hk} es ciertamente $\lambda_h \neq 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$) puesto que si un cierto λ_i fuese igual a cero, seguiría de las (3), $a'_{ik} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) y, por ende, $A = 0$; pero el cero no puede, por una observación precedente, ser el máximo o el mínimo valor de A .

De las (3) multiplicando por a_{ik} (donde i es cualquier índice fijado $\neq h$) y sumando respecto del índice k se obtiene

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a'_{hk} + 2 \lambda_h \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{hk} = 0 \quad (i \neq h),$$

y entonces, por el segundo teorema de Laplace sobre los determinantes

$$2 \lambda_h \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{hk} = 0 \quad (i \neq h)$$

de donde, siendo $\lambda_h \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{hk} = 0 \quad (i \neq h)$$

Entonces, cuando A es máximo o mínimo el producto de dos filas cuales — quiera (distintas) del mismo debe ser nulo; sigue, considerando el cuadrado de tal A y teniendo en cuenta las (2) que debe ser

$$A^2 = \begin{vmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{vmatrix} = q_1 q_2 \dots q_n$$

Se concluye que el máximo de A es $\sqrt{q_1 q_2 \dots q_n}$ y el mínimo $-\sqrt{q_1 q_2 \dots q_n}$; puede decirse, entonces, que para un determinante cuyos elementos verifiquen la (2) se tiene

$$|A| \leq \sqrt{q_1 q_2 \dots q_n} \quad (4)$$

He aquí una consecuencia notable de la (4). Sea A cualquier determinante del que se sepa que todos sus elementos están en valor absoluto, acotados por un número positivo M . Será así ciertamente $q_h \leq n M^2$ ($h = 1, 2, \dots, n$) y de la (4) se puede obtener la clásica desigualdad de Hadamard:

$$|A| \leq n^{\frac{n}{2}} M^n$$

26 - ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS PLANAS.
(ver "Lecciones", Cap. XXVII, n° 6)

Determinar la envolvente de la familia de curvas $f(x, y, t) \equiv y^2 - 2txy + 2(t^2 - 1)x = 0$

Si se deriva respecto del parámetro t y se anula la derivada, se obtiene $f_t \equiv 4tx - 2xy = 0$. Agregando esta ecuación a la dada, se tiene un sistema cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y = 2t \end{cases}$$

Se encuentra así el punto base $(0, 0)$, por el que pasan todas las curvas de la familia, y las ecuaciones paramétricas de una curva que, como es fácil verificar, es efectivamente una envolvente. Eliminando t puede escribirse de esta envolvente la ecuación cartesiana $xy^2 - 2y^2 + 4x = 0$.

27 - Análogo ejercicio para las familias de curvas definidas por las ecuaciones

$$(1) \quad f(x, y, t) \equiv (1+t^2)(x^2+y^2) - 2ty - 2x = 0,$$

$$(2) \quad f(x, y, t) \equiv x \sin t + y \cos^2 t - 1 = 0.$$

Se encuentra, respectivamente,

$$(1) \quad (x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0,$$

$$(2) \quad x = \frac{2 \sin t}{1 + \sin^2 t}, \quad y = \frac{1}{1 + \sin^2 t} \quad (\text{es decir, la elipse } x^2 + 4y^2 - 4y = 0).$$

28 - Encontrar la envolvente de la familia de rectas sobre las que los ejes coordenados determinan un segmento de longitud constante.

Si se indica con φ el ángulo que una recta genérica r de la familia forma con el eje x , las longitudes de los segmentos que r determina sobre los ejes x e y son, respectivamente, $a \cos \varphi$, $a \sin \varphi$ y entonces, la ecuación de la r será

$$\frac{x}{a \cos \varphi} + \frac{y}{a \sin \varphi} = 1$$

Esta, variando φ , representa una familia de rectas. Anulando la derivada respecto de φ se encuentra

$$\frac{x \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{y \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0$$

de donde $\frac{x}{\cos^3 \varphi} = \frac{y}{\sin^3 \varphi}$. Indicando con k el valor de ambas razones, se deduce $x = k \cos^3 \varphi$, $y = k \sin^3 \varphi$; sustituyendo en la ecuación de la r se obtiene $k = a$ y de aquí las ecuaciones paramétricas de la envolvente $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$. Se trata de una curva conocida: la astroide.

29 - Determinar la envolvente de las rectas que forman con los ejes coordenados un triángulo de área constante.

Llamando p y q a los segmentos que una recta genérica r de la familia determina sobre los ejes, se tiene como ecuación de r la $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, con la condición $pq = 2k^2$.

De la ecuación de la familia

$$\frac{x}{p} + \frac{py}{2k^2} = 1$$

anulando la derivada respecto de p se encuentra $p^2 = \frac{2k^2 x}{y}$ y entonces, eliminando p entre ésta y la ecuación dada, se encuentra $xy = \frac{k^2}{2}$. La envolvente es una hipérbola equilátera.

30 - Determinar la envolvente de las elipses que, siendo coaxiales, tienen la misma área πk^2 .

Es conocido que el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab ; en nuestro caso debe ser $\pi ab = \pi k^2$, de donde $b = \frac{k^2}{a}$, y entonces tenemos como ecuación de la familia de elipses a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{k^2} = 1,$$

con a como parámetro.

Anulando la derivada respecto de a se obtiene $\frac{a^4 y^2}{k^4} - x^2 = 0$, o sea $a = \pm k^2 \frac{x}{y}$; sustituyendo en la ecuación de la familia se deduce $2xy = \pm k^2$.

La envolvente buscada está constituida por dos hipérbolas equiláteras.

31 - Determinar la envolvente de cada una de las siguientes familias de curvas:

$$(1) \quad [x^2 + (y - t)^2] (x - 2) + x = 0$$

$$(2) \quad x^t e^{-x} - y = 0, \quad (t > 0, \quad x \geq 0)$$

Nótese que la genérica curva (1) tiene un punto singular en $(1, t)$; el lugar de los puntos singulares de las curvas de la familia es, entonces, la recta $x = 1$. Considerando ahora el sistema entre la ecuación dada y la obtenida igualando a cero la derivada respecto de t , puede eliminarse t y se encuentra

$x(x-1)^2 = 0$. Esta se separa en $x = 0$ y en $x = 1$ (contada dos veces) y , como $x = 1$ es el lugar de los puntos singulares queda, como envolvente, la recta $x = 0$.

Todas las curvas (2) pasan por el origen y por el punto $p(1, \frac{1}{e})$. Agregando la ecuación dada a la que se obtiene anulando la derivada con respecto a t , se encuentra el sistema

$$\begin{cases} x^t \log x \cdot e^x = 0 \\ y = x^t e^{-x} \end{cases}$$

De la primera se obtiene $x = 0$ o $x = 1$ y, en correspondencia, de la segunda se obtiene $y = 0$ o $y = \frac{1}{e}$. No tenemos, entonces, envolvente; la familia de curvas tiene dos puntos base: $(0, 0)$ y $(1, \frac{1}{e})$.

32 - Envolvente de una familia de curvas planas definidas mediante ecuaciones paramétricas.

Una familia de curvas planas puede definirse también a través de dos ecuaciones paramétricas del tipo

$$x = x(\lambda, t), \quad y = y(\lambda, t), \quad (1)$$

las que representan, para cada t fijo, una curva de la familia cuyos puntos quedan referidos al parámetro λ .

Suponiendo que tales curvas C_t admitan una envolvente Γ , llamemos P_t al punto donde C_t toca a Γ ; tal punto tiene coordenadas del tipo (1) cuando se dé a λ un valor oportuno, que dependerá del t considerado; entonces será $\lambda = \lambda(t)$ y P_t tendrá las coordenadas

$$x = x[\lambda(t), t], \quad y = y[\lambda(t), t]. \quad (2)$$

Se trata ahora de determinar esta función $\lambda(t)$ y, hecho esto, las (2) darán las ecuaciones paramétricas de la envolvente Γ .

En P_t la tangente a la curva C_t tiene los cosenos directores proporcionales a

$$x_\lambda [\lambda(t), t], \quad y_\lambda [\lambda(t), t]$$

y debe coincidir con la tangente en P_t a Γ , la que tiene los cosenos directores proporcionales a las expresiones

$$x_\lambda [\lambda(t), t] \cdot \lambda'(t) + x_t [\lambda(t), t], \quad y_\lambda [\lambda(t), t] \cdot \lambda'(t) + y_t [\lambda(t), t].$$

Entonces, en P_t debe resultar

$$\frac{x_\lambda \cdot \lambda' + x_t}{x_\lambda} = \frac{y_\lambda \cdot \lambda' + y_t}{y_\lambda};$$

simplificando esta expresión se ve que la función buscada $\lambda = \lambda(t)$, queda determinada por la ecuación

$$\begin{vmatrix} x_\lambda & y_\lambda \\ x_t & y_t \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

que se obtiene igualando a cero el jacobiano de las (1).

De la (3) se obtiene así λ en función de t y, sustituyendo en las (2), obtendremos las ecuaciones paramétricas de la envolvente buscada Γ .

CAPITULO XXVIII

Aplicaciones geométricas

1 - ASINTOTAS DE CURVAS PLANAS.

En "Lecciones" Cap. X, n° 4 hemos estudiado la determinación de las asíntotas de una curva plana dada mediante una ecuación del tipo $y = f(x)$. Lo ahí dicho se extiende inmediatamente al caso de una curva plana γ dada por medio de ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ bajo la hipótesis que tal curva γ no sea acotada, vale decir que en el intervalo base A del eje t , existan valores ζ (finitos o infinitos) tales que para $t \rightarrow \zeta$ al menos una de las funciones $x(t)$, $y(t)$ resulte infinita. Con una fácil extensión del razonamiento hecho en el citado n° de "Lecciones", el lector puede demostrar que, en correspondencia con un valor ζ de t en el que, por ejemplo, resulte infinita la $x(t)$, la curva γ tendrá asíntota si y sólo si existen finitos los dos límites siguientes:

$$\lim_{t \rightarrow \zeta} \frac{y'(t)}{x'(t)} = m, \quad \lim_{t \rightarrow \zeta} [y(t) - mx(t)] = n,$$

resultando entonces la ecuación $y = mx + n$ para la asíntota.

Por ejemplo, considerada la curva

$$x = t + \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1}, \quad y = t + \frac{1}{t},$$

es necesario analizar los valores $t = 0$ (en el que resultan infinitas x e y)
 $t = -1$ (en el que resulta infinita la x), $t = \infty$ (en el que resultan infinitas
 x e y). Se tiene

$$x' = 1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad y' = 1 - \frac{1}{t^2}$$

y, por ende,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'}{x'} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y'}{x'} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y'}{x'} = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (y - \frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow -1} (y - 0 \cdot x) = -2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y - x) = 0,$$

con lo que la curva tiene las tres asíntotas $y = \frac{1}{2}(x+1)$, $y = -2$, $y = x$.

2 - CENTRO Y RADIO DE CURVATURA; EVOLUTA DE UNA CURVA PLANA (ver "Lecciones" Cap. XXVIII, n^{os} 4, 5).

Determinar las coordenadas (X, Y) del centro de curvatura y el radio R de curvatura en el punto genérico de una elipse; determinar la evoluta de la misma curva.

Representada la elipse con las ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$, se tiene $x' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$, $x'' = -a \cos t$, $y'' = -b \sin t$, y entonces,

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t, \quad x' y'' - x'' y' = ab.$$

Aplicando ahora las conocidas fórmulas

$$X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y'}, \quad Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y'},$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x' y'' - x'' y'|},$$

se encuentra inmediatamente

$$(1) \quad X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad Y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t,$$

$$(2) \quad R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

La evoluta (lugar de los centros de curvatura) queda sin más representada paramétricamente por las (1) y es fácil ver que su gráfica es la de la fig. 89 (donde se ha supuesto $a > b \sqrt{2}$ debido a lo cual dos cúspides son exteriores a la elipse; en el caso contrario todas estarían contenidas en la elipse. El lector puede volver a encontrar esta curva como envolvente de las normales a la elipse, que están representadas por la ecuación $a \sin t (x - a \cos t) - b \cos t (y - b \sin t) = 0$.

Si en la (2) se pone $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ se encuentra que los radios de curvatura AA' y BB' en los vértices AB valen $\frac{b^2}{a}$, $\frac{a^2}{b}$; por lo tanto, por una conocida propiedad la longitud del arco $A'B'$ de evoluta es $\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}$ y la longitud total de la evoluta es

$$4 \frac{a^3 - b^3}{ab},$$

resultado que el lector puede verificar con cálculo directo.

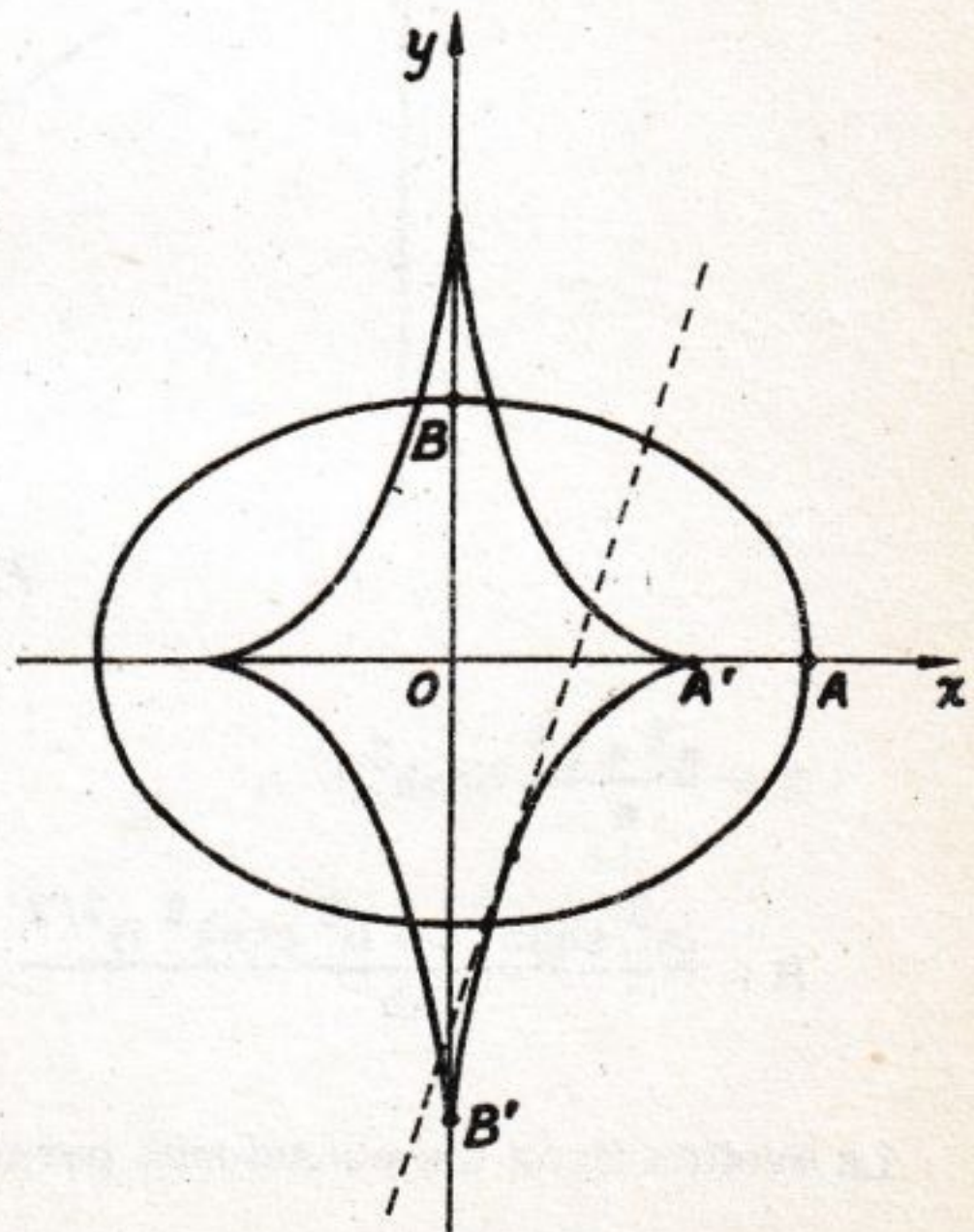


Fig. 89

3 - El mismo problema del ejercicio precedente para una hipérbola.

Refiriéndonos a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, basta considerar la rama situada en el semiplano $x > 0$ que puede representarse con las ecuaciones paramétricas $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ ($-\infty < t < +\infty$).

Procediendo como en el ejercicio precedente, se encontrará

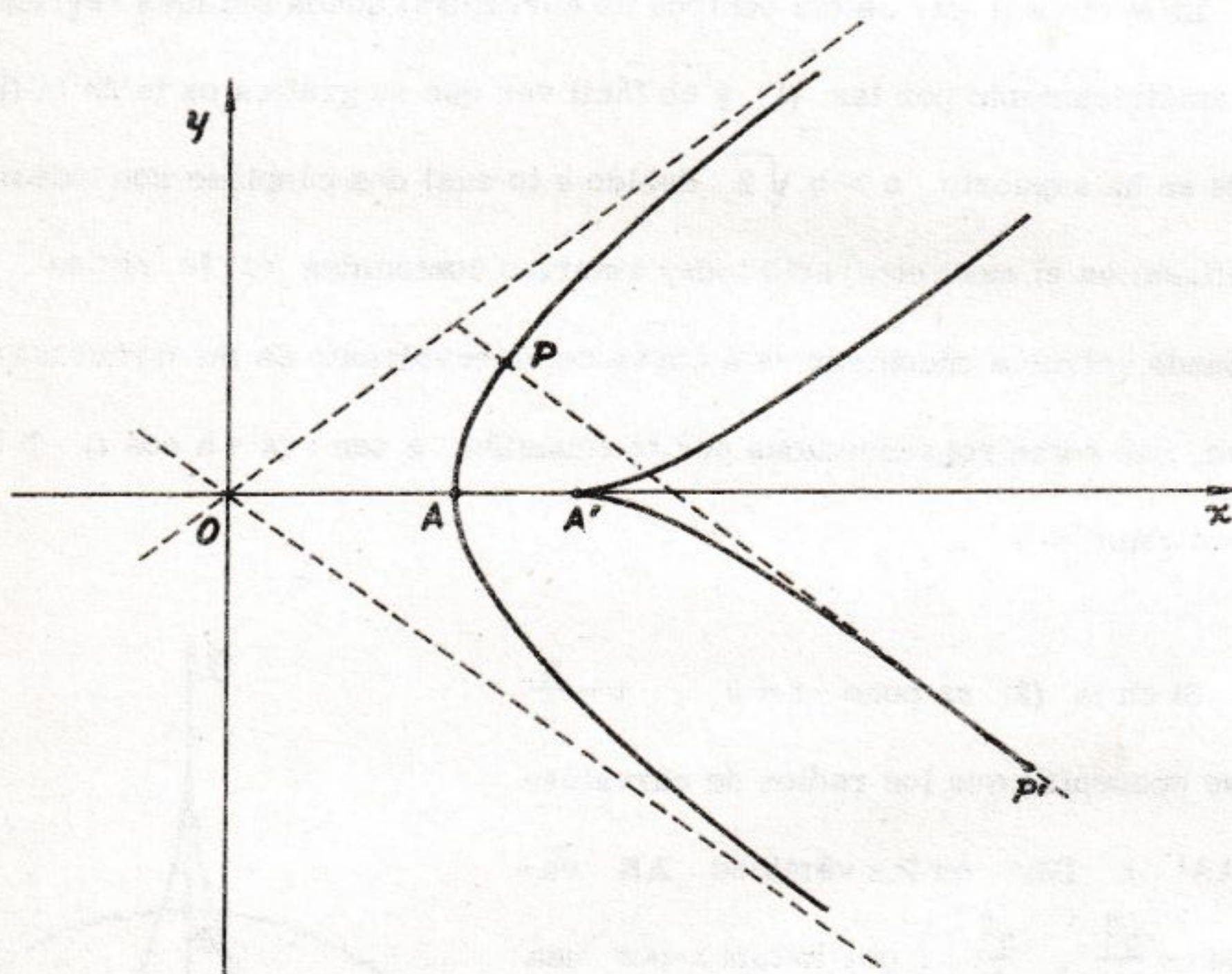


Fig. 90

$$X = \frac{a^2 + b^2}{a} \cosh^3 t, \quad Y = -\frac{a^2 + b^2}{b} \sinh^3 t; \quad (1)$$

$$R = \frac{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}}{ab}$$

La evoluta tiene las ecuaciones paramétricas (1) y el comportamiento descrito en la fig. 90. ¿Cuánto vale la longitud de un arco de evoluta del tipo A'P'?

4 - El mismo problema del ej. 2 para una parábola

Refiriéndonos a la parábola $y^2 = 2px$ se pueden adoptar las ecuaciones paramétricas $x = 2pt^2$, $y = 2pt$, $(-\infty < t < +\infty)$ tras lo que es fácil llegar a las

$$\begin{aligned} X &= p(6t^2 + 1), & Y &= -8pt^3; \\ R &= p(4t^2 + 1)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

La eliminación del parámetro t entre las (1) lleva a la ecuación cartesiana $8(X - p)^3 = 27pY^2$ de la evoluta, que es entonces una semicúbica con la cúspide en el punto $(p, 0)$; ésta interseca la parábola en los dos puntos $(4p, \pm 2p\sqrt{2})$. Dejamos para el lector la tarea de trazar la figura.

5 - El mismo problema del ej. 2 para la astroide.

La astroide tiene las ecuaciones paramétricas $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$

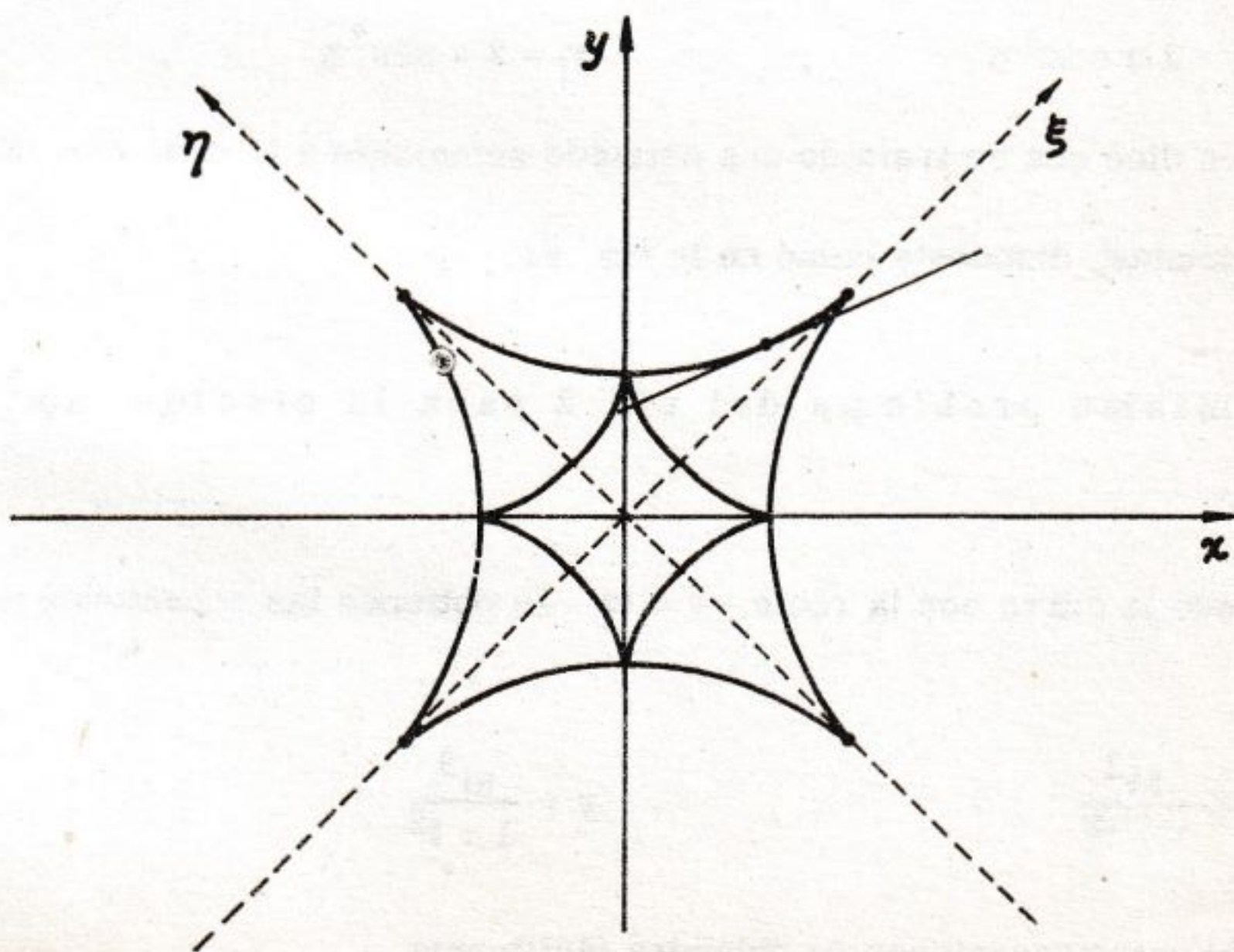


Fig. 91

$(0 \leq t \leq 2\pi)$ y para ella se encuentra fácilmente

$$X = a \cos t (2 - \cos 2t) \quad , \quad Y = a \sin t (2 + \cos 2t) \quad (1)$$

$$R = \frac{3}{2} a |\sin 2t| \quad ,$$

La evoluta queda representada paramétricamente por las (1) ; para ver de qué curva se trata comencemos a cambiar parámetro poniendo $t = \tau + \frac{\pi}{4}$ y transformando así las (1) en las

$$X = a \frac{\cos \tau - \sin \tau}{\sqrt{2}} (2 + \sin 2\tau) \quad , \quad Y = a \frac{\cos \tau + \sin \tau}{\sqrt{2}} (2 - \sin 2\tau)$$

Hagamos ahora rotar los ejes en 45° según el sentido positivo pasando de tal modo a nuevas coordenadas ξ, η ligadas a las X, Y por las $\xi = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \quad , \quad \eta = \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}$.

Con fácil cálculo se encuentra que, respecto de los nuevos ejes, la evoluta tiene las ecuaciones paramétricas

$$\xi = 2a \cos^3 \tau \quad , \quad \eta = 2a \sin^3 \tau \quad ,$$

lo que nos dice que se trata de una astroide semejante a la dada (con dimensiones duplicadas) dispuesta como en la fig. 91.

6 - El mismo problema del ej. 2 para la cisoide $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$.

Cortando la curva con la recta $y = tx$ se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{at^2}{1+t^2} \quad , \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}$$

Usando estas ecuaciones se obtendrá fácilmente

$$X = -\frac{1}{6} at^2 (6 + t^2) \quad , \quad Y = \frac{4}{3} at \quad ;$$

$$R = \frac{1}{6} a |t| (4 + t^2)^{3/2}.$$

La evoluta (1) tiene la ecuación cartesiana $27 Y^4 + 288 a^2 Y^2 + 512 a^3 X = 0$. Al lector le dejamos la tarea de trazar la figura.

7 - El mismo problema del ej. 2 para la cardioide.

La cardioide tiene la ecuación polar $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ y entonces pueden asumirse como ecuaciones paramétricas:

$$x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$$

$$y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Con los cálculos habituales se encuentra

$$X = \frac{1}{3} a (2 - \cos \varphi) (1 + \cos \varphi),$$

$$Y = \frac{1}{3} a \sin \varphi (1 - \cos \varphi), \quad (1)$$

$$R = \frac{4}{3} a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|.$$

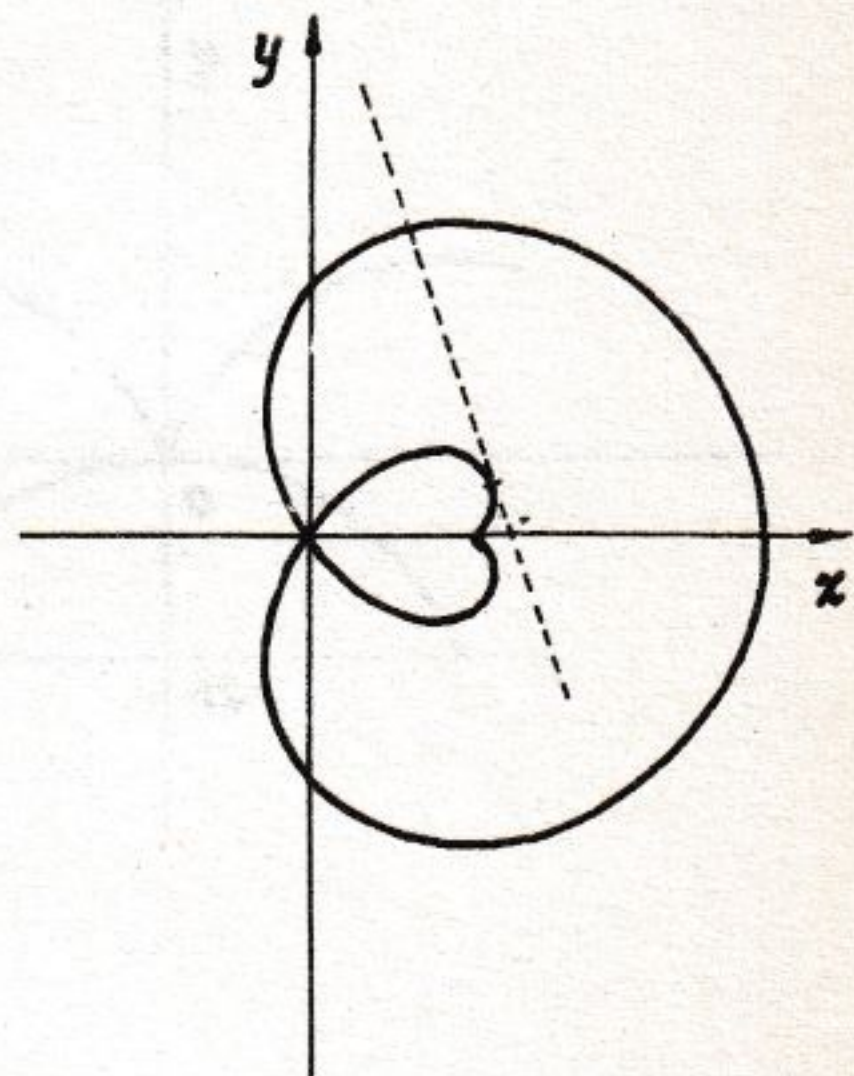


Fig. 92

Para estudiar la evoluta representada por las (1), observemos que éstas pueden escribirse también

$$-(X - \frac{2a}{3}) = \frac{1}{3} a [1 + \cos(\pi - \varphi)] \cos(\pi - \varphi), \quad Y = \frac{1}{3} a [1 + \cos(\pi - \varphi)] \sin(\pi - \varphi),$$

poniéndose así en evidencia que la evoluta es una cardioide, semejante a la dada, con las dimensiones reducidas a un tercio y cúspide en el punto $(\frac{2a}{3}, 0)$, dispuesta como en la fig. 92.

8 - El mismo problema del ej. 2 para la cicloide.

Adoptando para la cicloide las ecuaciones paramétricas

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t), \quad (-\infty < t < +\infty)$$

se encuentra

$$X = r(t + \operatorname{sen} t) \quad Y = -r(1 - \cos t) \quad (1)$$

$$R = 4r \left| \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right| .$$

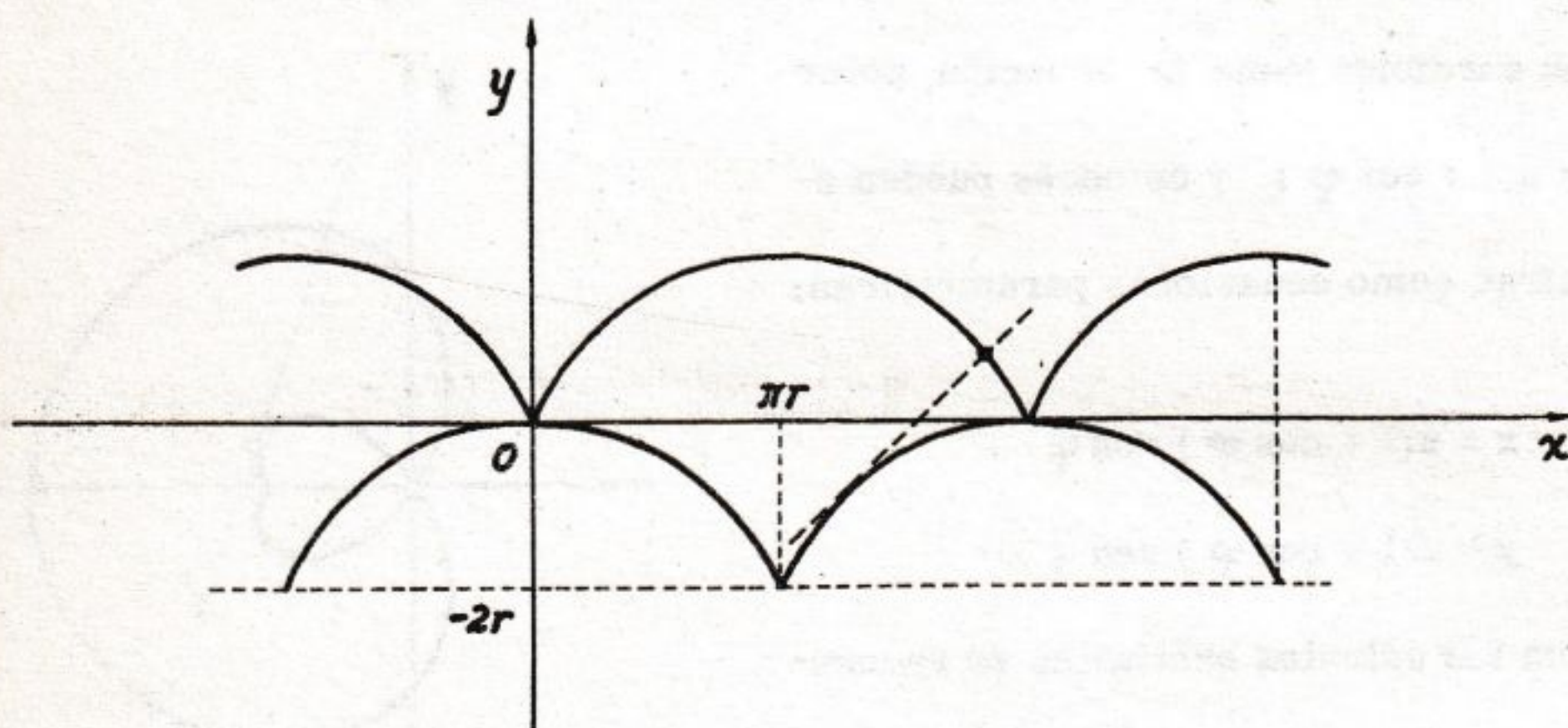


Fig. 93

Las (1) pueden también escribirse

$$X - \pi r = r[(t - \pi) - \operatorname{sen}(t - \pi)] , \quad Y + 2r = r[1 - \cos(t - \pi)]$$

y de aquí que la evoluta sea una cicloide igual a la dada, obtenida a partir de ésta mediante una traslación que lleva el origen al punto $(\pi r, -2r)$ [ver figura 93].

9 - El mismo problema del ej. 2 para la tractriz.

La tractriz está representada por las ecuaciones paramétricas

$$x = a \left(\log \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right) , \quad y = a \operatorname{sen} t , \quad (0 < t < \pi) .$$

Se encuentra

$$X = a \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} , \quad Y = \frac{a}{\operatorname{sen} t}$$

$$R = a | \cotg t |$$

Eliminando el parámetro t entre las (1) se llega a la ecuación

$$Y = a \cosh \frac{X}{a},$$

o sea, a una catenaria (ver fig. 94).

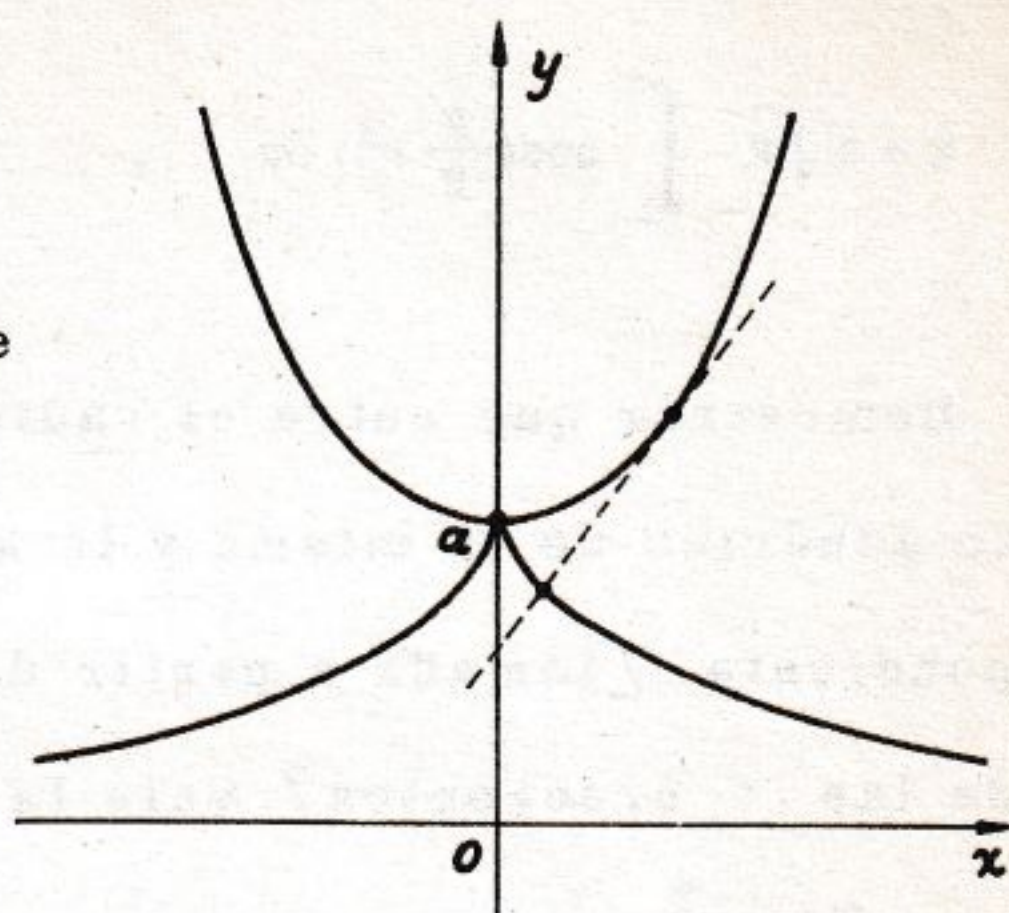


Fig. 94

10 - El mismo problema del ej. 2 para la espiral logarítmica.

La espiral logarítmica tiene la ecuación polar $\rho = a e^{k\varphi}$. Si adoptamos ecuaciones paramétricas

$$x = a e^{k\varphi} \cos \varphi, \quad y = a e^{k\varphi} \sin \varphi$$

y desarrollamos los cálculos de costumbre se encuentra

$$X = -a k e^{k\varphi} \sin \varphi, \quad Y = a k e^{k\varphi} \cos \varphi, \quad (1)$$

$$R = a e^{k\varphi} \sqrt{k^2 + 1}.$$

Poniendo $a k e^{-\frac{k\pi}{2}} = b$, $\varphi + \frac{\pi}{2} = \psi$, las (1) pueden también escribirse

$$X = b e^{k\psi} \cos \psi, \quad Y = b e^{k\psi} \sin \psi,$$

y entonces la evoluta es una espiral logarítmica semejante a la dada.

11 - Considérese la curva plana de ecuaciones paramétricas

$$x = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \quad y = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du \quad (1)$$

Demostrar que entre el radio de curvatura R en un punto genérico de la misma y la abscisa curvilínea s correspondiente [tomada a partir del punto $(0,0)$ en el sentido de las t crecientes] vale la relación

$$Rs = a^2 \quad (2)$$

Se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left[a\sqrt{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right]^2 + \left[a\sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right]^2} = a\sqrt{\pi}$$

y entonces, teniendo en cuenta que debe ser $s = 0$ para $t = 0$:

$$s = a\sqrt{\pi} t$$

Adoptando como parámetro el arco s , las (1) pueden sustituirse por las

$$x = a\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{s}{a\sqrt{\pi}}} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \quad y = a\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{s}{a\sqrt{\pi}}} \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, ,$$

de donde resulta

$$\frac{dx}{ds} = \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right), \quad \frac{dy}{ds} = \sin\left(\frac{s^2}{2a^2}\right),$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{s}{a^2} \sin\left(\frac{s^2}{2a^2}\right), \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{s}{a^2} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)$$

y, en consecuencia

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}} = \frac{a^2}{s}$$

de donde sigue la (2) .

12 - EVOLVENTES DE UNA CURVA PLANA.

Se ha visto en "Lecciones", Cap. XXVIII, n^o 5 que, dada una curva plana $x = x(s)$, $y = y(s)$ referida a su arco s sus infinitas evolventes quedan representadas por las ecuaciones paramétricas

$$X = x(s) + (c - s)x'(s), \quad Y = y(s) + (c - s)y'(s), \quad (1)$$

donde c es una constante arbitraria.

Si la curva está en cambio dada por ecuaciones paramétricas genéricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, siendo

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x'(t)}{\pm \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{y'(t)}{\pm \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}},$$

$$c - s = \mp \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

con los signos superiores o inferiores según que el sentido positivo de los arcos s coincida o sea opuesto al de los t crecientes (y donde se ha indicado con t_0 al valor de t que corresponde al punto en que $s = c$), se ve que las ecuaciones (1) toman la forma, sobreentendida la variable t :

$$X = x - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt, \quad Y = y - \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt, \quad (2)$$

con la constante arbitraria t_0 .

Por ejemplo, las evolventes de la circunferencia $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ quedan definidas por las

$$X = r[\cos t + (t - t_0) \sin t], \quad Y = r[\sin t - (t - t_0) \cos t].$$

Análogamente, de las (2) se puede deducir que las evolventes de la semicúbica $x = t^2$, $y = t^3$ tienen las ecuaciones paramétricas

$$X = \frac{1}{3} t^2 - \frac{8}{27} + \frac{2c}{\sqrt{4+9t^2}}, \quad Y = -\frac{4}{9} t + \frac{3ct}{\sqrt{4+9t^2}};$$

para $c = 0$ se tiene una parábola (cfr. ej. 4).

El lector puede aplicar las (2) a otros casos y buscar, por ejemplo, las evolventes de una astroide, de una cicloide, etc.

13 - PLANO OSCULADOR, TRIEDRO PRINCIPAL, CURVATURA Y TORSION DE LAS CURVAS ALABEADAS (ver "Lecciones", Cap. XXVIII, n^{os} 2, 3, 4).

Dada la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ (cúbica alabeada), demostrar que el plano osculador en un punto cualquiera (x, y, z) de la misma define sobre los ejes coordenados los segmentos $\frac{x}{3}$, $-\frac{y}{3}$, z .

El citado plano osculador tiene ecuaciones (en las coordenadas corrientes X, Y, Z):

$$\begin{vmatrix} X - t & Y - t^2 & Z - t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$$

o sea, $3t^2 X - 3t Y + Z - t^3 = 0$. Esta ecuación puede también escribirse

$$\frac{\frac{X}{3}}{\frac{x}{3}} + \frac{\frac{Y}{-3}}{-\frac{y}{3}} + \frac{\frac{Z}{z}}{z} = 1,$$

lo que prueba la tesis:

14 - Dada la curva de ecuaciones $x = \frac{1}{1+z^2}$, $y = \frac{z}{1+z^2}$ escribir la ecuación del plano osculador en un punto cualquiera (x, y, z) de la misma. Calcular las coordenadas del centro de curvatura y el radio de curvatura en el punto $(1, 0, 0)$.

Asumiendo como parámetros la coordenada z , la ecuación del plano osculador buscado resulta ser

$$\begin{vmatrix} X - \frac{1}{1+z^2} & Y - \frac{z}{1+z^2} & Z - z \\ -\frac{2z}{(1+z^2)^2} & \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} & 1 \\ -\frac{2(1-3z^2)}{(1+z^2)^3} & -\frac{2z(3-z^2)}{(1+z^2)^3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o sea, tras de haber desarrollado y simplificado

$$z(3-z^2)X - (1-3z^2)Y + Z - 3z = 0$$

En el punto $(1, 0, 0)$ se tiene:

$$x' = 0, \quad y' = 1, \quad z' = 1$$

$$x'' = -2, \quad y'' = 0, \quad z'' = 0$$

de modo que, para los tres menores de 2º orden A, B, C de la matriz

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \text{ se encuentra } A = 0, \quad B = -2, \quad C = 2. \text{ Aplicando entonces las fórmulas conocidas}$$

$$X = x + (x'^2 + y'^2 + z'^2) \frac{Bz' - Cy'}{A^2 + B^2 + C^2} \text{ y análogas}$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{(A^2 + B^2 + C^2)^{1/2}}$$

que dan las coordenadas del centro de curvatura (centro del círculo osculador) y el radio de curvatura (radio del círculo osculador) se encuentra inmediatamente

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad z = 0, \quad R = 1$$

Se puede observar que la curva γ aquí considerada pertenece al cilindro $x^2 + y^2 - x = 0$ y al paraboloides hiperbólico $y = xz$; estas dos cuádricas tie-

nen en común el eje z y el resto de su intersección es precisamente la curva γ que, por ende, es una cúbica alabeada.

15 - Dada la hélice circular $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = kt$ e scribir la ecuación del plano osculador en un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de la misma. Calcular, en el mismo punto, las coordenadas del centro de curvatura y el radio de curvatura.

Con las notaciones habituales se encuentra

$$x' = -r \sin t, \quad y' = r \cos t, \quad z' = k; \quad x'' = -r \cos t, \quad y'' = -r \sin t, \quad z'' = 0;$$

$$A = kr \sin t, \quad B = -kr \cos t, \quad C = r^2,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 + k^2; \quad A^2 + B^2 + C^2 = r^2(r^2 + k^2)$$

y entonces las ecuaciones del plano osculador resultan ser

$$X \sin t - Y \cos t + \frac{r}{k} (Z - kt) = 0,$$

mientras las coordenadas del centro de curvatura y el radio de curvatura tienen los valores

$$X = -\frac{k^2}{r} \cos t, \quad Y = -\frac{k^2}{r} \sin t, \quad Z = kt; \quad R = \frac{r^2 + k^2}{r}.$$

Nótese que el radio de curvatura es constante y que la normal principal (que une el punto P de la curva al correspondiente centro de curvatura) tiene las ecuaciones

$$\frac{X}{\cos t} = \frac{Y}{\sin t}, \quad z = kt;$$

la misma coincide, entonces, con la perpendicular trazada por P al eje z .

16 - El mismo problema del ejercicio precedente para la cur

va representada por las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cosh t \cdot \cos t, \quad y = a \cosh t \cdot \sen t, \quad z = at.$$

Se deben encontrar los siguientes resultados:

(ecuación del plano osculador)

$$X \cos t + Y \sen t - Z \sinh t - a (\cosh t - t \sinh t) = 0;$$

(coordenadas del centro de curvatura)

$$X = -a \frac{\cosh^2 t}{\sinh t} \sen t, \quad Y = a \frac{\cosh^2 t}{\sinh t} \cos t, \quad Z = a(t - \frac{\cosh t}{\sinh t});$$

(radio de curvatura)

$$R = a \sqrt{2} \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}.$$

17 - Dar la fórmula general para el cálculo de la torsión $\frac{1}{T}$ de una curva alabeada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

En "Lecciones", Cap. XXVIII, n° 4 la torsión $\frac{1}{T}$ ha sido definida mediante las fórmulas de Frenet $\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{T} \xi$, ... lo que, sin embargo, no facilita un cálculo inmediato. Queremos por eso demostrar que vale la siguiente fórmula, donde los ápices indican derivaciones respecto del parámetro t :

$$\frac{1}{T} = - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} : \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}^2, \quad (*) \quad (1)$$

fórmula que, introduciendo los menores A, B, C de la matriz en ella indicada,

(*) Con el símbolo M^2 (donde M es una matriz) indicamos el producto de M por su traspuesta M^T .

puede también escribirse

$$\frac{1}{T} = - \frac{x''' A + y''' B + z''' C}{A^2 + B^2 + C^2} \quad (1')$$

Para demostrar la (1) basta expresar todas las derivadas que figuran en ella por medio de los cosenos directores (α, β, γ) , (ξ, η, ζ) , (λ, μ, ν) de la tangente, normal principal, binormal; de la curvatura $\frac{1}{R}$; de la torsión $\frac{1}{T}$ y de la cantidad $\frac{ds}{dt}$, que indicaremos con v . Escribiremos explícitamente solamente las fórmulas x' , x'' , x''' sobreentendiendo las fórmulas análogas para las otras dos coordenadas. Se tiene

$$x' = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \alpha v \quad (2)$$

y, por ende, $x'' = \alpha v' + \alpha' v = \alpha v' + \frac{d\alpha}{ds} v^2$, o también, teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet,

$$x'' = \alpha v' + \xi \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

Se obtiene sucesivamente $x''' = \alpha v'' + \alpha' v' + \xi \left(\frac{v^2}{R}\right)' + \xi' \frac{v^2}{R} = \alpha v'' + \frac{d\alpha}{ds} v v' + \xi \left(\frac{v^2}{R}\right)' + \frac{d\xi}{ds} \frac{v^3}{R}$, o sea, aplicando una vez más las fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned} x''' = \alpha v'' + \xi \frac{vv'}{R} + \xi \left(\frac{v^2}{R}\right)' + \left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\lambda}{T}\right) \frac{v^3}{R} = \alpha \left(v'' - \frac{v^3}{R^2}\right) + \\ + \xi \left[\frac{vv'}{R} + \left(\frac{v^2}{R}\right)' \right] - \lambda \frac{v^3}{RT} \end{aligned} \quad (4)$$

De las (2), (3) sigue

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha v & \beta v & \gamma v \\ \alpha v' + \xi \frac{v^2}{R} & \beta v' + \eta \frac{v^2}{R} & \gamma v' + \zeta \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \left(\frac{v^3}{R} \right)^2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}^2 = \left(\frac{v^3}{R} \right)^2 \quad , \quad (5)$$

y de aquí puede obtenerse la ya conocida expresión de la curvatura (teniendo pre

sente que $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$) :

$$\frac{1}{R} = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

De las (2) , (3) , (4) sigue

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha v & \dots & \dots \\ \alpha v' + \xi \frac{v^2}{R} & \dots & \dots \\ \alpha(v'' - \frac{v^3}{R^2}) + \xi \left[\frac{vv'}{R} + \left(\frac{v^2}{R} \right)' \right] - \lambda \frac{v^3}{RT} & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha v & \beta v & \gamma v \\ \xi \frac{v^2}{R} & \eta \frac{v^2}{R} & \zeta \frac{v^2}{R} \\ -\lambda \frac{v^3}{RT} & -\mu \frac{v^3}{RT} & -\nu \frac{v^3}{RT} \end{vmatrix} = \quad (6)$$

$$= - \left(\frac{v^3}{R} \right)^2 \frac{1}{T} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = - \left(\frac{v^3}{R} \right)^2 \frac{1}{T} .$$

De las (5) , (6) sigue inmediatamente la (1) .

18 - Demostrar que la hélice circular tiene la torsión constante.

Ya se ha visto en el ej. 16 que $A = kr \sin t$, $B = -kr \cos t$, $C = r^2$; por otra parte se tiene $x''' = r \sin t$, $y''' = -r \cos t$, $z''' = 0$ y entonces, $x''' A + y''' B + z''' C = kr^2$. Tras esto, la (1') del ej. precedente proporciona inmediatamente

$$\frac{1}{T} = - \frac{kr^2}{r^2(r^2 + k^2)} = - \frac{k}{(r^2 + k^2)}.$$

19 - Considerada la curva $x = a e^{\lambda t} \cos t$, $y = a e^{\lambda t} \sin t$, $z = b e^{\lambda t}$, demostrar que para ella la razón entre curvatura y torsión es constante. Demostrar después que la curva en consideración está sobre un cono de rotación y corta a las generatrices de ésta según un ángulo constante.

Se encuentra

$$\begin{aligned} x' &= a e^{\lambda t} (\lambda \cos t - \sin t), & y' &= a e^{\lambda t} (\cos t + \lambda \sin t), & z' &= b \lambda e^{\lambda t}, \\ x'' &= a e^{\lambda t} [(\lambda^2 - 1) \cos t - 2\lambda \sin t], & y'' &= a e^{\lambda t} [2\lambda \cos t + (\lambda^2 - 1) \sin t], & z'' &= b \lambda^2 e^{\lambda t}, \\ x''' &= a e^{\lambda t} [(\lambda^3 - 3\lambda) \cos t - (3\lambda^2 - 1) \sin t], & y''' &= a e^{\lambda t} [(3\lambda^2 - 1) \cos t + (\lambda^3 - 3\lambda) \sin t], & z''' &= b \lambda^3 e^{\lambda t}, \\ A &= a b \lambda e^{2\lambda t} (-\lambda \cos t + \sin t), & B &= a b \lambda e^{2\lambda t} (-\cos t - \lambda \sin t), & C &= a^2 (\lambda^2 + 1) e^{2\lambda t}, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= e^{2\lambda t} [(a^2 + b^2) \lambda^2 + a^2], & A^2 + B^2 + C^2 &= a^2 (\lambda^2 + 1) e^{4\lambda t} [(a^2 + b^2) \lambda^2 + a^2], \\ x'''A + y'''B + z'''C &= a^2 b \lambda (\lambda^2 + 1) e^{3\lambda t} \end{aligned}$$

Sigue

$$\frac{1}{R} = \frac{a \sqrt{\lambda^2 + 1} e^{2\lambda t} [(a^2 + b^2) \lambda^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}}{e^{3\lambda t} [(a^2 + b^2) \lambda^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{a \sqrt{\lambda^2 + 1}}{(a^2 + b^2) \lambda^2 + a^2} e^{-\lambda t},$$

$$\frac{1}{T} = - \frac{a^2 b \lambda (\lambda^2 + 1) e^{3\lambda t}}{a^2 (\lambda^2 + 1) e^{4\lambda t} [(a^2 + b^2) \lambda^2 + a^2]} = - \frac{b \lambda}{(a^2 + b^2) \lambda^2 + a^2} e^{-\lambda t}$$

por lo que se llega, efectivamente, a $\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{T}} = - \frac{a}{b} \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\lambda} = \text{constante}.$

De las ecuaciones de la curva sigue $x^2 + y^2 = a^2 e^{2\lambda t}$ y entonces $x^2 + y^2 =$

$= \frac{a^2}{b^2} z^2$; ésta es la ecuación de un cono con vértice en el origen O , de rotación alrededor del eje z y a éste pertenece nuestra curva.

La generatriz del cono que pasa por un punto $P(x, y, z)$ de la curva es la recta OP y tiene los cosenos directores proporcionales a x, y, z o sea a $\cos t, \sin t, \frac{b}{a}$. La tangente en P a la curva tiene los cosenos directores proporcionales a x', y', z' , o sea, a $\lambda \cos t - \sin t, \cos t + \lambda \sin t, \frac{b}{a} \lambda$. Se deduce que el coseno del ángulo de las dos rectas consideradas queda expresado por

$$\frac{\cos t(\lambda \cos t - \sin t) + \sin t(\cos t + \lambda \sin t) + \frac{b^2}{a^2} \lambda}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \sqrt{(\lambda \cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \lambda \sin t)^2 + \frac{b^2}{a^2} \lambda^2}} =$$

$$= \lambda \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)(\lambda^2 + a^2)}}$$

que es, efectivamente, constante

20 - ESFERA OSCULATRIZ

Sea γ una curva regular, referida a su arco s , mediante las ecuaciones $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Sea $P_0(s_0)$ un punto fijado en γ , Γ_0 el círculo osculador en él, de centro C_0 y radio R_0 . Llamando $P(s)$ a otro punto de γ , consideremos la esfera $\Sigma(s)$ que pasa por el círculo Γ_0 y por el punto $P(s)$. Si, para $s \rightarrow s_0$ tal esfera tiende a una esfera límite Σ_0 , ésta se denomina la esfera osculatriz a γ en el punto P_0 .

Usando las notaciones habituales (cfr. ej. 17) el punto P_0 tiene las coordenadas x_0, y_0, z_0 ; el centro C_0 del círculo osculador Γ_0 las coorde-

nadas $x_0 + R_0 \xi_0$, $y_0 + R_0 \eta_0$, $z_0 + R_0 \zeta_0$. El centro $O(s)$ de la esfera $\Sigma(s)$ debe estar sobre la recta trazada por C_0 perpendicularmente al plano osculador en P_0 , es decir, sobre la recta que pasa por C_0 y es paralela a la binormal en el punto P_0 ; por lo tanto las coordenadas de $O(s)$ son del tipo

$$\begin{aligned} X &= x_0 + R_0 \xi_0 + \varphi(s) \lambda_0, & Y &= y_0 + R_0 \eta_0 + \varphi(s) \mu_0 \\ Z &= z_0 + R_0 \zeta_0 + \varphi(s) \nu_0, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\varphi(s)$ es cierta función de s a determinarse. Podemos determinarla teniendo en cuenta que el punto $O(s)$ debe estar también en el plano perpendicular al segmento P_0P en su punto medio, es decir en el plano que en las coordenadas corrientes X, Y, Z tiene ecuación

$$\sum [x(s) - x_0] \left[X - \frac{x(s) + x_0}{2} \right] = 0 \quad (*) \quad (2)$$

En efecto; escribiendo que la (2) queda satisfecha por el punto (1), se obtiene de inmediato

$$\varphi(s) = \frac{\sum (x - x_0) \left(\frac{x - x_0}{2} - R_0 \xi_0 \right)}{\sum (x - x_0) \lambda_0}, \quad (3)$$

donde queda entendido que $x = x(s)$,

Haciendo tender s a s_0 , el punto $O(s)$ tenderá al centro O_0 de la esfera osculatriz y las coordenadas de O_0 se deducen de la (1) sustituyendo $\varphi(s)$ por su límite para $s \rightarrow s_0$. Para calcular tal límite es necesario recurrir a la expresión (3) que para $s \rightarrow s_0$ presenta la forma indeterminada

 (*) Usamos una notación abreviada, escribiendo solamente el término relativo a la coordenada x , precedido del símbolo Σ que está para indicar que se deben sumar tres términos análogos al arriba escrito y relativos a las tres coordenadas x, y, z .

$$\frac{0}{0}$$

Según el teorema de De L'Hospital consideremos en lugar del cociente (3) el de sus derivadas, que se escribe (siendo $\frac{dx}{ds} = \alpha, \dots$) :

$$\frac{\sum \left[\alpha \left(\frac{x-x_0}{2} - R_0 \xi_0 \right) + (x-x_0) \frac{\alpha}{2} \right]}{\sum \alpha \lambda_0} = \frac{\sum \alpha (x-x_0 - R_0 \xi_0)}{\sum \alpha \lambda_0} \quad (4)$$

También este cociente presenta, para $s \rightarrow s_0$, la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ (porque $\sum \alpha_0 \xi_0 = 0$, $\sum \alpha_0 \lambda_0 = 0$). Sustituyamos (4) por el correspondiente cociente de las derivadas que, en virtud de las fórmulas de Frenet $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{R}$, ..., se escribe

$$\frac{\sum \left[\frac{\xi}{R} (x-x_0 - R_0 \xi_0) + \alpha^2 \right]}{\sum \frac{\xi}{R} \lambda_0} = \frac{R + \sum \xi (x-x_0 - R_0 \xi_0)}{\sum \xi \lambda_0} \quad (5)$$

Se tiene todavía la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ (porque $\sum \xi_0^2 = 1$, $\sum \xi_0 \lambda_0 = 0$) y entonces conviene considerar este nuevo cociente de derivadas, obtenido teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet $\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\lambda}{T}, \dots$:

$$\frac{\frac{dR}{ds} + \sum \left[\left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\lambda}{T} \right) (x-x_0 - R_0 \xi_0) + \xi \alpha \right]}{\sum \left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\lambda}{T} \right) \lambda_0}$$

Se deduce que

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \varphi(s) = \frac{\left(\frac{dR}{ds} \right)_0 + \sum \left[\left(\frac{\alpha_0}{R_0} + \frac{\lambda_0}{T_0} \right) R_0 \xi_0 + \xi_0 \alpha_0 \right]}{\sum \left(\frac{\alpha_0}{R_0} + \frac{\lambda_0}{T_0} \right) \lambda_0} = - \left(\frac{dR}{ds} \right)_0 T_0$$

de modo que, de las (1) sigue que las coordenadas del centro O_0 de la esfe-

ra osculatrix son

$$X_0 = x_0 + R_0 \xi_0 - \lambda_0 \left(\frac{dR}{ds} \right)_0 T_0, \quad Y_0 = y_0 + R_0 \eta_0 - \mu_0 \left(\frac{dR}{ds} \right)_0 T_0$$

$$Z_0 = z_0 + R_0 \zeta_0 - \nu_0 \left(\frac{dR}{ds} \right)_0 T_0$$

y que el radio de la propia esfera $(= \overline{O_0 P_0})$ queda expresado por

$$\sqrt{\left[R_0 \xi_0 - \lambda_0 \left(\frac{dR}{ds} \right)_0 T_0 \right]^2 + \dots} = \sqrt{R_0^2 + \left(\frac{dR}{ds} \right)_0^2 T_0^2}.$$

21 - ASINTOTAS DE LAS CURVAS ALABEADAS.

Se pueden extender a las curvas alabeadas γ)

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

los resultados del ej. 1. Si para $t \rightarrow \tau$ el punto (x, y, z) de γ se aleja indefinidamente de forma tal que su distancia a una recta fija r tienda a cero, se dice que r es una asíntota de γ).

Admitiendo, por ejemplo, que tienda al infinito la coordenada x , considerando las proyecciones de γ y de r sobre los planos coordenados xy y xz , se obtiene inmediatamente que condición necesaria y suficiente para la existencia de la asíntota es que existan finitos los cuatro límites

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{y(t)}{x(t)} = m, \quad \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{z(t)}{x(t)} = m',$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau} [y(t) - mx(t)] = n, \quad \lim_{t \rightarrow \tau} [z(t) - m'x(t)] = n'.$$

La asíntota r tiene, en este caso, las ecuaciones $y = mx + n$, $z = m'x + n'$. Determinéense las asíntotas de las curvas

$$x = \frac{\text{sen } t}{1+t^2}, \quad y = \frac{\cos t}{1+t^2}, \quad z = kt; \quad (1)$$

$$x = \frac{\text{sen } t}{t}, \quad y = \frac{\cos t}{t}, \quad z = kt. \quad (2)$$

Para la (1) se encontrará la asíntota $x = y = 0$; para la (2) se encontrarán las dos asíntotas $x = 1$, $z = 0$ y $x = y = 0$.

CAPITULO XXIX

Ecuaciones diferenciales ordinarias

1 - INTEGRACION DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN DE FORMA NORMAL .
(ver "Lecciones", Cap. XXIX, n° 4) .

Integrar la ecuación diferencial $y' = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$.

Es una ecuación de variables separables que puede escribirse bajo la forma $\sqrt{\frac{y}{2a - y}} dy = dx$, de la que integrando ambos miembros con fáciles cálculos se obtiene $2a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{2a - y}} - \sqrt{y(2a - y)} = x + c$.

Es fácil reconocer que la integral general así obtenida representa una familia de cicloides. En efecto; si en la ecuación hallada se pone $y = a(1 - \cos t)$, es inmediato verificar que resulta $x + c = a(t - \operatorname{sen} t)$.

2 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1) (1 + \cos^2 x) dy + y \operatorname{sen} x \cos x dx = 0 \quad ; \quad (2) \quad y' = \frac{1 - y^2}{1 - x^2} \quad ;$$

$$(3) \quad y' = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}} \quad ; \quad (4) \quad y' = \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}} \quad ; \quad (5) \quad \frac{x}{1 + y} dx - \frac{y}{1 + x} dy = 0 .$$

Son todas de variables separables. Procediendo como en el ej. 1 se encuen -

tra

$$(1) \quad y = c \sqrt{1 + \cos^2 x} \quad ;$$

$$(2) \quad y = \frac{x + c}{cx + 1} \quad ;$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2cxy + c^2 - 1 = 0$$

$$(4) \quad y = c e^{-\sqrt{1-x^2}} \quad ;$$

$$(5) \quad y^2 (3 + 2y) = x^2 (3 + 2x) + c \quad .$$

Para la (3) se encontrará, en un primer momento, $\arcsen y - \arcsen x =$ cte ; de ésta se deducirá $\cos (\arcsen y - \arcsen x) = c$. o sea,
 $\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-x^2} + xy = c$, etc., etc.

3 - Determinar la integral particular de la ecuación (1) del ejercicio anterior que verifica la condición inicial $y(\frac{\pi}{4}) = 3$.

Teniendo en cuenta la integral general ya encontrada e imponiendo la condición exigida, se tiene: $3 = c \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{4}} = c \sqrt{\frac{3}{2}}$. De aquí $c = \sqrt{6}$ y la integral particular es, entonces, $\sqrt{6 (1 + \cos^2 x)}$.

4 - Integrar la ecuación diferencial $(3x + y + 2) dy + (3x + y + 1) dx = 0$.

Escrita bajo la forma $y' = -\frac{3x + y + 1}{3x + y + 2}$, ésta resulta del tipo $y' = f(ax + by)$.

Con la sustitución $3x + y = u$ la ecuación dada se transforma en la $u' = \frac{2u + 5}{u + 2}$, del tipo de variables separables que, integrada, da la solución general $2u - \log |2u + 5| = 4x + 2c$. Volviendo a la función y se encuentra para la ecuación propuesta la solución general $x + y = c + \log \sqrt{|6x + 2y + 5|}$.

5 - Integrar la ecuación diferencial $y' + \cos 2(x - y) = 0$.

Procediendo como en el ej. precedente se encuentra $y = x - \arctg 2(x + c)$.

6 - Integrar la ecuación diferencial $(1 + \frac{y^2}{x^2}) dx - 2 \frac{y}{x} dy = 0$

Es una ecuación diferencial del tipo $y' = f(\frac{y}{x})$. Con la sustitución $\frac{y}{x} = u$ se transforma en $u + xu' = \frac{1 + u^2}{2u}$, es decir, en la ecuación de variables separables $u' = \frac{1 - u^2}{2xu}$.

Separando las variables e integrando se tiene inmediatamente $\frac{1}{1 - u^2} = \frac{x}{c}$; en consecuencia la integral general de la ecuación propuesta es $x^2 - y^2 - cx = 0$.

7 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1) (3xy^2 + 2x^3) dx + y^3 dy = 0 \quad ; \quad (2) (2\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0 \quad ;$$

$$(3) (x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad ; \quad (4) (1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}) dx + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy = 0.$$

Con procedimiento análogo al utilizado en el ej. precedente se encuentra

$$(1) \frac{(2x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = c \quad ; \quad (2) y e^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = c$$

$$(3) y = -x \arcsen(\log cx) \quad ; \quad (4) y = x \cos(\log cx)$$

8 - Integrar la ecuación diferencial

$$(3y - 7x + 7) dx + (7y - 3x + 3) dy = 0$$

Es del tipo $y' = f(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'})$. Introducidas las nuevas variables ξ y η , ligadas a las x , y por las ecuaciones $x = \xi + 1$, $y = \eta$, la e-

cuación dada se transforma en la $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{7 - 3\frac{\eta}{\xi}}{7\frac{\eta}{\xi} - 3}$. Con la nueva sustitución

$$\frac{\eta}{\xi} = u \quad \text{se llega con fáciles cálculos a} \quad \xi u' = \frac{7(1 - u^2)}{7u - 3}.$$

Separando las variables e integrando se obtiene $\int \frac{7u-3}{7-7u^2} du = \int \frac{d\xi}{\xi}$.

De aquí, tras realizar las integraciones, se llega a $\frac{3}{14} \log \frac{u-1}{u+1} -$

$-\frac{1}{2} \log(u^2-1) = \log c \xi$ que puede ser escrito en la forma equivalente

$\xi^{14} (u+1)^{10} (u-1)^4 = c_1$. Entonces, volviendo a las variables x e y , se obtiene $(y+x-1)^{10} (y-x+1)^4 = c_1$ que es la integral general de la ecuación dada.

9 - Integrar la ecuación diferencial $(x+y-1)^2 dx - 4x^2 dy = 0$.

Procediendo como en el ej. precedente se encuentra

$$y = x + 1 - \frac{4x}{\log(cx)}.$$

10 - Integrar la ecuación $(1+x^2) y' = -2xy + \frac{1}{x}$.

De inmediato surge que es una ecuación lineal. Escrita en forma normal resulta $y' = -\frac{2x}{1+x^2} y + \frac{1}{x(1+x^2)}$. El factor integrante $e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx}$ es igual a $e^{-\log(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$. La ecuación puede entonces escribirse en la forma $(1+x^2) (y' + \frac{2x}{1+x^2} y) = \frac{1}{x}$. Pero el primer miembro es la derivada de $y(1+x^2)$; entonces se tendrá $y(1+x^2) = c + \log x$, que es la integral general buscada.

11 - Integrar las siguientes ecuaciones:

$$(1) \quad y' = x^3 - y \quad ; \quad (2) \quad y' + y \cos x = \sin x \cos x \quad ;$$

$$(3) \quad (1-x^2) y' + xy = ax \quad ; \quad (4) \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{x}} \quad ;$$

$$(5) \quad y' + \frac{y}{x} = e^x \quad ;$$

$$(6) \quad y' - \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)} y = 2x^2 \sqrt{x^2-1} \quad .$$

Con idéntico procedimiento al utilizado en el ej. precedente, se encuentran las siguientes integrales generales

$$(1) \quad y = c e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \quad ; \quad (2) \quad y = c e^{-\sin x} + \sin x - 1 \quad ;$$

$$(3) \quad y = c \sqrt{1-x^2} + a \quad ; \quad (4) \quad y = c e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - x - \sqrt{x} - \frac{1}{2} \quad ;$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{x} \left[c + e^x (x-1) \right] \quad ; \quad (6) \quad y = x(x^2+c) \sqrt{x^2-1} \quad .$$

12 - Integrar la ecuación $(y + xy^2) dx + dy = 0$.

Es, evidentemente, una ecuación de Bernouilli.

La misma admite, como es fácil ver, la integral $y \equiv 0$. Descartada tal integral, dividamos ambos miembros por y^2 y escribámosla como $-y^{-2} y' = y^{-1} + x$. Con la sustitución $y^{-1} = u$ la transformamos en la ecuación lineal $u' = u + x$, que admite la solución general $u = c e^x - x - 1$. La integral general de la ecuación propuesta resultará así ser igual a $y(c e^x - x - 1) = 1$.

13 - Integrar las siguientes ecuaciones:

$$(1) \quad xy' = y - y^3 \quad ; \quad (2) \quad y' + \frac{y}{x+1} + \frac{(x+1)^3}{2} y^3 = 0 \quad .$$

Con análogo procedimiento al efectuado en el ej. anterior se obtienen las siguientes integrales generales

$$(1) \quad y = \left(1 + \frac{c}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad (2) \quad y = \frac{1}{x+1} \left[c + \frac{(x+1)^2}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

14 - Integrar la ecuación diferencial

$$(X - y) dx + (Y + x) dy = 0$$

donde X e Y indican dos funciones homogéneas del mismo grado.

Por la definición de función homogénea tenemos

$$X(x, y) = x^\alpha \cdot X\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^\alpha \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$Y(x, y) = x^\alpha \cdot Y\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^\alpha \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Poniendo $\frac{y}{x} = u$ la ecuación dada se transforma en la

$$\left[x^\alpha \cdot \varphi(u) - xu \right] dx + \left[x^\alpha \cdot \psi(u) + x \right] \cdot (u dx + x du) = 0.$$

Y, tomando como incógnita $x = x(u)$ ésta puede escribirse en la forma

$$x'(u) = - \frac{\psi(u)}{\varphi(u) + \psi(u)u} \cdot x - \frac{1}{\varphi(u) + \psi(u)u} \cdot x^{-\alpha+2}$$

que es una ecuación de Bernouilli con la función incógnita $x = x(u)$.

15 - Integrar la siguiente ecuación diferencial

$$x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

Escrita la ecuación bajo la forma

$$\left[x(x^2 + y^2) - y \right] dx + \left[y(x^2 + y^2) + x \right] dy = 0,$$

procediendo como en el ej. precedente se llega a la ecuación de Bernouilli $x' =$

$$= - \frac{u}{u^2 + 1} x - \frac{x^{-1}}{(u^2 + 1)^2}, \text{ con la función incógnita } x = x(u), \text{ donde } u = \frac{y}{x}.$$

La integral general de ésta es $x^2 = \frac{c - 2 \operatorname{arctg} u}{1 + u^2}$. Sustituyendo en el puesto de u su valor $\frac{y}{x}$ se obtiene como integral general de la ecuación propuesta

$$x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c .$$

16 - Integrar la ecuación $(2y + x^3) dx + (2x + y^2) dy = 0$.

Se trata de una ecuación diferencial exacta, puesto que resulta

$$\frac{\partial(2y + x^3)}{\partial y} = 2 , \quad \frac{\partial(2x + y^2)}{\partial x} = 2 .$$

Con conocido método (cfr. Cap. XXIX, n° 4) se encuentra que el primer miembro de la ecuación dada es el diferencial total de la siguiente función

$$U(x, y) = \frac{x^4}{4} + 2xy + \frac{y^3}{3} + c ,$$

y entonces la integral general es $3x^4 + 24xy + 4y^3 = c$.

17 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

$$(1) (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0 ,$$

$$(2) \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = 0 ,$$

$$(3) \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0 ,$$

$$(4) \frac{3x + y}{\sqrt{x + y}} dx - \frac{x + 3y}{\sqrt{x + y}} dy = 0 ,$$

$$(5) \frac{2x}{y^3} dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0 .$$

Con análogo procedimiento al del ej. precedente se encuentran las siguientes soluciones generales:

$$(1) x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c ; \quad (2) x + \sqrt{x^2 + y^2} = c ;$$

$$(3) \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} (c - \sqrt{1 + x^2 + y^2}) \quad ; \quad (4) \quad (x-y) \sqrt{x+y} = c \quad ;$$

$$(5) \quad \frac{x^2 - y^2}{y^3} = c \quad .$$

Notemos que para las (4) , (5) podemos encontrar sus integrales generales sin efectuar cuadraturas. En efecto; en la (4) la X y la Y son funciones homogéneas de grado $\frac{1}{2}$ y verifican la condición de integrabilidad $X_y = Y_x$.

De modo similar en la (5) la X y la Y son funciones homogéneas de grado -2 y verifican $X_y = Y_x$. Aplique el lector el teor. III del Cap. XXIII , nº 5 de "Lecciones" y controle los resultados antes obtenidos.

18 - Integrar la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy = 0 \quad (1)$$

La forma diferencial del primer miembro no es un diferencial exacto. Busquemos si existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$ función solamente de la x , debe ser

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x) (x^2 + y^2 + 2x)] = \frac{\partial}{\partial x} [2y \mu(x)] \quad ,$$

o sea, $\mu'(x) = \mu(x)$. Asumiendo, entonces, $\mu(x) = e^x$, se obtiene la ecuación diferencial exacta

$$e^x (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2e^x y dy = 0 \quad ,$$

cuya integral general es $(x^2 + y^2) e^x = c$.

19 - Determinar la condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial $X dx + Y dy = 0$ admita un factor integrante que sea función solamente de xy , o solamente de $x^2 + y^2$.

Poniendo $\mu = \varphi(xy)$, se tiene $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \varphi'(xy) \cdot x$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \varphi'(xy) \cdot y$; entonces ("Lecciones", Cap. XXIX, n° 4) debe ser

$$X \varphi'(xy) \cdot x - Y \varphi'(xy) \cdot y + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \varphi(xy) = 0,$$

o sea,

$$\frac{Y_x - X_y}{xX - yY} = \frac{\varphi'(xy)}{\varphi(xy)},$$

de donde la condición buscada es que $\frac{Y_x - X_y}{xX - yY}$ dependa solamente del producto xy .

Poniendo, en cambio, $\mu = \varphi(x^2 + y^2)$ resulta $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x$, y en consecuencia debe ser

$$(2yX - 2xY) \varphi'(x^2 + y^2) + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \varphi(x^2 + y^2) = 0,$$

etc., etc.

20 - En los ejercicios sucesivos 21, 22, 23, 44 y 45 serán utilizadas magnitudes geométricas de las que aquí daremos las definiciones. Sea γ una curva regular del plano xy , definida por la ecuación $y = f(x)$ y sea r una recta de tal plano, arbitrariamente elegida. Para cada punto P de la curva indiquemos con P_0 su proyección ortogonal sobre r , y con T , N las intersecciones de la recta r con la tangente y la normal en P a la curva.

Las longitudes de los segmentos P_0T , P_0N , PT , PN se denominan, respectivamente, subtangente, subnormal, tangente, normal, de la curva γ en el punto P con respecto a la recta r .

Asumiendo la recta r coincidente con el eje x (fig. 95) y teniendo en

cuenta que las ecuaciones de la tangente y de la normal son, respectivamente

$$Y - y = y' (X - x) ,$$

$$Y - y = - \frac{1}{y'} (X - x)$$

se encuentra inmediatamente

$$P_0T = \left| \frac{y}{y'} \right| , \quad P_0N = | yy' | ,$$

$$PT = \left| y \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} \right| ,$$

$$PN = \left| y \sqrt{1 + y'^2} \right| .$$

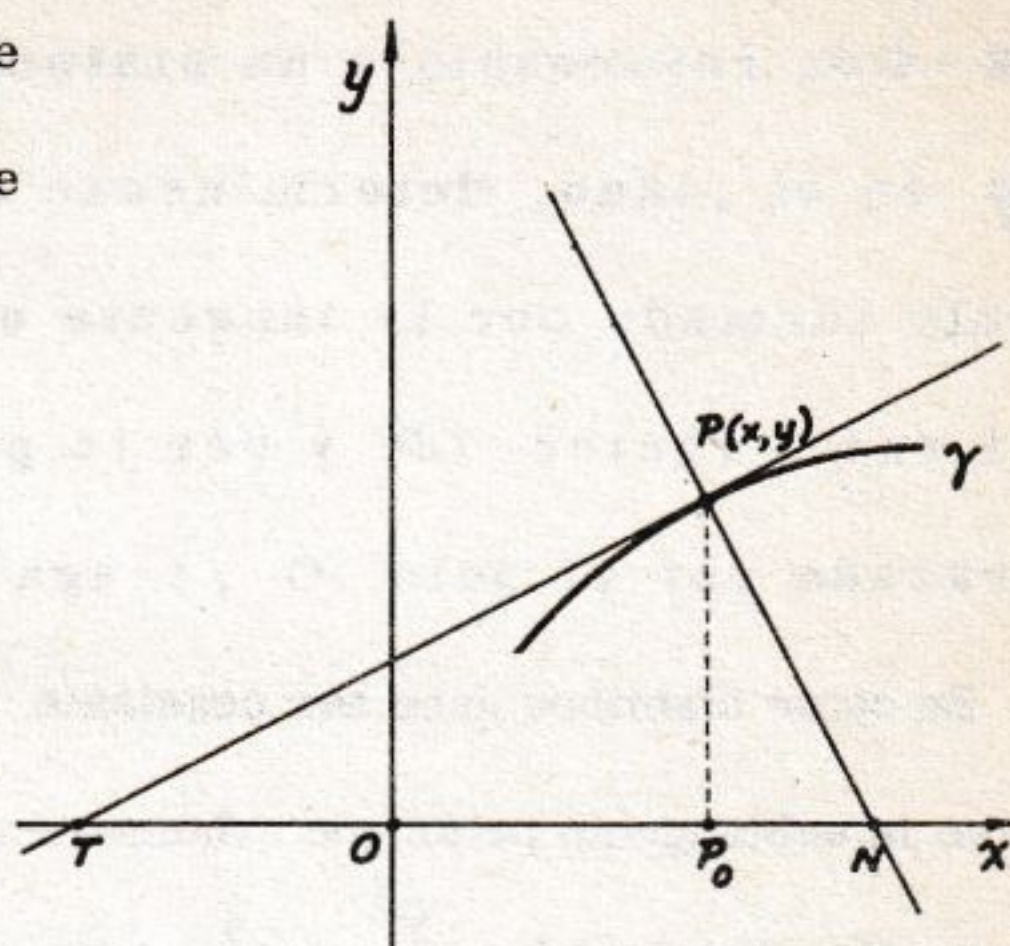


Fig. 95

Fijemos ahora un punto O en el plano. Se denominan subtangente, subnormal, tangente y normal de la curva γ en el punto P , respecto del punto O , las análogas longitudes correspondientes a la curva γ , en el punto P respecto de la recta r que pasa por O y es perpendicular a la OP .

Si se usan coordenadas polares ρ, φ de polo O , representando γ con una ecuación del tipo $\rho = f(\varphi)$, de las $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ se deducen

$$OT = \frac{\rho^2}{|\rho'|} , \quad ON = |\rho'| , \quad PT = \frac{\rho \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{|\rho'|} , \quad PN = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} .$$

21 - Encontrar las curvas planas que tienen la subtangente cartesiana o la subnormal cartesiana constante.

El problema se traduce, en los dos casos, en las respectivas ecuaciones diferenciales $\frac{y}{y'} = a$, $yy' = a$, cuyas integrales generales son $y = e^{\frac{x+c}{a}}$ (curvas exponenciales), $y^2 = 2a(x+c)$ (parábolas).

22 - Con referencia a un sistema de coordenadas polares ρ , φ en el plano, determínense las curvas tales que el triángulo formado por la tangente en el punto genérico P , por el radio vector OP y por la perpendicular a este ultimo trazada por el polo O , tenga área constante.

En otros términos debe ser constante ($=a^2$) el producto del radio vector ρ y de la subtangente polar que sabemos es igual a $\frac{\rho^2}{|\rho'|}$. Se tiene entonces la ecuación diferencial $\frac{\rho^3}{|\rho'|} = a^2$ o sea $a^2 \frac{d\rho}{\rho^3} = \pm d\varphi$. Se deduce que las curvas buscadas tienen ecuación $\rho^2(c \mp \varphi) = \frac{a^2}{2}$.

23 - Hallar las curvas planas para las que la diferencia entre la subtangente cartesiana y la subnormal cartesiana es constante.

Debe ser constante la diferencia $\left| \frac{y}{y'} \right| - |yy'|$ o, lo que es lo mismo, $\frac{y}{y'} - yy'$ dado que $\frac{y}{y'}$ e yy' tienen el mismo signo. Indicando con $2a$ el valor de la constante se tiene entonces la ecuación diferencial

$$\frac{y}{y'} - yy' = 2a, \quad \text{o sea} \quad y' = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + y^2}}{y}.$$

Se trata de dos ecuaciones de variables separables, para las que se encontrarán las integrales generales

$$x = c + \sqrt{a^2 + y^2} + a \log (\sqrt{a^2 + y^2} - a),$$

$$x = c - \sqrt{a^2 + y^2} + a \log (\sqrt{a^2 + y^2} + a),$$

respectivamente.

24 - Determinar las curvas planas γ tales que la proyec -

ción ortogonal de la ordenada de cualquier punto P de γ sobre la normal en P tenga longitud constante a .

La condición del problema se traduce en la ecuación diferencial $\left| \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} \right| = a$, que se transforma en la ecuación normal $y' = \pm \frac{1}{a} \sqrt{y^2 - a^2}$, de variables separables.

Se encuentra la integral general $y + \sqrt{y^2 - a^2} = c e^{\pm \frac{x}{a}}$, de la que es fácil deducir

$$y = \frac{1}{2} \left(c e^{\pm \frac{x}{a}} + \frac{a^2}{c} e^{\pm \frac{x}{a}} \right);$$

basta, sin embargo, considerar los signos superiores y escribir

$$y = \frac{1}{2} \left(c e^{\frac{x}{a}} + \frac{a^2}{c} e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

pues la otra ecuación se obtiene de ésta cambiando c en $\frac{a^2}{c}$.

Para $c = a$ se logra una catenaria.

25 - Determinar las curvas γ tales que, indicando con P al punto móvil sobre γ y con T a la intersección de la tangente a γ con el eje x , el triángulo OPT resulta isósceles de base OP .

La abscisa de T es $x - \frac{y}{y'}$ y entonces se tiene la ecuación $\left| x - \frac{y}{y'} \right| = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2}$, de donde $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$, que es homogénea. Integrando se obtiene la familia de círculos

$$x^2 + y^2 - cy = 0.$$

26 - Fijados arbitrariamente una recta r y un punto A (no

situado sobre r) determinénse las curvas del plano Γ tales que, llamando T a la intersección de r con la tangente a una cualquiera de ellas en un punto genérico M , se tenga siempre $\overline{TM} = \overline{TA}$.

Eligiendo como eje y la recta r , y como eje x la perpendicular a r trazada desde A ; indicando con a la abscisa de A , se obtiene la ecuación

$$x^2 + x^2 y'^2 = a^2 + (y - x y')^2,$$

es decir,

$$y' = \frac{y}{2x} + \frac{a^2 - x^2}{2x} \cdot \frac{1}{y},$$

que es una ecuación diferencial de Bernouilli.

Integrando se encuentra la solución general

$$x^2 + y^2 - cx + a^2 = 0,$$

que representa una familia de circunferencias.

27 - Indíquese con P al punto móvil sobre una curva plana γ , con T a la intersección

del eje y con la tangente a γ en P , con $A(a, 0)$ un punto fijado sobre el eje x . Determinénse todas las curvas γ tales que el segmento TP sea visto desde A siempre bajo ángulo recto.

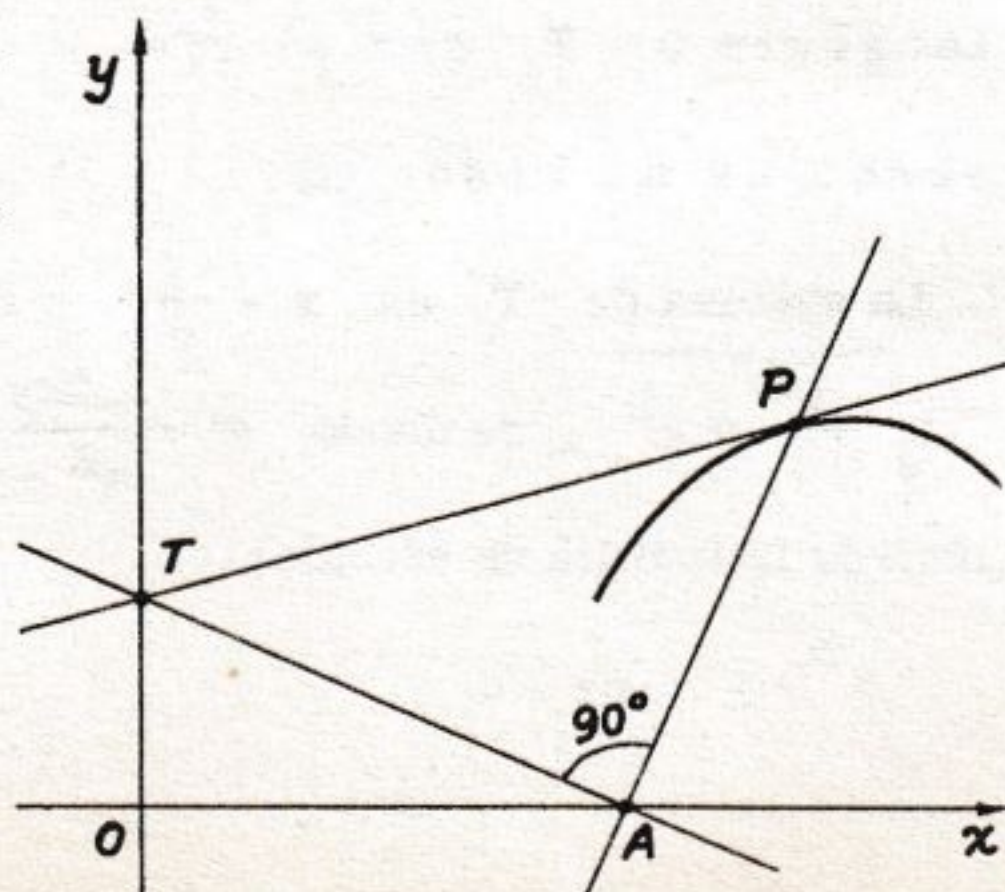


Fig. 96

La ordenada de T es $y - xy'$, y

debiendo resultar $\overline{PT}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{AP}^2$, se tiene

$$x^2 + x^2 y'^2 = a^2 + (y - xy')^2 + (a - x)^2 + y^2$$

de donde

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{a(x - a)}{x} \frac{1}{y},$$

que es una ecuación diferencial de Bernouilli,

Se obtiene como solución general $y^2 = cx^2 + 2ax - a^2$, que representa un haz de cónicas.

28 - Un muro con forma de sólido de rotación está cargado en su base superior con un peso P . Determinar la sección meridiana de modo que toda sección transversal quede sujeta a la misma presión.

Sea r el radio de la base superior y h la altura del muro, ρ el peso específico del material con que está construido.

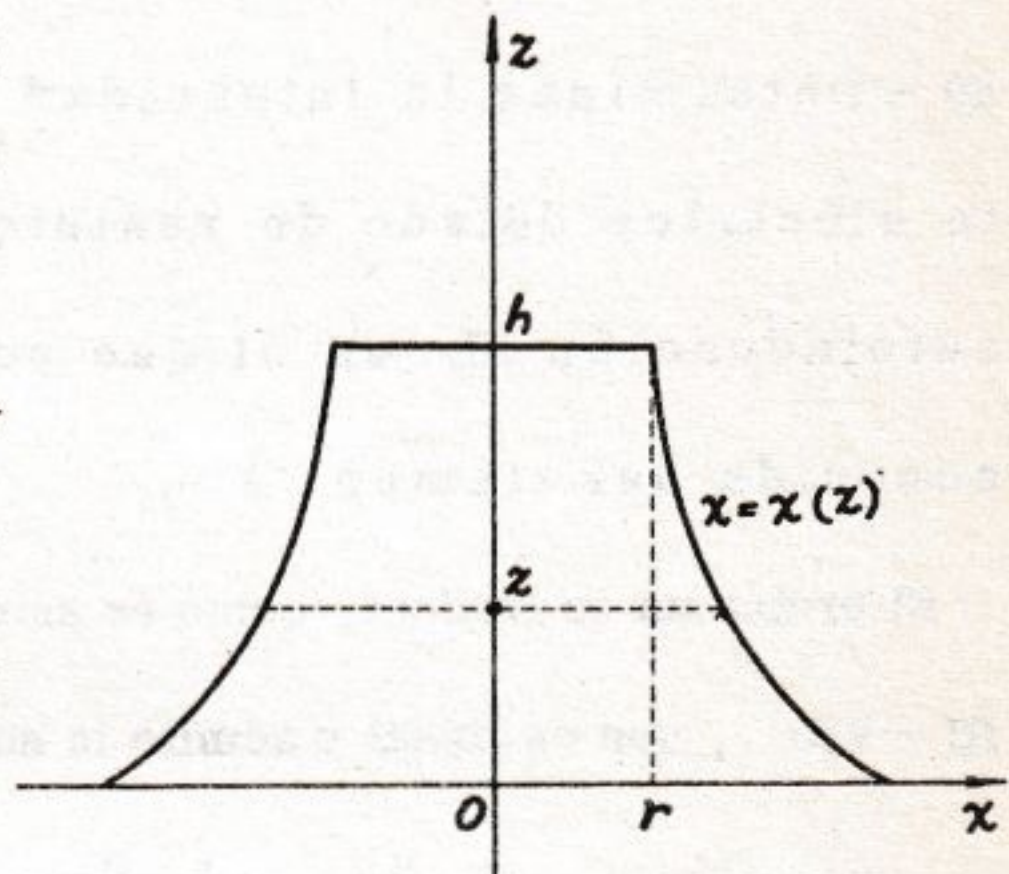


Fig. 97

Sea, además, $x = x(z)$ la ecuación

incógnita de la línea meridiana. Sobre la sección (transversal) de altura z ($0 \leq z \leq h$) actúa, además del peso P , el peso de la parte de muro que está sobre tal sección, o sea la fuerza $P + \rho \int_z^h \pi x^2 dz$ (*), por lo que la presión sobre tal sección vale $\frac{1}{\pi x^2} (P + \rho \int_z^h \pi x^2 dz)$. Esta presión debe ser constante y, en consecuencia, igual al valor $\frac{P}{\pi r^2}$ que tiene sobre la base su-

(*) La integral aquí escrita representa el volumen de la parte de muro que está sobre la sección (ver "Lecciones", Cap. XXII, n. 10).

perior. Se llega así a la ecuación $P + \pi \rho \int_z^h x^2 dz = \frac{P}{r^2} x^2$ que, derivada, proporciona la

$$- \pi \rho x^2 = \frac{2P}{r^2} x \frac{dx}{dz}.$$

Es una ecuación de variables separables cuya solución general es $x = c e^{-\frac{\pi \rho r^2}{2P} z}$.

Es necesario, por último, determinar la constante arbitraria c de modo que resulte $x(h) = r$, obteniéndose así $c = r e^{\frac{\pi \rho r^2}{2P} h}$ y, en consecuencia, la siguiente ecuación para la línea meridiana

$$x = r e^{\frac{\pi \rho r^2}{2P} (h-z)}$$

29 - Determinar la intensidad de corriente $I(t)$ en un circuito eléctrico dotado de resistencia R y de coeficiente de autoinducción L en el que actúe una f.e.m. $V(t)$, función conocida del tiempo T .

El problema se traduce, como es sabido, en la ecuación diferencial $L \frac{dI}{dt} + RI = V(t)$, que es lineal y admite la solución general

$$I = c e^{\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L} e^{\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau} V(\tau) d\tau.$$

La constante arbitraria c se determina después en base al valor inicial $I(0) = I_0$ de la intensidad de corriente, que se supone dado. Se encuentra que $c = I_0$ y entonces, en definitiva, es

$$I = I_0 e^{\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L} e^{\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau} V(\tau) d\tau.$$

El lector puede aplicar esta fórmula a los casos particulares $V = V_0 =$ constante, $V = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

30 - TRAYECTORIAS ORTOGONALES DE UNA FAMILIA DE CURVAS PLANAS.

Sea dada una familia ∞^1 de curvas planas representada por la ecuación $f(x, y, \lambda) = 0$, cuando varía el parámetro λ . Se denominan trayectorias ortogonales de la misma a las curvas que cortan todas las curvas de la familia según un ángulo recto.

En un punto (x, y) la curva $f(x, y, \lambda) = 0$ que pasa por él tiene una tangente cuyo coeficiente angular es $m = -\frac{f_x(x, y, \lambda)}{f_y(x, y, \lambda)}$ y por el mismo punto pasa una de las trayectorias ortogonales incógnitas con una tangente de coeficiente angular $m_1 = \frac{dy}{dx}$. Las dos tangentes son perpendiculares y, debiendo ser $mm_1 = -1$, se llega a

$$\frac{dy}{dx} \frac{f_x(x, y, \lambda)}{f_y(x, y, \lambda)} = 1 \quad (1)$$

Esta ecuación debe verificarse en aquel valor de λ que corresponde a la curva de la familia que pasa por el punto considerado (x, y) , vale decir, para aquel valor de λ que verifica la

$$f(x, y, \lambda) = 0 \quad (2)$$

Sigue que en tal punto (x, y) la $\frac{dy}{dx}$ calculada a lo largo de la trayectoria ortogonal que pasa por él queda ligada a x y por la relación que se obtiene eliminando λ entre (1) y (2).

Con tal eliminación se encontrará una ecuación del tipo

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad (3)$$

que es, entonces, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales buscadas. Integrando la (3) se obtendrá la ecuación $\varphi(x, y, c) = 0$ del sistema de tales trayectorias.

Es de notar que si las curvas dadas quedan representadas por una ecuación del tipo $f(x, y) = \lambda$ es decir, son las líneas de nivel de una función dada $f(x, y)$, la (1), que en este caso se escribe

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = 1, \quad (1')$$

proporciona sin más la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales.

Considérese, por ej., la familia de hipérbolas equiláteras definidas por $x^2 - y^2 = \lambda$. La (1') se escribe $-y' \cdot \frac{x}{y} = 1$ y es de variables separables; se encuentra inmediatamente la solución general $xy = c$. Las trayectorias ortogonales son, entonces, las hipérbolas equiláteras que tienen por asíntotas a los ejes coordenados, y se obtienen de las dadas mediante una rotación de 45° alrededor del origen.

Como otro ejemplo considérese la familia de lemniscatas definidas por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 - \lambda(x^2 - y^2) = 0$. La (1) se escribe $y' \frac{2x(x^2 + y^2) - \lambda x}{2y(x^2 + y^2) + \lambda y} = 1$ y eliminando λ entre ésta y la ecuación dada, se llega a la ecuación diferencial $y' = \frac{3x^2 y - y^3}{x^3 - 3xy^2}$. Es una ecuación homogénea que, con la posición $\frac{y}{x} = u$ se transforma en la $\frac{1 - 3u^2}{u(1 + u^2)} du = \frac{2}{x} dx$; sigue, integrando, $\log c + \log u - 2 \log(1 + u^2) = 2 \log x$.

De ésta se pasa a la $c u = x^2 (1 + u^2)^2$ y, sucesivamente, a $(x^2 + y^2)^2 - c x y = 0$, que es la ecuación buscada de las trayectorias ortogonales. Se trata todavía de lemniscatas y se ve de inmediato que se las obtiene de las dadas con una rotación de 45° alrededor del origen.

31 - Determinar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

$$(1) \quad x^2 + y^2 - \lambda x = 0 \quad ; \quad (2) \quad 3x^2 + y^2 - \lambda x = 0 \quad ; \quad (3) \quad (x - \lambda)^2 + y^2 = r^2$$

En el caso (1) se encuentra la ecuación diferencial $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ ya encontrada en el ej. 25 ; las trayectorias ortogonales son, en consecuencia, los círculos $x^2 + y^2 - cy = 0$.

En el caso (2) se llega a la ecuación diferencial $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$ (homogénea) y se obtiene la integral general $y^3 - c(x^2 - y^2) = 0$; las trayectorias ortogonales constituyen, entonces, un haz de curvas.

En el caso (3) se llega a la ecuación diferencial $y'^2 = \frac{y^2}{r^2 - y^2}$ la que se separa en las dos $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$ Basta sin embargo

considerar la primera pues la segunda se obtiene a partir de la primera realizando el cambio de x en $-x$, y en $-y$, de modo que la solución de la segunda será la simétrica respecto del

origen de las de la primera. Se obtiene $\int \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} dy = x - c$ y efectuando

en la integral la sustitución $y = r \sin t$ es fácil deducir

$$x - c = r \left(\log \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right) .$$

Las trayectorias ortogonales buscadas pueden entonces representarse con las ecuaciones paramétricas

$$x - c = r \left(\log \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right) , \quad y = r \sin t$$

que constituyen una familia de curvas, llamadas *tractices* , deducibles una de otra mediante una traslación según el eje x .

32 - INTEGRACION DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE FORMA NO NORMAL.

Integrar la ecuación diferencial $y = f(y')$.

Se trata de una ecuación en la que la x no figura explícitamente. La integral general se puede expresar mediante dos ecuaciones paramétricas con y' como parámetro. En efecto; diferenciando la ecuación dada, se tiene $y' dx = f'(y') dy'$, $dx = \frac{f'(y')}{y'} dy'$, de donde, integrando, $x = c + \int \frac{f'(y')}{y'} dy'$.

Las ecuaciones paramétricas de la solución general son, entonces,

$$x = c + \int \frac{f'(y')}{y'} dy' , \quad y = f(y')$$

Si entre éstas es posible eliminar el parámetro y' , se tiene la integral general bajo la forma $\varphi(x, y, c) = 0$.

33 - Integrar la ecuación diferencial $y = 2y'^3 + y'^2$.

Con el procedimiento del ej. precedente se obtiene $y' dx = (6y'^2 + 2y') dy'$, de donde $y' = 0 \rightarrow y = 0$, en consecuencia, por la ecuación dada $y = 0 \rightarrow$ o también $dx = (6y' + 2) dy'$.

Tenemos así la solución general

$$x = 2y' + 3y'^2 + c , \quad y = 2y'^3 + y'^2 ,$$

y la solución singular $y = 0$.

34 - Integrar la ecuación diferencial $x = f(y')$.

Se trata de una ecuación que no contiene explícitamente la y . Diferenciando los dos miembros, se obtiene $dx = f'(y') dy'$; pero se tiene $dx = \frac{dy}{y'}$ y entonces puede escribirse $\frac{dy}{y'} = f'(y') dy'$, $dy = y' f'(y') dy'$; integrando se llega a $y = c + \int y' f'(y') dy'$ que, junto a la $x = f(y')$ proporciona la so-

lución general en forma paramétrica.

35 - Integrar la ecuación diferencial $x = \cos y' + y'$.

Con el procedimiento del ej. precedente se obtiene $dy = y'(-\sin y' + 1) dy'$; integrando sigue $y = y' \cos y' - \sin y' + \frac{1}{2} y'^2 + c$ que, junto a la ecuación dada, brinda la solución general bajo forma paramétrica.

36 - Determinar las curvas $y = y(x) \geq 0$ tales que, para cada una de ellas, las áreas de los rectanguloides relativos resulten proporcionales a los correspondientes arcos de curva.

La propiedad enunciada se traduce en la ecuación

$$\int_{x_0}^x y \, dx = k \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

con k constante positiva. Derivando se obtiene la ecuación diferencial $y = k \sqrt{1 + y'^2}$ que es del tipo de la del ej. 32. Se encuentra, con el método allí indicado, la integral general

$$x - c = k \log(y' + \sqrt{1 + y'^2}), \quad y = k \sqrt{1 + y'^2} \quad (1)$$

y la integral singular $y = k$. Eliminando y' entre las (1) se encuentra $y = k \cosh \frac{x - c}{k}$, es decir, una familia de catenarias, deducibles unas de otras mediante traslaciones según el eje x .

Las curvas buscadas son, entonces: 1^o) catenarias con el eje paralelo al eje y ; 2^o) rectas paralelas al eje x .

37 - INTEGRACION DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DI-

37 - INTEGRACION DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO (ver "Lecciones", Cap. XXIX, n° 8).

Integrar la siguiente ecuación diferencial

$$2y' y'' + (1 + y'^2)^2 = 0 \quad (1)$$

Es una ecuación de 2° orden en la que no interviene explícitamente la y . Asumiendo como nueva incógnita la y' , poniendo $y' = p$, se obtiene $p' = -\frac{(1 + p^2)^2}{2p}$, es decir, una ecuación del primer orden y de variables separables, cuya integral general es $x + c_1 = \frac{1}{1 + p^2}$.

Para integrar esta última ecuación conviene proceder con el método indicado en el ej. 34; se llega así a representar la integral general de la (1) con las ecuaciones paramétricas

$$x + c_1 = \frac{1}{1 + p^2}, \quad y + c_2 = \frac{p}{1 + p^2} - \operatorname{arctg} p$$

Eliminando el parámetro p se encuentra, por último,

$$y + c_2 = \sqrt{x + c_1 - (x + c_1)^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{x + c_1} - 1}$$

38 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1) \quad xy'' + y' - 4x - 9x^2 = 0 \quad ; \quad (2) \quad y'' + y'^2 + 1 = 0 \quad ;$$

$$(3) \quad y'' = (1 + y'^2)^{3/2} \quad ; \quad (4) \quad x(y'' + 2y'^2) - y' = 0 \quad ;$$

$$(5) \quad y'''^2 - 3y' y'' + 2y'^2 = 0$$

Son todas del tipo considerado en el ej. precedente. Las respectivas integrales generales son:

$$(1) \quad y = x^2 + x^3 + c_1 \log x + c_2 \quad ; \quad (2) \quad y = \log \cos (x + c_1) + c_2 \quad ;$$

$$(3) \quad (x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 = 1 \quad ; \quad (4) \quad y = \frac{1}{2} \log(x^2 + c_1) + c_2 \quad ;$$

$$(5) \quad \begin{cases} y = c_1 e^{2x} + c_2 \\ y = c_1 e^x + c_2 \end{cases}$$

Cuál es el significado geométrico de la (3) ?

39 - Integrar la siguiente ecuación diferencial: $yy'' - y'^2 - y' = 0$.

Es una ecuación de 2º orden en la que la x no figura explícitamente. Asumiendo como nueva incógnita la y' considerada como función de y , o sea poniendo $y' = p(y)$, se tiene $y'' = \frac{dp}{dy} p$, por lo que la ecuación dada se transforma en la $yp \frac{dp}{dy} - p^2 - p = 0$. Esta tiene las soluciones $p = 0$, $p = \frac{y}{c_1} - 1$. De aquí es fácil deducir $y = c_1$, $y = c_1 (1 + c_2 e^{\frac{x}{c_1}})$; pero la primera fórmula es un caso particular de la segunda ($c_2 = 0$) y entonces la solución general de la ecuación propuesta es $y = c_1 (1 + c_2 e^{\frac{x}{c_1}})$.

40 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} (1) \quad yy'' + y'^2 - y' &= 0 \quad ; & (2) \quad yy'' + y'^2 &= 0 \quad ; \\ (3) \quad y'' &= e^{y'} \quad ; & (4) \quad 2y y'' - y'^2 - 1 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Son todas del tipo considerado en el ej. precedente. Las respectivas soluciones generales son

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= y + c_1 \log(y - c_1) + c_2 & (2) \quad y^2 &= c_1 x + c_2 \quad ; \\ (3) \quad y &= (c_1 - x) \log(c_1 - x) + x + c_2 & (4) \quad y &= \frac{(x + c_2)^2}{4 c_1} + c_1 \quad . \end{aligned}$$

La (1) tiene también la solución $y = \text{constante}$.

41 - Integrar la ecuación diferencial $yy'' - y'^2 + y(y' - xy) = 0$.

El primer miembro es una función homogénea de grado 2 de los argumentos

y, y', y'' . Escribiendo la ecuación bajo la forma $\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{y'}{y} - x = 0$ y asumiendo $\frac{y'}{y} = u$ como nueva incógnita se obtiene la ecuación de primer orden $u' + u - x = 0$ que tiene la integral general $u = x - 1 - c_1 e^{-x}$. Tras esto, de la $\frac{y'}{y} = x - 1 - c_1 e^{-x}$ se obtiene de inmediato

$$y = c_2 e^{\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^{-x}}$$

42 - Integrar con el método del ej. precedente las ecuaciones (5) del ej. 38 y (2) del ej. 40.

43 - Integrar la ecuación diferencial $3y' y''^2 = (1 + y'^2) y'''$.

Es una ecuación de 3^{er} orden en la que no figura explícitamente la y . Asumiendo como incógnita $y' = z$, se obtiene la ecuación de 2^o orden $3zz'^2 = (1 + z^2) z''$ en la que no aparece explícitamente la variable independiente x . Considerando como incógnita $z' = p(z)$, se llega a la ecuación de primer orden $3zp^2 = (1 + z^2) p \frac{dp}{dz}$ que tiene las soluciones $p = 0$, $cp = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$.

En el caso $p = 0$ se llega a $z' = 0$ o sea $y'' = 0$ y, en consecuencia, $y = c_1 x + c_2$ (totalidad de las rectas del plano).

En el otro caso tenemos para determinar z la ecuación de 1^{er} orden $cz' = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ que tiene la integral general $\frac{cz}{\sqrt{1 + z^2}} = x + c_1$.

Teniendo en cuenta que $z = y'$ llegamos, por último, a la ecuación $x + c_1 = \frac{cy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ que es del tipo considerado en el ej. 34. Procediendo con el método allí indicado se obtiene $y' + c_2 = \frac{c}{\sqrt{1 + y'^2}}$, por lo que, eliminando y' entre las dos últimas ecuaciones escritas se obtiene $(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 = c^2$ (totalidad de los círculos del plano).

44 - Determinar las curvas planas $y = y(x)$ para las que el radio de curvatura es proporcional al cociente entre la subnormal y la ordenada.

El problema se traduce inmediatamente en la ecuación diferencial de 2º or -

den $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = k \frac{yy'}{y}$, o sea, $(1 + y'^2)^{3/2} = k y' y''$ donde no figura la y . Con $y' = p$ como incógnita se tiene la ecuación de 1º orden $(1 + p^2)^{3/2} = k p p'$ que tiene la integral general $x + c_1 = -\frac{k}{\sqrt{1 + p^2}}$.

Queda por integrar la ecuación de 1º orden

$$x + c_1 = -\frac{k}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (1)$$

del tipo de las del ej. 34 ; se llega a

$$y + c_2 = k \left[\log (y' + \sqrt{1 + y'^2}) - \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] \quad (2)$$

Las curvas buscadas quedan entonces representadas paramétricamente por las (1) , (2) y eliminando el parámetro se llega a la ecuación explícita

$$y + c_2 = -\sqrt{k^2 - (x + c_1)^2} + k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - (x + c_1)^2}}{x + c_1}$$

45 - Determinar las curvas planas $y = y(x)$ para las que el radio de curvatura es proporcional a la normal (curvas de Ribaucour).

Se encuentra inmediatamente la ecuación diferencial $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = ky \sqrt{1 + y'^2}$ o sea $1 + y'^2 = kyy''$. Es una ecuación de 2º orden donde falta la x ; con la posición $y' = p(y)$ se obtiene la ecuación de 1º orden $1 + p^2 = k y p \frac{dp}{dy}$

con la integral general $y = c (1 + p^2)^{k/2}$.

Debemos ahora integrar la ecuación

$$y = c (1 + y'^2)^{k/2} \quad (1)$$

de la que, con el procedimiento descrito en el ej. 32 se deduce que

$$x - c_1 = ck \int (1 + y'^2)^{\frac{k}{2}-1} dy' \quad (2)$$

Las curvas de Ribaucour quedan entonces representadas paramétricamente por las (1), (2). Recordando las conocidas reglas sobre las integrales binomias se reconoce que la cuadratura indicada en (2) puede efectuarse elementalmente sólo si k es entero.

Poniendo $y' = \operatorname{tg} t$, las (1), (2) asumen la forma más simple

$$x - c_1 = ck \int \frac{dt}{\cos^k t}, \quad y = \frac{c}{\cos^k t}.$$

En el caso particular $k = 2$ se obtienen las parábolas $4c(y - c) = (x - c_1)^2$, caracterizadas geométricamente por tener como directriz al eje x . Se reconoce este hecho fácilmente escribiendo la ecuación bajo la forma $(x - c_1)^2 + (y - 2c)^2 = y^2$.

46 - ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES (ver "Lecciones", Cap. XXIX, n^{os} 10, 11, 12, 13, 14, 15).

Integrar la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = f(x) \quad (1)$$

Es una ecuación lineal, no homogénea, con coeficientes constantes.

La ecuación homogénea correspondiente $y'' - 3y' + 2y = 0$ tiene la ecuación característica $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ con las raíces $\alpha = 1$, $\alpha = 2$; de aquí re

sulta que su sistema fundamental de integrales queda dado por $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ y la integral general por $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

La integral general de la (1) está en consecuencia constituida por

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \int_{x_0}^x k(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

donde $k(x, \xi)$ es el núcleo resolvente que, según una regla conocida tiene la expresión:

$$k(x, \xi) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(x-\xi) & y_2(x-\xi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{x-\xi} & e^{2(x-\xi)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = e^{2(x-\xi)} - e^{x-\xi}.$$

Se concluye así que

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \int_{x_0}^x [e^{2(x-\xi)} - e^{x-\xi}] f(\xi) d\xi.$$

47 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1) \quad y''' - 3y' + 2y = f(x) \quad ; \quad (2) \quad y'' + 4y = f(x) \quad ;$$

$$(3) \quad y'' - 2y' + y = f(x) \quad ; \quad (4) \quad y''' - y'' = f(x).$$

Son todas del tipo considerado en el ej. precedente. Para la (1) la ecuación característica relativa a la ecuación homogénea tiene las raíces $\alpha = 1$ (doble) $\alpha = -2$ lográndose así el sistema fundamental de integrales $y_1 = e^x$, $y_2 = x e^x$, $y_3 = e^{-2x}$. El núcleo resolvente será

$$k(x, \xi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ e^{x-\xi} & (x-\xi)e^{x-\xi} & e^{-2(x-\xi)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \left\{ \left[3(x - \xi) - 1 \right] e^{x-\xi} + e^{-2(x-\xi)} \right\}$$

por lo que se tiene la solución general

$$(1) \quad y = (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{9} \int_{x_0}^x \left\{ \left[3(x-\xi) - 1 \right] e^{x-\xi} + e^{-2(x-\xi)} \right\} f(\xi) d\xi.$$

Para la (2) la ecuación característica tiene las raíces $2i$, $-2i$ y se obtienen para la ecuación homogénea las dos soluciones independientes $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$. Se llega así al resultado

$$(2) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \sin 2(x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

Análogamente se encuentra para las otras dos ecuaciones

$$(3) \quad y = (c_1 + c_2 x) e^x + \int_{x_0}^x (x - \xi) e^{x-\xi} f(\xi) d\xi.$$

$$(4) \quad y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + \int_{x_0}^x \left[e^{x-\xi} - (x-\xi) - 1 \right] f(\xi) d\xi$$

48 - Integrar la ecuación diferencial del ej. 46, usando el método de variación de las constantes arbitrarias.

Hemos visto que la integral general de la ecuación homogénea correspondiente está constituida por $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Busquemos ahora una solución particular $y_0(x)$ de la ecuación no homogénea dada, poniendo

$$y_0(x) = v_1(x) e^x + v_2(x) e^{2x} \quad (1)$$

con $v_1(x)$, $v_2(x)$ funciones por calcularse. Es sabido que sus derivadas primeras $v_1'(x)$, $v_2'(x)$ se obtienen del sistema

$$v_1'(x) e^x + v_2'(x) e^{2x} = 0, \quad v_1'(x) e^x + v_2'(x) \cdot 2e^{2x} = f(x).$$

Se tiene, entonces, $v_1'(x) = e^{-x} f(x)$, $v_2'(x) = e^{-2x} f(x)$ y, en consecuen-

cia $v_1(x) = - \int_{x_0}^x e^{-\xi} f(\xi) d\xi$, $v_2(x) = \int_{x_0}^x e^{-2\xi} f(\xi) d\xi$. Sustitu-

yendo en (1) se obtiene la integral particular

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -e^x \int_{x_0}^x e^{-\xi} f(\xi) d\xi + e^{2x} \int_{x_0}^x e^{-2\xi} f(\xi) d\xi = \\ &= \int_{x_0}^x \left[e^{2(x-\xi)} - e^{x-\xi} \right] f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

que, agregado a $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ vuelve a darnos la solución hallada en el ej.46.

49 - Integrar las cuatro ecuaciones diferenciales del ej.47 usando el método de variación de las constantes arbitrarias.

50 - Integrar la ecuación diferencial $y'' - y = 2x - e^{2x}$,

Es una ecuación lineal, no homogénea, con coeficientes constantes. La ecuación homogénea $y'' - y = 0$ tiene la ecuación característica $\alpha^2 - 1 = 0$ con las raíces 1, -1 y, por ende, la solución general $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Queda por determinar una integral particular de la ecuación dada. En este caso es inútil utilizar el núcleo resolvente o el método de variación de las constantes arbitrarias porque, siendo el término independiente combinación lineal de un polinomio de primer grado y de una exponencial, se puede fácilmente encontrar una integral particular aprovechando los artificios descriptos en "Lecciones", Cap. XXIX, n° 14.

Precisamente debe existir una integral particular que sea combinación lineal

de un polinomio de 1^{er} grado (porque el cero no es raíz de la citada ecuación característica) y de la exponencial e^{2x} (porque el número 2 no es raíz de la ecuación característica).

Buscando tales integrales bajo la forma $y = ax + b + ce^{2x}$ (con a , b , c constantes por determinarse) y sustituyendo en la ecuación dada, se obtiene

$$4c e^{2x} - ax - b - c e^{2x} = 2x - e^{2x}.$$

Debe entonces ser $-a = 2$, $b = 0$, $3c = -1$, o sea, $a = -2$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{3}$. Se llega así a que la integral general de la ecuación dada es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2x - \frac{1}{3} e^{2x}.$$

51 - Integrar la ecuación diferencial $2y'' - y' - y = x^2 - 3e^x$.

Se procede de modo análogo al del ejercicio precedente. La ecuación homogénea tiene la solución general $c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$. Se busca luego una solución particular que sea combinación lineal de un polinomio de 2^o grado (porque el cero no es raíz de la ecuación característica) y de una función del tipo $x e^x$ (porque 1 es raíz de la ecuación característica). Poniendo entonces $y = ax^2 + bx + c + dx e^x$ y sustituyendo en la ecuación dada se obtiene

$$4a + 2d(x+2)e^x - 2ax - b - d(x+1)e^x - ax^2 - bx - c - dx e^x = x^2 - 3e^x$$

debiendo entonces ser $-a = 1$, $-2a - b = 0$, $4a - b - c = 0$, $3d = -3$, de donde, $a = -1$, $b = 2$, $c = -6$, $d = -1$.

La integral general de la ecuación propuesta es, entonces,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} - x^2 + 2x - 6 - x e^x.$$

52 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1) \quad y''' - y'' = 6x + 2x e^x \quad ; \quad (2) \quad 4y''' - 8y'' + 5y' = 20x^3 \quad ;$$

$$(3) \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = (x-1)e^x \quad ; \quad (4) \quad y'''' - 16y = 2\cos^2 x \quad .$$

Procédase como en los dos ejercicios precedentes. Se llegará a los siguientes resultados

$$(1) \quad y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - x^3 - 3x^2 + (x^2 - 4x)e^x \quad ;$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 e^x \cos \frac{1}{2}x + c_3 e^x \sin \frac{1}{2}x + x^4 + \frac{32}{5}x^3 + \frac{528}{25}x^2 + \frac{4608}{125}x \quad ;$$

$$(3) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} \right) e^x \quad ;$$

$$(4) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}x \sin 2x \quad (*) \quad .$$

53 - Determinar cuál solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 5y = \sin x \quad (1)$$

verifica las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

La (1) tiene la integral general

$$y = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x + \frac{1}{8} (\sin x - \cos x) \quad . \quad (2)$$

De esta fórmula sigue

$$y' = c_1 e^{-2x} (-2 \cos x - \sin x) + c_2 e^{-2x} (-2 \sin x + \cos x) + \frac{1}{8} (\cos x + \sin x) \quad .$$

Se tiene así $y(0) = c_1 - \frac{1}{8}$, $y'(0) = -2c_1 + c_2 + \frac{1}{8}$ y entonces la integral particular buscada se obtiene en correspondencia con los valores de c_1 y c_2 tales de resultar $c_1 - \frac{1}{8} = 1$, $-2c_1 + c_2 + \frac{1}{8} = 0$.

(*) Téngase presente que el término independiente de la ecuación (4) puede escribirse $1 + \cos 2x$.

Tendremos así $c_1 = \frac{9}{8}$, $c_2 = \frac{17}{8}$ por lo que la integral pedida es

$$y = \frac{1}{8} (9e^{-2x} \cos x + 17 e^{-2x} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \cos x) .$$

54 - Determinar la integral de la ecuación diferencial $y''' + y' = \operatorname{sen} 2x$ que verifica las condiciones iniciales $y(\pi) = \frac{1}{6}$, $y'(\pi) = -1$, $y''(\pi) = -\frac{2}{3}$.

Se encuentra $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{6} \cos 2x$.

55 - Determinar las integrales de las siguientes ecuaciones diferenciales que verifican las condiciones iniciales indicadas:

$$(1) \quad y''' = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad y(1) = 3 \quad , \quad y'(1) = 2 \quad , \quad y''(1) = -1 \quad ;$$

$$(2) \quad y'' + y = \operatorname{sen} x \quad ; \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad ;$$

$$(3) \quad y''' + y'' = 2 \quad ; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \quad .$$

Se encuentra, respectivamente,

$$(1) \quad y = x(3 - \log |x|) \quad ;$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{2} (3 \operatorname{sen} x - x \cos x) \quad ;$$

$$(3) \quad y = x^2 - 2(1 - \cos x)$$

56 - Un circuito eléctrico con coeficiente de autoinducción L y resistencia R en el que interviene un condensador de capacidad C , está alimentado por una f. e. m. conocida $V(t)$. Determinar la intensidad de corriente $I(t)$ suponiendo -

do el circuito inicialmente en reposo.

La $I(t)$ debe verificar la ecuación $L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = V(t)$. Asumiendo como incógnita la carga $Q(t) = \int_0^t I dt$ se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{1}{L} V(t) \quad (1)$$

que es lineal, no homogénea y con coeficientes constantes. Esta ecuación debe integrarse con las condiciones iniciales $Q(0) = 0$, $I(0) = Q'(0) = 0$. La ecuación característica relativa a la ecuación homogénea correspondiente es la $\alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \frac{1}{LC} = 0$ y tiene por raíces a $-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$. Conviene distinguir los tres casos $\frac{R}{2L} \gtrless \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1^{er} caso: $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Las dos raíces de la ecuación característica son reales y distintas, ambas negativas. Indicándolas con $-\alpha$, $-\beta$ la ecuación homogénea asociada a la (1) tiene la integral general $c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\beta t}$ y el núcleo resolvente de la (1) queda expresado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\alpha(t-r)} & e^{-\beta(t-r)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{vmatrix} = \frac{e^{-\beta(t-r)} - e^{-\alpha(t-r)}}{\alpha - \beta}.$$

La (1) tiene entonces la integral general

$$Q(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\beta t} + \frac{1}{\alpha - \beta} \int_0^t \left[e^{-\beta(t-r)} - e^{-\alpha(t-r)} \right] \frac{V(\tau)}{L} d\tau.$$

Sigue, derivando,

$$I(t) = -c_1 \alpha e^{-\alpha t} - c_2 \beta e^{-\beta t} + \frac{1}{\alpha - \beta} \int_0^1 \left[\alpha e^{-\alpha(t-\tau)} - \beta e^{-\beta(t-\tau)} \right] \frac{V(\tau)}{L} d\tau .$$

Imponiendo las condiciones iniciales $Q(0) = I(0) = 0$ se encuentra inmediatamente $c_1 = c_2 = 0$, y así llegamos a

$$Q(t) = \frac{1}{(\alpha - \beta)L} \int_0^t \left[e^{-\beta(t-\tau)} - e^{-\alpha(t-\tau)} \right] V(\tau) d\tau ;$$

$$I(t) = \frac{1}{(\alpha - \beta)L} \int_0^t \left[\alpha e^{-\alpha(t-\tau)} - \beta e^{-\beta(t-\tau)} \right] V(\tau) d\tau .$$

2º caso: $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. La ecuación característica tiene una sola raíz, real y negativa $-\alpha$ (con $\alpha = \frac{R}{2L}$). Con cálculo análogo al del caso precedente se encuentra

$$Q(t) = \frac{1}{L} \int_0^t (t - \tau) e^{-\alpha(t-\tau)} V(\tau) d\tau ;$$

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \left[1 - \alpha(t - \tau) \right] e^{-\alpha(t-\tau)} V(\tau) d\tau .$$

3er caso: $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$. La ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas $-\alpha \pm i\omega$ (con $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$). Con el procedimiento habitual se encuentra

$$Q(t) = \frac{1}{\omega L} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) V(\tau) d\tau ;$$

$$I(t) = \frac{1}{\omega L} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left[\omega \cos \omega(t - \tau) - \alpha \sin \omega(t - \tau) \right] V(\tau) d\tau .$$

57 - Estúdiase la descarga de un condensador de capacidad C a través de un circuito con coeficiente de autoinducción

L y resistencia R .

La carga $Q(t)$ del condensador debe verificar la ecuación diferencial $\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$ y las condiciones iniciales $Q(0) = Q_0$, $Q'(0) = 0$ donde Q_0 indica la carga inicial del condensador.

Manteniendo las posiciones hechas en el ej. precedente se encuentra fácilmente

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\alpha - \beta} (\alpha e^{-\beta t} - \beta e^{-\alpha t}) , \quad I(t) = Q_0 \frac{\alpha \beta}{\alpha - \beta} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) , \quad \left(\text{si } \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$$

$$Q(t) = Q_0 (1 + \alpha t) e^{-\alpha t} , \quad I(t) = -Q_0 \alpha^2 t e^{-\alpha t} , \quad \left(\text{si } \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t} (\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t) , \quad I(t) = -Q_0 \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t ,$$

$$\dots \dots \dots \left(\text{si } \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$$

58 - Dada una ecuación diferencial lineal homogénea del tipo de Euler, con coeficientes reales

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} y' + \frac{a_n}{x^n} y = 0 , \quad (1)$$

examinar la posibilidad de obtener integrales reales cuando la ecuación característica tiene raíces complejas.

Sabemos (cfr. "Lecciones", Cap. XXIX, n° 15) que la determinación de un sistema fundamental de integrales de la (1) depende de la solución de la ecuación característica.

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) + a_1 \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+2) + \dots + a_{n-2} \alpha(\alpha-1) + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

Si $\beta \pm i\gamma$ es un par de raíces complejas conjugadas, de multiplicidad ν se obtienen en correspondencia las 2ν integrales independientes (bajo forma compleja) :

$$y_k = x^{\beta + i\gamma} (\log x)^k, \quad z_k = x^{\beta - i\gamma} (\log x)^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1) \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que

$$x^{\beta \pm i\gamma} = x^{\beta} e^{\pm i\gamma \log x} = x^{\beta} [\cos(\gamma \log x) \pm i \operatorname{sen}(\gamma \log x)],$$

se ve que sustituyendo las integrales (2) por estas otras (linealmente independientes como las primeras).

$$\frac{y_k + z_k}{2} = x^{\beta} \cos(\gamma \log x) \cdot (\log x)^k,$$

$$\frac{y_k - z_k}{2i} = x^{\beta} \operatorname{sen}(\gamma \log x) \cdot (\log x)^k, \quad (k = 0, 1, \dots, \nu - 1)$$

se obtienen 2ν integrales reales.

59 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de Euler:

$$(1) \quad y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{5}{x^2} y = 0 \quad ; \quad (2) \quad y''' + \frac{3}{x} y'' + \frac{2}{x^2} y' = 0 \quad ;$$

$$(3) \quad y'''' + \frac{6}{x} y''' + \frac{9}{x^2} y'' + \frac{3}{x^3} y' + \frac{1}{x^4} y = 0.$$

Teniendo en cuenta el ejercicio precedente, se encuentran fácilmente las siguientes integrales:

$$(1) \quad y = c_1 x \cos(2 \log x) + c_2 x \operatorname{sen}(2 \log x) \quad ;$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 \cos(\log x) + c_3 \operatorname{sen}(\log x) \quad ;$$

$$(3) \quad y = c_1 \cos(\log x) + c_2 \operatorname{sen}(\log x) + c_3 \cos(\log x) \cdot \log x + c_4 \operatorname{sen}(\log x) \cdot \log x.$$

60,- Dar para el núcleo resolvente $k(x, \xi)$ de una ecuación diferencial lineal del tipo de Euler una forma análoga a la válida en el caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Basta repetir un razonamiento totalmente similar al efectuado para las ecuaciones con coeficientes constantes (ver "Lecciones", Cap. XXIX, n° 14) realizando el cambio de variables $x = \xi t$ que transforma el punto $x = \xi$ en el punto $t = 1$. Se llega al siguiente resultado

$$k(x, \xi) = \xi^{n-1} \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) & \dots & y_n(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) & \dots & y_n'(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(1) & y_2^{(n-2)}(1) & \dots & y_n^{(n-2)}(1) \\ y_1(\frac{x}{\xi}) & y_2(\frac{x}{\xi}) & \dots & y_n(\frac{x}{\xi}) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) & \dots & y_n(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) & \dots & y_n'(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(1) & y_2^{(n-2)}(1) & \dots & y_n^{(n-2)}(1) \\ y_1^{(n-1)}(1) & y_2^{(n-1)}(1) & \dots & y_n^{(n-1)}(1) \end{vmatrix}$$

Es, por otra parte, inmediato verificar que el $k(x, \xi)$ así definido goza efectivamente de las propiedades exigidas al núcleo resolvente.

61 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de Euler:

$$(1) \quad y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = f(x) \quad ; \quad (2) \quad y''' + \frac{6}{x} y'' + \frac{7}{x^2} y' + \frac{1}{x^3} y = f(x) .$$

Teniendo en cuenta el ejercicio precedente se encuentra, respectivamente,

$$(1) \quad y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} + \frac{1}{4} \int_{x_0}^x \frac{x^4 - \xi^4}{x^2 \xi} f(\xi) d\xi ,$$

$$(2) \quad y = \frac{c_1}{x} + c_2 \frac{\log x}{x} + c_3 \frac{(\log x)^2}{x} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{\xi^3}{x} \left(\log \frac{x}{\xi}\right)^2 f(\xi) d\xi .$$

62 - ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

Las ecuaciones lineales y homogéneas para las que hemos dado un método de integración son las de coeficientes constantes y las de Euler. Para otros tipos de ecuaciones se logra algunas veces efectuar la integración transformando la ecuación dada en una de las de los dos tipos precedentes mediante un oportuno cambio de la variable o de la función incógnita. Demos algunos ejemplos.

Ejemplo 1º) Supóngase dada la ecuación

$$y'' + y' + e^{-2x} y = 0 \quad . \quad (1)$$

Asumamos como nueva variable la ξ definida por $\xi = e^{-x}$. Se tiene

$$y' = - \frac{dy}{d\xi} e^{-x} , \quad y'' = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{d\xi} e^{-2x} \right) + \frac{dy}{d\xi} e^{-x} ,$$

o sea ,

$$y' = - \xi \frac{dy}{d\xi} , \quad y'' = \xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} ,$$

con lo que la ecuación (1) se vuelve $\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} - \xi \frac{dy}{d\xi} + \xi^2 y = 0$,

vale decir, $\frac{d^2 y}{d \xi^2} + y = 0$. Esta última tiene sus coeficientes constantes y su integral general es $y = c_1 \cos \xi + c_2 \operatorname{sen} \xi$. Se llega así a que la (1) tiene la integral general

$$y = c_1 \cos (e^{-x}) + c_2 \operatorname{sen} (e^{-x})$$

Ejemplo 2º) Considerada la ecuación

$$x(x^2 + 1)^2 y'' + (x^4 - 1) y' - 4x^3 y = 0, \quad (2)$$

asúmase como nueva variable $\xi = x^2 + 1$. La (2) se transforma en la $\xi^2 \frac{d^2 y}{d \xi^2} + \xi \frac{dy}{d \xi} - y = 0$ que es del tipo de Euler y tiene la integral general $y = c_1 \xi + \frac{c_2}{\xi}$. Se llega así a que la de la (2) es

$$y = c_1 (x^2 + 1) + \frac{c_2}{1 + x^2}$$

Ejemplo 3º) Considerada la ecuación

$$x^2 y'' + 4x(1 - x) y' + 2(1 - 4x) y = 0, \quad (3)$$

cambiamos la función incógnita y , poniendo $y = \frac{z}{x^2}$. Se tiene $y' = \frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3}$, $y'' = \frac{z''}{x^2} - \frac{4z'}{x^3} + \frac{6z}{x^4}$ y entonces la (3) se transforma en la $z'' - 4z' = 0$ que es de coeficientes constantes y tiene la integral general $z = c_1 + c_2 e^{4x}$.

La de la (3) viene dada entonces por

$$y = \frac{c_1}{x^2} + c_2 \frac{e^{4x}}{x^2}$$

Ejemplo 4º) Dada la ecuación

$$y'' - 2(1 + \operatorname{tg} x) y' + (1 + 2 \operatorname{tg} x) y = 0, \quad (4)$$

poniendo $y = e^x z$ se cambia la función incógnita y se obtiene la nueva ecua —

ción $z'' - 2 \operatorname{tg} x \cdot z' = 0$ que es de fácil integración (falta la z). Se encuentra

$z = c_1 + c_2 \operatorname{tg} x$ y entonces

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \operatorname{tg} x.$$

63 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

$$(1) \quad 4x^2 (x-1)^2 y'' - 3y = 0 \quad ;$$

$$(2) \quad x^4 y'' + 2x^3 y' + a^2 y = 0 \quad ;$$

$$(3) \quad xy''' + 3y'' + xy = 0.$$

Para la (1) poniendo $y = xz$, $\xi = \log \frac{x-1}{x}$, etc, etc, se encuentra

$$(1) \quad y = c_1 \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x}} + c_2 \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Para la (2) poniendo $\xi = \frac{1}{x}$, etc, se llega a

$$(2) \quad y = c_1 \cos \frac{a}{x} + c_2 \operatorname{sen} \frac{a}{x}.$$

Para la (3) con $y = \frac{z}{x}$ etc., se encuentra

$$(3) \quad y = c_1 \frac{e^{-x}}{x} + c_2 \frac{e^{x/2}}{x} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + c_3 \frac{e^{x/2}}{x} \operatorname{sen} \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

64 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas:

$$(1) \quad x^2 y'' + 4x(1-x)y' + 2(1-4x)y = x e^x \quad ;$$

$$(2) \quad y'' - 2(1 + \operatorname{tg} x)y' + (1 + 2\operatorname{tg} x)y = 1.$$

Ya hemos resuelto (ver ej. 62) las correspondientes ecuaciones homogéneas.

Calculando ahora los respectivos núcleos resolventes se encuentra, para la (1),

$$k(x, \xi) = \begin{vmatrix} 1/\xi^2 & e^{4\xi}/\xi^2 \\ 1/x^2 & e^{4x}/x^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1/\xi^2 & e^{4\xi}/\xi^2 \\ -2/\xi^3 & 2(2\xi-1)e^{4\xi}/\xi^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \frac{\xi^2}{x^2} [e^{4(x-\xi)} - 1]$$

y para la (2)

$$k(x, \xi) = \begin{vmatrix} e^\xi & e^\xi \operatorname{tg} \xi \\ e^x & e^x \operatorname{tg} x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} e^\xi & e^\xi \operatorname{tg} \xi \\ e^\xi & e^\xi (1 + \operatorname{tg} \xi + \operatorname{tg}^2 \xi) \end{vmatrix} = e^{x-\xi} \cos^2 \xi (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \xi).$$

La (1) admite, entonces, la integral particular

$$\int_0^x \frac{1}{4} \frac{\xi^2}{x^2} [e^{4(x-\xi)} - 1] \frac{\xi e^\xi}{\xi^2} d\xi ;$$

la (2) la integral particular

$$\int_0^x e^{x-\xi} \cos^2 \xi (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \xi) d\xi$$

y, realizando los cálculos, se encuentran las siguientes soluciones generales

$$(1) \quad y = \frac{c_1}{x^2} + c_2 \frac{e^{4x}}{x^2} + \left(\frac{2}{9x^2} - \frac{1}{3x} \right) e^x$$

$$(2) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^x \operatorname{tg} x + \frac{1}{5} (1 - 2 \operatorname{tg} x)$$

65 - DISMINUCION DEL ORDEN DE UNA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL; ECUACIONES DE RICCATI.

Una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n :

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(n-k)} = 0 \quad (1)$$

forma parte de las ecuaciones del tipo $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ cuyo primer miembro es una función homogénea de $y, y', \dots, y^{(n)}$, para las que, como es sabido, puede lograrse la transformación en una ecuación de orden $n - 1$, tomando como nueva incógnita $\frac{y'}{y} = u$. Sin embargo, en el caso de la (1), esta transformación presenta en general escasa utilidad pues la ecuación de orden $n - 1$ a la que se llega no es lineal. Por ejemplo; la ecuación lineal de 2º orden

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (2)$$

queda transformada en la ecuación de 1º orden no lineal

$$u' + u^2 + p(x) u + q(x) = 0, \quad (3)$$

que pertenece a las ecuaciones del tipo

$$u' = A(x) u^2 + B(x) u + C(x) \quad (4)$$

llamadas ecuaciones de Riccati, las que en general no son integrables elementalmente. (*) Viceversa, dada cualquier ecuación de Riccati (4), poniendo

$$u = -\frac{1}{A(x)} \frac{y'}{y}, \quad (5)$$

la (4) se transforma en la $-\frac{1}{A} \left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} \right) + \frac{A'}{A^2} \frac{y'}{y} = A \frac{1}{A^2} \frac{y'^2}{y^2} - \frac{B}{A} \frac{y'}{y} + C$, o sea en la ecuación lineal del 2º orden

$$y'' - \left(\frac{A'}{A} + B \right) y' + AC y = 0. \quad (6)$$

La integral general y de la (6) depende linealmente de dos constantes arbi-

(*) Lo son en ciertos casos particulares; por ejemplo si $C(x) \equiv 0$ (en el que la (4) es una ecuación de Bernouilli) o también cuando la correspondiente ecuación lineal (6) sea de coeficientes constantes o del tipo de Euler (véase el ej. sucesivo).

trarias c_1, c_2 ; pero la u definida por la (5) queda dependiendo solamente de la relación $\frac{c_1}{c_2}$. El problema de la integración de una ecuación lineal homogénea de 2^o orden es, entonces, equivalente al de la integración de una ecuación de 1^{er} orden de Riccati.

Es de notar que, si de la ecuación de Riccati (4) se conoce una integral particular $u_0(x)$ se puede por vía elemental determinar la integral general. En efecto: si en la (4) se pone $u = u_0 + v$ (donde v es la nueva incógnita) se obtiene $u'_0 + v' = A(u_0^2 + 2u_0 v + v^2) + B(u_0 + v) + C$ o, lo que es lo mismo teniendo en cuenta que la u_0 verifica la (4), $v' = A v^2 + (2A u_0 + B) v$, que es una ecuación de Bernouilli.

Naturalmente lo mismo debe valer para una ecuación lineal homogénea de 2^o orden. Y, en efecto, si de la (2) se conoce una integral particular $y_0(x)$, poniendo $y = y_0 z$ (donde z es la nueva incógnita) se obtiene $y_0 z'' + 2 y'_0 z' + y''_0 z + p(y_0 z' + y'_0 z) + q y_0 z = 0$, o sea, recordando que y_0 verifica la (2) $y_0 z'' + (2y'_0 + p y_0) z' = 0$, que es una ecuación lineal de 1^{er} orden en la incógnita $u = z'$.

Esta última propiedad vale para toda ecuación lineal homogénea de orden n cualquiera: cuando se conoce una integral particular $y_0(x)$, se la puede transformar en una ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$. En efecto; si en la (1) se pone $y = y_0 z$ se obtiene, por la fórmula de Leibnitz sobre la derivada de un producto:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} y_0^{(n-k-i)} z^{(i)} = 0$$

o sea

$$\sum_{i=0}^n z^{(i)} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-k}{i} a_k y_0^{(n-k-i)} = 0 \quad ;$$

pero, para $i = 0$ la sumatoria interna vale cero, ya que y_0 verifica la (1) y entonces queda

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-k}{i} a_k y_0^{(n-k-i)} \right] z^{(i)} = 0 \quad ,$$

es decir, una ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$ en $u = z'$.

Daremos, en los dos ejemplos siguientes, algunas aplicaciones de las cosas ahora dichas.

66 - Integrar las siguientes ecuaciones de Riccati:

$$(1) \quad y' = e^x y^2 + y + e^{-x} \quad ; \quad (2) \quad y' = xy + \frac{1}{x} y + \frac{2}{x^3} \quad .$$

Con la posición $y = -e^{-x} \frac{z'}{z}$ la (1) se transforma en la ecuación lineal $z'' - 2z' + z = 0$ que es de coeficientes constantes y tiene por solución general a $z = c_1 e^x + c_2 x e^x$; se deduce, poniendo $\frac{c_1}{c_2} = c$ que la (1) tiene la solución

$$y = -e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x + c} \right) \quad . \quad (1)$$

Análogamente, con $y = \frac{1}{x} \frac{z'}{z}$ se transforma la (2) en una ecuación lineal del tipo de Euler, llegándose a

$$y = - \frac{2x + c}{x^2 (x + c)} \quad . \quad (2)$$

67 - Integrar las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de 2º orden:

$$(1) \quad y'' = (1 + x^2)y \quad ; \quad (2) \quad y'' = (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x) y \quad ,$$

teniendo en cuenta que la (1) tiene la integral particular $e^{\frac{x^2}{2}}$ y la (2) la integral particular $\frac{1}{\cos x}$.

Rebajando el orden de la ecuación del modo indicado en el ej. 65 se llega fácilmente al resultado que las integrales generales de (1) y (2) son, respectivamente

$$(1) \quad y = c_1 e^{x^2/2} + c_2 e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2} dt ,$$

$$(2) \quad y = \frac{c_1}{\cos x} + c_2 \left(\sin x + \frac{x}{\cos x} \right) .$$

68 - USO DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARA EL CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS.

En algunos casos resulta de gran utilidad valerse de las ecuaciones diferenciales para calcular integrales definidas. Demos dos ejemplos:

Ejemplo 1º) Se desea calcular la integral

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx \quad . \quad (1)$$

Es fácil probar que $I(\alpha)$ es función derivable de α y que su derivada puede obtenerse derivando bajo el signo de integral:

$$I'(\alpha) = -2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin 2\alpha x \, dx .$$

Transformando esta última integral con una integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \sin 2\alpha x \cdot d(e^{-x^2}) = \left[\sin 2\alpha x \cdot e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} - \\ &- 2\alpha \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx = -2\alpha I(\alpha) , \end{aligned}$$

por lo que la función $I(\alpha)$ debe verificar la ecuación diferencial $I'(\alpha) + 2\alpha I(\alpha) = 0$. Se obtiene así $I(\alpha) = c e^{-\alpha^2}$, no quedando más que determinar la constante c ; teniendo en cuenta la (1) sigue $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, de donde $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y, finalmente,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2}.$$

Ejemplo 2º) Consideremos las dos integrales

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} \alpha x}{1+x^2} dx, \quad J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx,$$

y observemos, ante todo, que, mientras la segunda es una integral de función sumable, la primera es solamente una integral impropia (definida como $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \dots$). Se llega a esto escribiendo la función a integrar en la forma

ma $\frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} - \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x(1+x^2)}$, observando que el segundo término es sumable en $[0, +\infty]$ y recordando que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx$ es una integral impropia (ver ej. 46 del Cap. XXV).

Suponiendo, por ejemplo, $\alpha > 0$ se tendrá en consecuencia

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x(1+x^2)} dx, \quad (1)$$

y es fácil ver que $I(\alpha)$ admite derivada que puede calcularse derivando bajo el signo de integral; se halla así

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = -J(\alpha). \quad (2)$$

Lo mismo vale para $J(\alpha)$ y resulta

$$J'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} \alpha x}{1+x^2} dx = -I(\alpha) \quad (3)$$

De (2) , (3) sigue que $I(\alpha)$ verifica la ecuación diferencial $I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$ por lo que debe ser $I(\alpha) = c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha}$. Para determinar las constantes c_1 , c_2 , observemos que de (1) sigue $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$, lo que requiere que $c_1 + c_2 = \frac{\pi}{2}$; además de (2) se obtiene $I'(0) =$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = - \frac{\pi}{2} \quad , \text{ de donde, } c_1 - c_2 = - \frac{\pi}{2} \quad . \text{ Se deduce } c_1 = 0 ,$$

$$c_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{y, por ende, } I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} \quad (\text{para } \alpha > 0) \quad , \quad J(\alpha) = -I'(\alpha) =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} \quad (\text{para } \alpha > 0) \quad .$$

Por último, teniendo en cuenta que $I(\alpha)$ es función impar, $J(\alpha)$ función par, se llega a las fórmulas notables

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} \alpha x}{1+x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

69 - PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON CONDICIONES EN LOS EXTREMOS DEL INTERVALO.

En "Lecciones" hemos hablado de integrales de ecuaciones individuadas por condiciones iniciales . Pero, en las aplicaciones, se presenta a menudo otro problema: el de determinar, en cierto intervalo $[a, b]$, una integral de una ecuación diferencial habiendo sido dados los valores que la función incógnita o algunas de sus derivadas deben asumir en los extremos del mismo.

Con mayor generalidad pueden darse, en los puntos a y b , los valores de algunas combinaciones lineales prefijadas (con coeficientes constantes) de la

función incógnita y de sus derivadas. Se dice, en estos casos, que se trata de un problema en los límites; en general el número de las condiciones en los límites es igual al orden n de la ecuación de modo que, escribiendo que la ecuación general de la solución dada (dependiente de n constantes arbitrarias $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$) verifica tales condiciones, se obtiene un sistema de n ecuaciones con las n incógnitas c_1, c_2, \dots, c_n que, en general, pueden suponerse suficientes para individualizar a éstas. Advertamos, sin embargo que, en estos problemas se presenta un número grande de casos de imposibilidad o de indeterminación, que tienen también gran importancia aplicativa.

Daremos aquí y en los sucesivos ejercicios varios ejemplos de tales problemas, limitándonos al caso de ecuaciones diferenciales lineales.

Ejemplo 1º) Determinar una integral de la ecuación

$$y'' - y = 2e^x \quad (1)$$

que verifique las condiciones en los extremos $y(0) = -1$, $y(1) = 0$.

La integral general de la (1) queda expresada por $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x$, y se tiene así $y(0) = c_1 + c_2$, $y(1) = c_1 e + c_2 \frac{1}{e} + e$. Las condiciones en los extremos requieren entonces que sea $c_1 + c_2 = -1$, $c_1 e + c_2 \frac{1}{e} + e = 0$; de estas dos ecuaciones se obtiene $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ por lo que el problema planteado tiene una y solamente una solución expresada por $y = (x - 1)e^x$.

Ejemplo 2º) Determinar una integral de la ecuación

$$y'' + 4y = 3 \cos x \quad (2)$$

que verifique las condiciones en los límites $y(0) = 0$, $y(\pi) = -1$.

La integral general de la (2) está dada por $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \cos x$

y se tiene entonces $y(0) = c_1 + 1$, $y(\pi) = c_1 - 1$. Debería, entonces, para la integral buscada, ser $c_1 + 1 = 0$, $c_1 - 1 = -1$.

Este sistema es incompatible y el problema planteado no tiene solución.

Ejemplo 3^o) Determinar una integral de la (2) que verifique las condiciones en los extremos $y'(0) = 2$, $y'(\pi) = 2$.

De la $y' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x - \sin x$ sigue $y'(0) = 2c_2$, $y'(\pi) = 2c_2$ por lo que debe ser $2c_2 = 2$, o sea $c_2 = 1$, quedando c_1 del todo arbitrario.

El problema tiene las ∞^1 soluciones expresadas por $y = c_1 \cos 2x + \sin 2x + \cos x$.

Ejemplo 4^o) Determinar una integral de la (2) que verifique las condiciones en los extremos $y(0) = 1$, $y'(\pi) = 2$.

Debe ser $c_1 + 1 = 1$, $2c_2 = 2$, o sea, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. El problema tiene una y solamente una solución dada por $y = \sin 2x + \cos x$.

Ejemplo 5^o) Determinar una integral de la ecuación

$$y''' + y' = -2 \cos x \quad (3)$$

que verifique las condiciones en los límites $y(0) = \alpha$, $y(2\pi) = \beta$, $y'(0) = 1$.

La integral general de la (3) es $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + x \cos x$; se deduce $y' = -c_2 \sin x + c_3 \cos x + \cos x - x \sin x$.

Las condiciones en los extremos requieren que sea $c_1 + c_2 = \alpha$, $c_1 + c_2 + 2\pi = \beta$, $c_3 + 1 = 1$.

Por lo tanto si $\beta \neq \alpha + 2\pi$ el problema no tiene solución; en cambio si $\beta = \alpha + 2\pi$, tiene infinitas soluciones en correspondencia con $c_2 = \alpha - c_1$, $c_3 = 0$, es decir, de la fórmula $y = c_1 (1 - \cos x) + (x + \alpha) \cos x$.

70 - Dada la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda^2 y = f(x) , \quad (1)$$

estudiar bajo qué condiciones ésta admite una integral periódica de período 2π .

Evidentemente una primer condición necesaria es que $f(x)$ sea periódica, con 2π como período. Supuesta verificada esta condición, una eventual integral periódica de la (1) es obviamente tal de tenerse $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$; viceversa, si existe una integral que verifique estas condiciones en los extremos se ve inmediatamente (recordando el teorema de existencia y unicidad relativo al problema de Cauchy^(*)) que tal integral es periódica, con período 2π . La cuestión ha quedado entonces reducida a buscar si, supuesta la $f(x)$ periódica, con 2π como período, existe una integral de la (1) que verifique las condiciones en los extremos

$$y(0) = y(2\pi) , \quad y'(0) = y'(2\pi) , \quad (2)$$

Comencemos suponiendo $\lambda \neq 0$; en tal caso la integral general de la (1) queda dada por

$$y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \sin \lambda (x - \xi) f(\xi) d\xi . \quad (3)$$

Imponiendo que se verifiquen las (2) se encuentra el siguiente sistema para las dos constantes c_1 , c_2 :

$$\begin{cases} c_1(1 - \cos 2\pi\lambda) - c_2 \sin 2\pi\lambda = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \sin \lambda (2\pi - \xi) f(\xi) d\xi , \\ c_1 \lambda \sin 2\pi\lambda + c_2 \lambda (1 - \cos 2\pi\lambda) = \int_0^{2\pi} \cos \lambda (2\pi - \xi) f(\xi) d\xi . \end{cases} \quad (4)$$

(*) Ver "Lecciones", Cap. XXIX, n. 3.

El determinante de los coeficientes vale $\lambda(1 - \cos 2\pi\lambda)^2 + \lambda \sin^2 2\pi\lambda = 4\lambda \sin^2 \pi\lambda$ y entonces, si λ no es entero, el problema admite una y solamente una solución que, resolviendo el sistema (4) y sustituyendo en (3), se llega a que queda expresada por la fórmula

$$y(x) = \frac{1}{2\lambda \sin \pi\lambda} \left[\int_0^x \cos \lambda(\pi - x + \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^{2\pi} \cos \lambda(\pi + x - \xi) f(\xi) d\xi \right]. \quad (5)$$

Si, en cambio, λ es un entero (no nulo), poniendo $\lambda = n$ (con $n \neq 0$) los primeros miembros de las (4) son idénticamente nulos y entonces el sistema es compatible si y sólo si son iguales a cero también los segundos miembros, vale decir si

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi = \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi = 0, \quad (6)$$

quedando, en este caso, del todo arbitrarios los valores de c_1, c_2 . Entonces, si λ es un entero no nulo ($\lambda = n$) el problema no tiene soluciones si el término independiente $f(x)$ no verifica la (6); si, en cambio, las (6) se verifican, el problema tiene ∞^2 soluciones dadas por

$$y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx + \frac{1}{n} \int_0^x \sin n(x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad (7)$$

(o sea, toda solución de la (1) es periódica, con 2π como período).

Queda ahora por estudiar el caso $\lambda = 0$. En ese caso la integral de la (1) queda dada por

$$y = c_1 + c_2 x + \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi,$$

e, imponiendo las (2) se encuentra el sistema

$$\begin{cases} c_1 = c_1 + 2\pi c_2 + \int_0^{2\pi} (2\pi - \xi) f(\xi) d\xi, \\ c_2 = c_2 + \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi \end{cases}$$

que, evidentemente, es compatible si y sólo si

$$\int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi = 0, \quad (8)$$

teniendo en tal caso las ∞^1 soluciones $c_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - \xi) f(\xi) d\xi =$
 $= [\text{por (8)}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi f(\xi) d\xi$, c_1 arbitrario. Entonces, si $\lambda = 0$,
 el problema no tiene soluciones si el término independiente $f(x)$ no verifica la
 (8); si, en cambio, la (8) se verifica, el problema tiene ∞^1 soluciones da-
 das por

$$y = c_1 + \frac{x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi f(\xi) d\xi + \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (9)$$

71 - Determinar, en el intervalo $[a, b]$ una integral de la
 ecuación $y'' = f(x)$ que verifique las condiciones en los ex-
 tremos $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

La integral general de la ecuación propuesta está dada por

$$y = c_1 + c_2 x + \int_a^x (x - \xi) f(\xi) d\xi \quad (1)$$

é, imponiendo las condiciones en los extremos se llega al sistema

$$c_1 + c_2 a = \alpha, \quad c_1 + c_2 b + \int_a^b (b - \xi) f(\xi) d\xi = \beta$$

que admite siempre una y solamente una solución. Calculándola y sustituyendo

en (1) se encuentra

$$y = \frac{b\alpha - a\beta}{b-a} + a \int_a^b \frac{b-\xi}{b-a} f(\xi) d\xi + \left[\frac{\beta - \alpha}{b-a} - \int_a^b \frac{b-\xi}{b-a} f(\xi) d\xi \right] x + \int_a^x (x-\xi) f(\xi) d\xi.$$

Observamos que, asociando oportunamente los términos fuera del signo de integral, y escribiendo $\int_a^b \dots = \int_a^x \dots + \int_x^b \dots$, la precedente expresión de la solución y puede modificarse como sigue

$$y = \alpha \frac{b-x}{b-a} + \beta \frac{x-a}{b-a} - \int_a^x \frac{(\xi-a)(b-x)}{b-a} f(\xi) d\xi - \int_x^b \frac{(x-a)(b-\xi)}{b-a} f(\xi) d\xi.$$

Por lo tanto, si se introduce la función $G(x, \xi)$ así definida:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{(\xi-a)(b-x)}{b-a} & \text{para } a \leq \xi \leq x, \\ -\frac{(x-a)(b-\xi)}{b-a} & \text{para } x \leq \xi \leq b, \end{cases}$$

se obtiene la expresión

$$y(x) = \alpha \frac{b-x}{b-a} + \beta \frac{x-a}{b-a} + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (\text{para } a \leq x \leq b) \quad (3)$$

La (3) se descompone en dos partes: la primera

$$\alpha \frac{b-x}{b-a} + \beta \frac{x-a}{b-a} \quad (4)$$

verifica las condiciones $y'' = 0$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ (ecuación homogénea, condiciones en los límites no homogénea); la segunda

$$\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (5)$$

verifica las condiciones $y'' = f(x)$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ (ecuación no homogénea, condiciones en los extremos homogénea). La función $G(x, \xi)$ definida por (2) se denomina función de Green del problema considerado.

La misma puede ser caracterizada del siguiente modo, como dejamos para el lector demostrar. La $G(x, \xi)$ como función de x (es decir para ξ fijo) es una solución de la ecuación homogénea $y'' = 0$, continua en $[a, b]$, nula para $x = a$ y para $x = b$, con de-

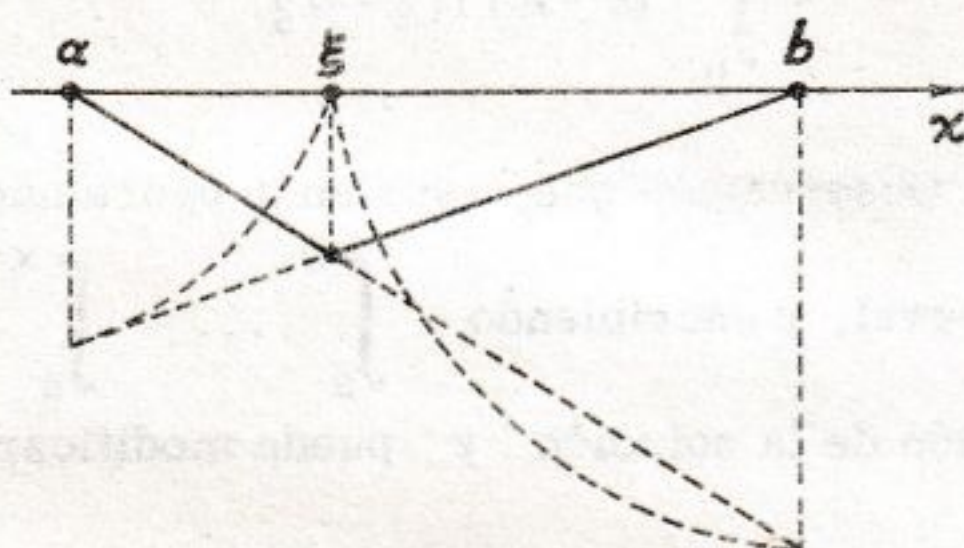


Fig. 98

rivada primera continua salvo en el punto ξ donde presenta una discontinuidad de 1ª especie con salto igual a 1 (ver fig. 98, donde se ha trazado el gráfico de la $G(x, \xi)$ y su obvia construcción geométrica).

72 - LA FUNCION DE GREEN DE UN PROBLEMA EN LOS LIMITES.

En muchos otros problemas en los límites para ecuaciones lineales no homogéneas se llega, como en el ej. precedente, a obtener para la solución una expresión del tipo (3) y definir una función de Green $G(x, \xi)$ del problema con ciertas propiedades características que varían de caso en caso; queda siempre, sin embargo, el hecho que $G(x, \xi)$, como función de x , es solución de la ecuación homogénea asociada a la dada y verifica las condiciones en los extremos de naturaleza homogénea.

Por ejemplo, si se retoma el problema del ej. 70 y se considera el caso en que el mismo tiene una y solo una solución (λ no entero), la (5) del ej. ci -

tado puede escribirse

$$y(x) = \int_0^{2\pi} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{con} \quad G(x, \xi) = \frac{\cos \lambda (\pi - |x - \xi|)}{2 \lambda \sin \pi \lambda}$$

Es fácil verificar que esta $G(x, \xi)$, como función de x , verifica la ecuación homogénea $y'' + \lambda^2 y = 0$, es continua en $[0, 2\pi]$, satisface las condiciones en los límites $G(0, \xi) = G(2\pi, \xi)$, $G_x(0, \xi) = G_x(2\pi, \xi)$; además, su derivada primera $G_x(x, \xi)$ es continua en $[0, 2\pi]$ salvo en el punto ξ donde presenta una discontinuidad de 1ª especie con salto igual a 1. Viceversa, es la única función que goza de esa propiedad.

En este ejemplo, y en el del ej. precedente, se verifica por otra parte la notable circunstancia que la función de Green es simétrica [es decir, resulta $G(x, \xi) = G(\xi, x)$]; pero este hecho no se verifica en general.

Damos otros ejemplos en los cuatro ejercicios siguientes

73 - Estudiar el siguiente problema general en los límites:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \quad ; \quad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \quad (1)$$

Llamando $y_1(x)$, $y_2(x)$ a dos integrales linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (2)$$

e introducido el núcleo resolvente

$$K(x, \xi) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix}} \quad (3)$$

la integral general de la (1) se escribe

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_a^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

e imponiendo las condiciones en los límites se encuentra para c_1, c_2 un sistema de dos ecuaciones lineales cuyo determinante de los coeficientes es

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = K(b, a) \cdot \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix}$$

Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que el problema planteado tenga una y sólo una solución es que se
a

$$K(b, a) \neq 0 \quad . \quad (4)$$

De ahora en adelante supondremos verificada la (4).

Para realizar el cálculo de la solución del modo más rápido, conviene ante todo calcular las dos integrales particulares $A(x)$, $B(x)$ de la ecuación homogénea (2) que verifican las condiciones en los límites

$$A(a) = 1, \quad A(b) = 0; \quad B(a) = 0, \quad B(b) = 1, \quad (5)$$

Se ve de inmediato que, en virtud de (4), ellas quedan unívocamente determinadas y dadas por las fórmulas

$$A(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}}; \quad B(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}}; \quad (6)$$

además queda en evidencia que $A(x)$, $B(x)$ son linealmente independientes, de modo que la integral de la (2) puede escribirse $c_1 A(x) + c_2 B(x)$.

Conviene ahora escribir la integral general de la (1) bajo la forma sugerida por el método de variación de las constantes arbitrarias, vale decir,

$$y = [c_1 + u(x)] A(x) + [c_2 + v(x)] B(x) \quad , \quad (7)$$

con $u(x)$, $v(x)$ determinadas por el sistema

$$A(x) u'(x) + B(x) v'(x) = 0 \quad , \quad A'(x) u'(x) + B'(x) v'(x) = f(x) \quad .$$

Indicando con $W(x)$ al wronskiano de $A(x)$, $B(x)$, es decir, poniendo

$$W(x) = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) \\ A'(x) & B'(x) \end{vmatrix} \quad , \quad (8)$$

se obtiene

$$u'(x) = -\frac{B(x)}{W(x)} f(x) \quad , \quad v'(x) = \frac{A(x)}{W(x)} f(x) \quad .$$

Es oportuno asumir

$$u(x) = -\int_a^x \frac{B(\xi)}{W(\xi)} f(\xi) d\xi \quad , \quad v(x) = -\int_x^b \frac{A(\xi)}{W(\xi)} f(\xi) d\xi \quad ,$$

por lo que, sustituyendo en (7) se obtiene

$$y = c_1 A(x) + c_2 B(x) - \int_a^x \frac{A(x) B(\xi)}{W(\xi)} f(\xi) d\xi - \int_x^b \frac{A(\xi) B(x)}{W(\xi)} f(\xi) d\xi \quad (9)$$

De ésta sigue, teniendo presente las (5) , $y(a) = c_1$, $y(b) = c_2$; se debe, entonces, tomar $c_1 = \alpha$, $c_2 = \beta$ y de aquí, introduciendo la función de Green

$$G(x, \xi) = \begin{cases} = -\frac{A(x) B(\xi)}{W(\xi)} & \text{para } a \leq \xi \leq x \quad , \\ = -\frac{A(\xi) B(x)}{W(\xi)} & \text{para } x \leq \xi \leq b \quad , \end{cases} \quad (10)$$

se obtiene para la solución del problema la fórmula

$$y(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad . \quad (11)$$

Como caso particular vuelven a obtenerse los resultados del ej. 71 (en que

$$A(x) = \frac{b-x}{b-a}, \quad B(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad W(x) = \frac{1}{b-a}.$$

El lector verificará que la (10), como función de x , satisface la (2), es continua en $[a, b]$, nula en los puntos a y b , y tiene la derivada primera discontinua en el punto ξ con salto $= 1$.

Sin embargo, en general, la $G(x, \xi)$ no es simétrica; condición necesaria y suficiente para que esto suceda es, obviamente, que sea $W(x) = W(\xi)$, o sea, que el wronskiano sea constante; recordando la fórmula de Liouville, tal condición es equivalente a esta otra: que en la (1) el coeficiente $p(x)$ sea idénticamente nulo (así como sucedía en el caso del ej. 71).

74 - Determinar una integral de la ecuación $y'' + \lambda^2 y = f(x)$, que verifique las condiciones en los extremos $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Es un caso particular del ej. precedente. El problema tiene una y solamente una solución si $\sin \lambda(b-a) \neq 0$, o sea, si λ no es un múltiplo de $\frac{\pi}{b-a}$. Tal solución está dada por

$$y(x) = \alpha \frac{\sin \lambda(b-x)}{\sin \lambda(b-a)} + \beta \frac{\sin \lambda(x-a)}{\sin \lambda(b-a)} + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

con la función de Green definida por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} = -\frac{\sin \lambda(\xi-a) \sin \lambda(b-x)}{\lambda \sin \lambda(b-a)}, & \text{para } a \leq \xi \leq x, \\ = -\frac{\sin \lambda(x-a) \sin \lambda(b-\xi)}{\lambda \sin \lambda(b-a)}, & \text{para } x \leq \xi \leq b. \end{cases}$$

Para el caso excluido, ver ej. 78.

75 - Estudiar el problema general en los límites

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \quad ; \quad y'(a) = \alpha \quad , \quad y'(b) = \beta \quad .$$

Sígase un procedimiento análogo al del ej. 73 .

La condición para que el problema tenga una y solamente una solución es

$$\begin{vmatrix} y_1'(a) & y_2'(a) \\ y_1'(b) & y_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

En ese caso, introducidas las dos integrales $A_1(x)$, $B_1(x)$, que verifican las condiciones en los límites $A_1'(a) = 1$; $A_1'(b) = 0$; $B_1'(a) = 0$; $B_1'(b) = 1$ se encuentra que la solución queda expresada por

$$y(x) = \alpha A_1(x) + \beta B_1(x) + \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad ,$$

habiendo puesto

$$G_1(x, \xi) \begin{cases} = - \frac{A_1(x) B_1(\xi)}{W_1(\xi)} & , \quad \text{para } a \leq \xi \leq x \quad , \\ = - \frac{A_1(\xi) B_1(x)}{W_1(\xi)} & , \quad \text{para } x \leq \xi \leq b \quad , \end{cases}$$

donde $W_1(x)$ es el wronskiano de $A_1(x)$, $B_1(x)$.

¿Cuáles son en este caso las propiedades características de la función de Green $G_1(x, \xi)$? y cuándo es simétrica?

Considérese el caso particular en el que la ecuación diferencial (1) es $y'' + \lambda^2 y = f(x)$ (véase también, para este ejemplo, el ej. 79).

76 - Determinar una integral de la ecuación $y^{(iv)} = f(x)$ que verifique las condiciones en los extremos $y(0) = \alpha_0$, $y'(0) = \alpha_1$, $y(1) = \beta_0$, $y'(1) = \beta_1$.

La integral general de la ecuación dada es

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} f(\xi) d\xi \quad (1)$$

e, imponiendo las condiciones en los extremos se obtiene el siguiente sistema con c_0 , c_1 , c_2 , c_3 como incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \alpha_0 \\ c_1 = \alpha_1 \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{6} \int_0^1 (1-\xi)^3 f(\xi) d\xi = \beta_0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \frac{1}{6} \int_0^1 (1-\xi)^2 f(\xi) d\xi = \beta_1 \end{array} \right.$$

Resolviendo y sustituyendo en (1) se obtiene:

$$y(x) = \alpha_0 (1+2x)(1-x)^2 + \alpha_1 x(1-x)^2 + \beta_0 x^2 (3-2x) - \beta_1 x^2 (1-x) + \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

donde la función de Green $G(x, \xi)$ está así definida:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} = -\frac{1}{6} \xi^2 (1-x)^2 (\xi - 3x + 2x\xi) , & \text{para } 0 \leq \xi \leq x , \\ = -\frac{1}{6} x^2 (1-\xi)^2 (x - 3\xi + 2x\xi) , & \text{para } x \leq \xi \leq 1 . \end{cases}$$

Se puede verificar que la $G(x, \xi)$, como función de x , verifica en $[0, 1]$ la ecuación homogénea $y^{(iv)} = 0$ y las condiciones en los límites homogéneas $G(0, \xi) = G_x(0, \xi) = G(1, \xi) = G_x(1, \xi) = 0$. Se trata de una función continua junto con sus derivadas primera y segunda, mientras que la derivada tercera es discontinua en el punto ξ , con salto $= 1$. Obsérvese, por último, su carácter de simétrica.

77 - PROBLEMAS EN LOS LÍMITES HOMOGÉNEOS; AUTOVALORES Y AUTOSOLUCIONES.

Un problema en los límites, del tipo considerado en los ej. 69, ..., 76, se denomina homogéneo cuando la ecuación diferencial lineal considerada es homogénea y cuando las condiciones en los límites exigen, en los extremos del intervalo, valores nulos a las combinaciones lineales que se consideren de la incógnita y de sus derivadas. Un problema como el mencionado tiene siempre, evidentemente, la solución $y \equiv 0$, y, en general, no tiene otras; en casos particulares puede, sin embargo, suceder que existan otras soluciones no idénticamente nulas, las que toman el nombre de autosoluciones.

A menudo se presenta en las aplicaciones este hecho: en la ecuación diferencial (homogénea) o en las condiciones en los límites (homogéneas) interviene un parámetro indeterminado λ . Sucede entonces, en general, que para valores genéricos de este parámetro el problema (homogéneo) tiene solamente la solución banal $y \equiv 0$; se tendrán, en cambio, autosoluciones solamente cuando asume ciertos valores particulares que se denominan autovalores del parámetro λ en el problema considerado.

Retomemos, por ejemplo, en consideración el problema del ej. 70 y supongamos que sea $f(x) \equiv 0$. Propongámonos entonces determinar una solución de la ecuación homogénea $y'' + \lambda^2 y = 0$ que verifique las condiciones en los extremos (homogéneas) $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$. De la discusión hecha en tal ejercicio resulta inmediatamente que, si λ no es un entero, la única solución es $y \equiv 0$; si λ es un entero no nulo ($\lambda = n \neq 0$) existen las ∞^2 soluciones $y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx$; si $\lambda = 0$ existen las ∞^1 soluciones $y = c_1$. Entonces el problema considerado admite los infinitos autovalores

res $\lambda = 0$, ± 1 , ± 2 , ± 3 ,; al autovalor $\lambda = 0$ le corresponden las ∞^1 autosoluciones $y = c_1$ (con $c_1 \neq 0$); a cada uno de los otros ($\lambda = n \neq 0$) le corresponden las ∞^2 autosoluciones $c_1 \cos nx + c_2 \sin nx$ (con c_1, c_2 no simultáneamente nulas).

Observemos que, en todo problema en los límites homogéneo, a cada autovalor le corresponden siempre infinitas autosoluciones porque, si $y(x)$ es una de esas, lo será también $c y(x)$ (con c constante arbitraria no nula); si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son dos autosoluciones también lo serán las infinitas funciones $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ (con c_1, c_2 constantes arbitrarias no simultáneamente nulas); etc., etc.... Teniendo esto en cuenta, se suelen mencionar, para cada autovalor, solamente las autosoluciones que son linealmente independientes entre sí. De esta manera, en el ejemplo precedente, se dirá que al autovalor $\lambda = 0$ le corresponde la única autosolución $y = 1$ (y el autovalor se considerará de rango 1); que al autovalor $\lambda = n \neq 0$ le corresponden las dos autosoluciones $\cos nx$, $\sin nx$ (y el autovalor se considerará de rango 2).

Como otro ejemplo retomemos el problema del ej. 74 suponiendo $f(x) = 0$, $\alpha = \beta = 0$. Buscaremos, entonces, una solución del problema homogéneo $y'' + \lambda^2 y = 0$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$. Si $\lambda \neq 0$ la integral general de la ecuación dada es $y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$ y las condiciones en los extremos requieren que sea

$$c_1 \cos \lambda a + c_2 \sin \lambda a = 0, \quad c_1 \cos \lambda b + c_2 \sin \lambda b = 0 \quad (1)$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\sin \lambda(b-a)$ y de aquí que, si λ no es múltiplo de $\frac{\pi}{b-a}$ el sistema (1) tendrá la única solu-

ción $c_1 = c_2 = 0$; se tiene, entonces, $y \equiv 0$ y el problema carece de auto - soluciones (cfr. ej. 74) . En cambio, si $\lambda = n \frac{\pi}{b-a}$ (con n entero no nu - lo) la segunda de las (1) es consecuencia de la primera, y entonces el sistema (1) tiene las infinitas soluciones $c_1 = -c \operatorname{sen} \frac{n \pi a}{b-a}$, $c_2 = c \cos \frac{n \pi a}{b-a}$ (con c constante arbitraria) y se obtiene $y = c \operatorname{sen} \frac{n \pi (x-a)}{b-a}$. Es así como nuestro problema tiene los infinitos autovalores $\lambda = \frac{n \pi}{b-a}$ (con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$) de rango 1 y el autovalor correspon - diente a $\lambda = \frac{n \pi}{b-a}$ es $\operatorname{sen} \frac{n \pi (x-a)}{b-a}$. Quedaría todavía por consi - derar el caso $\lambda = 0$; pero el lector verá inmediatamente que $\lambda = 0$ no es autovalor .

Notemos por último que la consideración de los autovalores y de las autosolucio - nes tiene gran importancia también en el estudio de los problemas no homogéne - os. Se habrá notado que el estudio de un problema en los límites equivale al de un cierto sistema de ecuaciones algebraicas y lineales en las constantes c_1, c_2, \dots , de la que depende la integral general de la ecuación considerada; tal e - cuación es o no homogénea según que sea o no homogéneo el problema que se es - tudia. Sabemos que, si a un sistema (S) de ecuaciones de 1^{er} grado se le aso - cia el correspondiente sistema homogéneo (S_0) , dos casos son posibles: 1) o (S_0) carece de autosoluciones y, por ende, (S) es compatible cualesquiera sean los términos independientes; 2) o (S_0) tiene autosoluciones , y entonces (S) es compatible solamente si los términos independientes verifican oportunas condiciones. Sigue obviamente que, planteado un problema en los límites (P) no homogéneo que dependa de un parámetro λ , si se considera el correspon - diente problema homogéneo (P_0) , dos casos son posibles: 1) o λ no es au - tovalor de (P_0) y entonces (P) tiene soluciones cualesquiera sean los tér -

minos independientes $f(x)$ de la ecuación diferencial y los valores en los extremos; 2) o λ es autovalor de (P_0) y entonces (P) tiene soluciones solamente si $f(x)$ y los valores en los extremos verifican ciertas condiciones.

Como ejemplo puede verse el ej. 70. Otros ejemplos los constituyen los cuatro ejercicios siguientes.

78 - Retómese el problema del ejercicio 74 y estúdiase el caso (en él excluido) en que $\lambda = \frac{n\pi}{b-a}$ con n entero no nulo

Se trata entonces de estudiar un problema no homogéneo en el caso en que λ es autovalor del correspondiente problema homogéneo.

Se tiene el sistema

$$c_1 \cos \frac{n\pi a}{b-a} + c_2 \sin \frac{n\pi a}{b-a} = \alpha$$

$$c_1 \cos \frac{n\pi b}{b-a} + c_2 \sin \frac{n\pi b}{b-a} + \frac{b-a}{n\pi} \int_a^b \sin \frac{n\pi(b-\xi)}{b-a} f(\xi) d\xi = \beta,$$

el que, teniendo en cuenta que

$$c_1 \cos \frac{n\pi b}{b-a} + c_2 \sin \frac{n\pi b}{b-a} = (-1)^n \left[c_1 \cos \frac{n\pi a}{b-a} + c_2 \sin \frac{n\pi a}{b-a} \right],$$

es compatible sólo si

$$(-1)^n \alpha + \frac{b-a}{n\pi} \int_a^b \sin \frac{n\pi(b-\xi)}{b-a} f(\xi) d\xi = \beta,$$

o sea si

$$\int_a^b \sin \frac{n\pi(\xi-a)}{b-a} f(\xi) d\xi = \frac{n\pi}{b-a} \left[\alpha - (-1)^n \beta \right].$$

Si ésta queda satisfecha, el sistema precedente tiene las infinitas soluciones

$$c_1 = \alpha \cos \frac{n\pi a}{b-a} - c \sin \frac{n\pi a}{b-a}, \quad c_2 = \alpha \sin \frac{n\pi a}{b-a} + c \cos \frac{n\pi a}{b-a}, \quad \text{con } c$$

constante arbitraria; entonces nuestro problema tiene las ∞^1 soluciones

$$y = \alpha \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + c \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \frac{b-a}{n\pi} \int_0^x \sin \frac{n\pi(x-\xi)}{b-a} f(\xi) d\xi.$$

79 - Determinar los autovalores y las autosoluciones del problema homogéneo

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0, \quad (1)$$

Obténganse además las condiciones de compatibilidad del problema no homogéneo.

$$y'' + \lambda^2 y = f(x), \quad y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta \quad (2)$$

cuando λ es uno de los autovalores antes determinados.

Se encontrará que son autovalores los números $\frac{n\pi}{b-a}$ (con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), todos de rango 1. La autosolución correspondiente a $\lambda = \frac{n\pi}{b-a}$ es $\cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a}$.

Respecto del problema (2), en el caso que sea $\lambda = \frac{n\pi}{b-a}$, se encuentra que el mismo es compatible solamente si

$$\int_a^b \cos \frac{n\pi(\xi-a)}{b-a} f(\xi) d\xi = (-1)^n \beta - \alpha,$$

teniendo en ese caso las ∞^1 soluciones

$$y = \frac{b-a}{n\pi} \alpha \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + c \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \frac{b-a}{n\pi} \int_a^x \sin \frac{n\pi(x-\xi)}{b-a} f(\xi) d\xi,$$

(si $n \neq 0$),

$$y = \alpha x + c + \int_a^x (x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad (\text{si } n = 0),$$

donde c indica una constante arbitraria.

80 - Estudiar el siguiente problema en los límites

$$y'' - 2\lambda y' + 2\lambda^2 y = f(x); \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \quad (1)$$

Supondremos $\lambda \neq 0$ ya que el caso $\lambda = 0$ ha sido ya considerado en el ej. 71.

Considerado el problema homogéneo asociado al dado se encuentra que los autovalores están dados por $\lambda = n\pi$ (con n entero no nulo); cada uno es de rango 1 y la autosolución correspondiente es $e^{n\pi x} \operatorname{sen} n\pi x$.

Por lo tanto, si $\lambda \neq n\pi$ el problema (1) tiene una y solamente una solución que queda expresada por

$$y(x) = \alpha \frac{e^{\lambda x} \operatorname{sen} \lambda(1-x)}{\operatorname{sen} \lambda} + \beta \frac{e^{-\lambda(1-x)} \operatorname{sen} \lambda x}{\operatorname{sen} \lambda} + \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

con la función de Green $G(x, \xi)$ definida como sigue

$$G(x, \xi) = \begin{cases} = -e^{\lambda(x-\xi)} \cdot \frac{\operatorname{sen} \lambda(1-x) \operatorname{sen} \lambda \xi}{\lambda \operatorname{sen} \lambda} & \text{para } 0 \leq \xi \leq x, \\ = -e^{\lambda(x-\xi)} \cdot \frac{\operatorname{sen} \lambda(1-\xi) \operatorname{sen} \lambda x}{\lambda \operatorname{sen} \lambda} & \text{para } x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

En cambio, si $\lambda = n\pi$, el problema (1) tiene soluciones solamente si queda verificada la

$$\int_0^1 e^{-n\pi \xi} \operatorname{sen} n\pi \xi f(\xi) d\xi = n\pi \left[\alpha - (-1)^n e^{-n\pi} \beta \right];$$

si esto sucede, habrá ∞^1 soluciones dadas por

$$y = a e^{n\pi x} \cos n\pi x + c e^{n\pi x} \operatorname{sen} n\pi x + \frac{1}{n\pi} \int_0^x e^{n\pi(x-\xi)} \operatorname{sen} n\pi(x-\xi) f(\xi) d\xi,$$

con c constante arbitraria

81 - Estudiar el siguiente problema homogéneo en los extremos

$$y''' - \lambda y'' + y' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

La integral general de la ecuación considerada es

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$$

e, imponiendo las condiciones en los extremos, se encuentra que debe ser

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 \lambda + c_3 = 0, \quad c_1 e^{\pi \lambda} - c_2 = 0.$$

Se deduce fácilmente que el problema tiene los autovalores complejos $\lambda = (2n + 1)i$, con n entero. Cada uno de ellos es de rango 1 con la auto-solución compleja

$$\cos (2n + 1) x - \cos x + i [\operatorname{sen} (2n + 1) x - (2n + 1) \operatorname{sen} x]$$

82 - ECUACION DIFERENCIAL DE D'ALEMBERT.

Es una ecuación diferencial del tipo

$$y = x \varphi(y') + \psi(y') \tag{1}$$

con φ y ψ funciones conocidas de solamente la variable y' . Tomando los diferenciales de los dos miembros sigue $y' dx = \varphi(y') dx + x \varphi'(y') dy' +$

$\psi'(y') dy'$, o sea

$$\frac{dx}{dy'} = x \frac{\varphi'(y')}{y' - \varphi(y')} + \frac{\psi'(y')}{y' - \varphi(y')} \tag{2}$$

que es lineal respecto de la función incógnita $x = x(y')$. Integrando la (2) se logra expresar x en función de y' , tras lo que, sustituyendo en la (1), se obtiene también y en función de y' . La integral general de la (1) queda representada entonces por dos ecuaciones paramétricas, con y' como parámetro.

En la (2) se ha supuesto $\varphi(y') \neq y'$; en el caso excepcional $\varphi(y') = y'$, la ecuación (1) se reduce a la conocida ecuación diferencial de Clairaut, ya estudiada en "Lecciones", Cap. XXIX, n° 7.

83 - Integrar la ecuación $y = 2x y' - y'^2$

Procediendo como en el ej. 82 se obtiene $y' dx = 2 y' dx + 2(x - y') dy'$, que por el momento admite la solución evidente $y' = 0 \Rightarrow y = 0$ de aquí, para la ecuación dada, $y = 0$. Se tiene, después, $\frac{dx}{dy'} = -\frac{2}{y'} x + 2$, que es lineal en $x = x(y')$. La integral general de esta ecuación se encuentra con un procedimiento conocido y es $x = \frac{2}{3} y' + \frac{c}{y'^2}$; sustituyendo en la ecuación dada se obtiene $y = \frac{1}{3} y'^2 + \frac{2c}{y'}$. Se llega así a la solución general $x = \frac{3}{2} y' + \frac{c}{y'^2}$, $y = \frac{1}{3} y'^2 + \frac{2c}{y'}$, o también, (eliminando el parámetro y') $3x^2 y^2 - 12cx^3 - 4y^3 + 18cxy - 9c^2 = 0$.

En esta ecuación está incluida (para $c = 0$) la integral $y = 0$.

84 - Integrar la ecuación diferencial $y = \frac{x}{y'} + y'^2$

Con el procedimiento del ej. 82 se encontrará la integral general $x = 2y' + c \frac{y'}{\sqrt{1-y'^2}}$, $y = 2 + \frac{c}{\sqrt{1-y'^2}} + y'^2$ y las otras dos integrales $y = 1 \pm x$.

85 - Integrar las siguientes ecuaciones de Clairaut:

$$(1) \quad y = x y' - e^{y'} \quad ; \quad (2) \quad y = x y' + \frac{1}{y'}$$

Para la (1) se obtiene la integral general $y = cx - e^c$ y la integral singular $y = x (\log x - 1)$. Para la (2) se encuentra $y = c x + \frac{1}{c}$ como general mientras que, como singular, $y^2 = 4x$.

86 - SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

La teoría desarrollada en "Lecciones", Cap. XXIX, n^{os} 10, 11, 12, 13, 14, y 15 en el caso de una ecuación diferencial lineal de orden n se extiende fácilmente a los sistemas de tales ecuaciones, supuestos de forma normal. Sabemos que no es restrictivo limitarse al caso que las ecuaciones de un tal sistema sean todas del primer orden; nos referiremos, por eso, a sistemas del tipo

$$\frac{dy_h}{dx} + \sum_{k=1}^n a_{hk}(x) y_k = f_h(x) \quad , \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (1)$$

con las n funciones incógnitas y_1, y_2, \dots, y_n de la variable x ; los coeficientes $a_{hk}(x)$ y los términos independientes $f_h(x)$ son funciones continuas en un intervalo dado I del eje x . El sistema (1) se denomina homogéneo si todos los términos independientes $f_h(x)$ son idénticamente nulos; no homogéneo en el caso contrario. A cada sistema no homogéneo (1) le asociamos el correspondiente sistema homogéneo

$$\frac{dy_h}{dx} + \sum_{k=1}^n a_{hk}(x) y_k = 0 \quad , \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad . \quad (2)$$

Una solución o una integral del sistema (1) $\overline{[o (2)]}$ está constituida por una n -pla $\left[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \right]^{(*)}$ de funciones derivables que

(*) En general escribimos simplemente (y_1, y_2, \dots, y_n) .

verifiquen todas las ecuaciones (1) \cap (2) \cap . Expondremos ahora la teoría de los sistemas (1) \cap (2) \cap sin dar las respectivas demostraciones que el lector podrá con facilidad desarrollar por sí mismo imitando las ya conocidas, relativas al caso de una sola ecuación lineal de orden n .

Sistemas homogéneos. Considerado el sistema (2), sean

$$(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}), (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}), \dots, (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}). \quad (3)$$

n integrales del mismo. Llámase **wronskiano** de tales soluciones al siguiente determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad (4)$$

donde figuran, en las sucesivas columnas, las integrales (3). Para tal wronskiano vale la fórmula de Liouville:

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)] dt} \quad (5)$$

Se dice que las n integrales (3) forman un sistema fundamental de integrales cuando su wronskiano $W(x)$ no es idénticamente nulo en el intervalo considerado I (vale decir, según la (5), cuando no se anula en ningún punto de I). Se demuestra que el ser $W(x) \neq 0$ es condición necesaria y suficiente para que las n integrales sean linealmente independientes y además que, si las n integra-

la integral general del mismo sistema (1) . Tal integral particular puede siempre ser construida con un método que extiende el del núcleo resolvente que habíamos visto en el caso de una ecuación lineal de orden n . Precisamente se tiene

$$y_1^{(0)}(x) = \int_{x_1}^x k_1^{(1)}(x, \xi) f_1(\xi) d\xi + \int_{x_2}^x k_1^{(2)}(x, \xi) f_2(\xi) d\xi + \dots + \\ + \int_{x_n}^x k_1^{(n)}(x, \xi) f_n(\xi) d\xi ,$$

$$y_2^{(0)}(x) = \int_{x_1}^x k_2^{(1)}(x, \xi) f_1(\xi) d\xi + \int_{x_2}^x k_2^{(2)}(x, \xi) f_2(\xi) d\xi + \dots + \\ + \int_{x_n}^x k_2^{(n)}(x, \xi) f_n(\xi) d\xi ,$$

.....

$$y_n^{(0)}(x) = \int_{x_1}^x k_n^{(1)}(x, \xi) f_1(\xi) d\xi + \int_{x_2}^x k_n^{(2)}(x, \xi) f_2(\xi) d\xi + \dots + \\ + \int_{x_n}^x k_n^{(n)}(x, \xi) f_n(\xi) d\xi ,$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son puntos arbitrariamente fijados en el intervalo I y se ha indicado con

$$\left[k_1^{(r)}(x, \xi) , k_2^{(r)}(x, \xi) , \dots , k_n^{(r)}(x, \xi) \right] , \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

la integral general del sistema homogéneo (2) que queda individualizada por las condiciones iniciales

$$k_h^{(r)}(\xi, \xi) \begin{cases} = 0 & \text{si } h \neq r \\ = 1 & \text{si } h = r \end{cases} .$$

Se tiene, entonces, para el sistema (1) una matriz resolvente

$$\begin{pmatrix} k_1^{(1)}(x, \xi) & k_1^{(2)}(x, \xi) & \dots & k_1^{(n)}(x, \xi) \\ k_2^{(1)}(x, \xi) & k_2^{(2)}(x, \xi) & \dots & k_2^{(n)}(x, \xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n^{(1)}(x, \xi) & k_n^{(2)}(x, \xi) & \dots & k_n^{(n)}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos $k_h^{(r)}(x, \xi)$ se pueden de inmediato calcular mediante la fórmula

$$k_h^{(r)}(x, \xi) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(\xi) & y_1^{(2)}(\xi) \dots y_1^{(n)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{r-1}^{(1)}(\xi) & y_{r-1}^{(2)}(\xi) \dots y_{r-1}^{(n)}(\xi) \\ y_h^{(1)}(x) & y_h^{(2)}(x) \dots y_h^{(n)}(x) \\ y_{r+1}^{(1)}(\xi) & y_{r+1}^{(2)}(\xi) \dots y_{r+1}^{(n)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(\xi) & y_n^{(2)}(\xi) \dots y_n^{(n)}(\xi) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(\xi) & y_1^{(2)}(\xi) \dots y_1^{(n)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_r^{(1)}(\xi) & y_r^{(2)}(\xi) \dots y_r^{(n)}(\xi) \\ y_{r+1}^{(1)}(\xi) & y_{r+1}^{(2)}(\xi) \dots y_{r+1}^{(n)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(\xi) & y_n^{(2)}(\xi) \dots y_n^{(n)}(\xi) \end{vmatrix} \quad (7)$$

Sistemas homogéneos de coeficientes constantes. Si el sistema homogéneo (2) es de coeficientes constantes, es decir, del tipo

$$\frac{dy_h}{dx} + \sum_{k=1}^n a_{hk} y_k = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

es fácil construir un sistema fundamental de n integrales.

Tratemos de satisfacer las (8) con funciones (no todas idénticamente nulas)

del tipo $y_h = c_h e^{\alpha x}$ ($h = 1, 2, \dots, n$) donde c_1, c_2, \dots, c_n y α son constantes a determinarse. Sustituyendo en (8) se obtiene

$$\alpha c_h + \sum_{k=1}^n a_{hk} c_k = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

es decir, (considerando por un instante α como conocido) un sistema de n ecuaciones lineales y homogéneas en las n incógnitas c_1, c_2, \dots, c_n

Como es necesario que c_1, c_2, \dots, c_n no sean todas nulas, debe ser igual a cero el determinante de los coeficientes de (9); escribiendo esto se obtiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \alpha & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

o sea que α debe necesariamente ser raíz de esta ecuación algebraica de grado n , que toma el nombre de ecuación característica relativa al sistema (8). Indiquemos con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ las raíces de la (10) y con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ sus respectivas multiplicidades (será $1 \leq r \leq n$, $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$). En correspondencia con cualquiera de estas raíces α_i , el determinante es nulo y la característica de la correspondiente matriz tendrá un valor menor que n , que indicaremos con $n - p_i$ (será $1 \leq p_i \leq n$); expresaremos esto diciendo que la raíz α_i tiene rango p_i . Siempre en correspondencia a la raíz considerada α_i , el sistema (9) admite entonces p_i autosoluciones linealmente independientes $(c_1^{(i,s)})$,

$c_2^{(i,s)}, \dots, c_n^{(i,s)}$, $(s = 1, 2, \dots, p_i)$ y, en consecuencia, se obtienen para el sistema (8) las siguientes p_i integrales

$$(c_1^{(i,s)} e^{a_i x}, c_2^{(i,s)} e^{a_i x}, \dots, c_n^{(i,s)} e^{a_i x}), \quad (s = 1, 2, \dots, p_i).$$

Repitiendo el cálculo para cada una de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, se obtienen en total $p_1 + p_2 + \dots + p_r$ integrales linealmente independientes del sistema (8).

Con esto no se logra, en general, determinar las n integrales necesarias pues se puede demostrar que el rango p_i de una raíz α_i no supera la multiplicidad μ_i de ésta (pudiendo muy bien ser menor) con lo que, si (para algún i) resulta $p_i < \mu_i$, será ciertamente $p_1 + p_2 + \dots + p_r < \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$.

Si todas las raíces de la (10) son simples, es obvio que este caso no puede presentarse (pues de $\mu_1 = 1$ sigue $p_1 = 1$) y entonces la cuestión queda resuelta. Lo mismo sucede cuando, más en general, $p_i = \mu_i$.

En el caso contrario quedan, en cambio, por determinar otras $\mu_i - p_i$ integrales en correspondencia con cada raíz α_i que tenga una multiplicidad μ_i mayor que el rango p_i . Digamos, sin entrar en particulares, que estas otras $\mu_i - p_i$ integrales se pueden, en cada caso, determinar con fáciles tentativas buscando soluciones del tipo

$$y_h = P_h^{(i)}(x) e^{\alpha_i x} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

donde los $P_h^{(i)}(x)$ son polinomios de grado no superior a $\mu_i - p_i$.

Si el sistema (8) es de coeficientes reales y la ecuación característica

tiene raíces complejas, el sistema fundamental de integrales a que se llega con el procedimiento precedente puede siempre sustituirse por otro formado solamente por integrales reales. Basta sustituir cada par de integrales (y_1, y_2, \dots, y_n) , $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ conjugadas entre sí, por este otro par

$$\left(\frac{y_1 + \bar{y}_1}{2}, \frac{y_2 + \bar{y}_2}{2}, \dots, \frac{y_n + \bar{y}_n}{2} \right), \left(\frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i}, \frac{y_2 - \bar{y}_2}{2i}, \dots, \frac{y_n - \bar{y}_n}{2i} \right).$$

Sistemas no homogéneos de coeficientes constantes. A lo que ya se ha dicho sobre los sistemas no homogéneos en general, queda sólo agregar que la fórmula (7) puede sustituirse con esta otra más simple

$$k_h^{(r)}(x, \xi) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(0) & y_1^{(2)}(0) & \dots & y_1^{(n)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{r-1}^{(1)}(0) & y_{r-1}^{(2)}(0) & \dots & y_{r-1}^{(n)}(0) \\ y_h^{(1)}(x-\xi) & y_h^{(2)}(x-\xi) & \dots & y_h^{(n)}(x-\xi) \\ y_{r+1}^{(1)}(0) & y_{r+1}^{(2)}(0) & \dots & y_{r+1}^{(n)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(0) & y_n^{(2)}(0) & \dots & y_n^{(n)}(0) \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(0) & y_1^{(2)}(0) & \dots & y_1^{(n)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{r-1}^{(1)}(0) & y_{r-1}^{(2)}(0) & \dots & y_{r-1}^{(n)}(0) \\ y_r^{(1)}(0) & y_r^{(2)}(0) & \dots & y_r^{(n)}(0) \\ y_{r+1}^{(1)}(0) & y_{r+1}^{(2)}(0) & \dots & y_{r+1}^{(n)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(0) & y_n^{(2)}(0) & \dots & y_n^{(n)}(0) \end{vmatrix}$$

87 - La ecuación diferencial lineal de orden n

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \quad (1)$$

es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales de 1^{er} orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} - y' = 0, \\ \frac{dy'}{dx} - y'' = 0, \\ \dots \dots \dots (2) \\ \frac{dy^{(n-2)}}{dx} - y^{(n-1)} = 0, \\ \frac{dy^{(n-1)}}{dx} + a_n(x) y + a_{n-1}(x) y' + a_{n-2}(x) y'' + \dots + a_1(x) y^{(n-1)} = f(x) \end{array} \right.$$

Hágase ver que aplicando al sistema (2) la teoría desarrollada en el ej. precedente se encuentra tal cual la relativa a la ecuación (1), ya expuesta en "Lecciones".

88 - Integrar el siguiente sistema homogéneo, de coeficientes constantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} + 3y_1 - 2y_2 = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} + 5y_1 - 4y_2 = 0. \end{array} \right.$$

Poniendo $y_1 = c_1 e^{\alpha x}$, $y_2 = c_2 e^{\alpha x}$ se encuentra

$$\left\{ \begin{array}{l} (3 + \alpha) c_1 - 2c_2 = 0 \\ 5c_1 + (-4 + \alpha) c_2 = 0 \end{array} \right., \quad \left| \begin{array}{cc} 3 + \alpha & -2 \\ 5 & -4 + \alpha \end{array} \right| = \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \quad (1)$$

La ecuación característica tiene las raíces 2 y -1. Para $\alpha = 2$ las

dos ecuaciones del sistema (1) se reducen a la única $5c_1 - 5c_2 = 0$ que puede satisfacerse con $c_1 = 2$, $c_2 = 5$; análogamente, para $\alpha = -1$ se encuentra $c_1 = c_2 = 1$. Se han así encontrado las dos integrales linealmente independientes

$$(y_1 = 2 e^{2x}, y_2 = 5 e^{2x}), \quad (y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-x})$$

y la integral general es

$$y_1 = 2 c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}, \quad y_2 = 5 c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

89 - Integrar el siguiente sistema homogéneo, de coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} - 3y_1 + 5y_2 = 0 \\ \frac{dy_2}{dx} - y_1 + y_2 = 0 \end{cases}.$$

La ecuación característica tiene las raíces $1+i$, $1-i$, que proporcionan, respectivamente, las integrales

$$\left[y_1 = 5 e^{(1+i)x}, y_2 = (2-i) e^{(1+i)x} \right], \left[y_1 = 5 e^{(1-i)x}, y_2 = (2+i) e^{(1-i)x} \right]$$

que se pueden sustituir por las siguientes

$$\begin{aligned} &\left[y_1 = 5 e^x \cos x, y_2 = e^x (2 \cos x + \operatorname{sen} x) \right], \\ &\left[y_1 = 5 e^x \operatorname{sen} x, y_2 = e^x (-\cos x + 2 \operatorname{sen} x) \right]. \end{aligned}$$

Se obtiene así la integral general

$$y_1 = 5c_1 e^x \cos x + 5c_2 e^x \operatorname{sen} x,$$

$$y_2 = c_1 e^x (2 \cos x + \operatorname{sen} x) + c_2 e^x (-\cos x + 2 \operatorname{sen} x) .$$

90 - Integrar el siguiente sistema homogéneo, de coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + y_1 + 2 y_2 = 0 \\ \frac{dy_2}{dx} - 8 y_1 - 7 y_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La ecuación característica tiene la raíz doble $\alpha = 3$ de rango 1 ; a ella le corresponde la integral

$$(y_1 = e^{3x} , \quad y_2 = -2 e^{3x}) \quad (2)$$

Busquemos otra poniendo $y_1 = A x e^{3x}$, $y_2 = (Bx + C) e^{3x}$, con A , B , C constantes por determinarse. (*) Se encuentra que la primera de las (1) queda satisfecha si $4A + 2B = 0$; la segunda si $-8A - 4B = 0$, $B - 4C = 0$. Se deduce $A = -2C$, $B = 4C$ y, entonces, una segunda integral dada por

$$\left[y_1 = -2 x e^{3x} , \quad y_2 = (4x + 1) e^{3x} \right] .$$

La integral general es

$$y_1 = (c_1 - 2 c_2 x) e^{3x} , \quad y_2 = (-2 c_1 + c_2 + 4 c_2 x) e^{3x} .$$

91 - Integrar el siguiente sistema homogéneo, de coeficientes constantes

(*) En y_1 ya hemos puesto igual a cero el término independiente del polinomio de 1^{er} grado que multiplica e^{3x} pues eso siempre se puede obtener combinando linealmente la integral que estamos buscando con la ya conocida (2)

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + y_2 - 2y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} + 3y_1 - 4y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dx} - 6y_1 + 4y_2 = 0. \end{cases}$$

La ecuación característica tiene las raíces $0, i, -i$ y se encuentra fácilmente la integral general

$$\begin{cases} y_1 = 4c_1 + c_2(2\cos x + \operatorname{sen} x) + c_3(-\cos x + 2\operatorname{sen} x), \\ y_2 = 6c_1 + c_2(3\cos x + 2\operatorname{sen} x) + c_3(-2\cos x + 3\operatorname{sen} x), \\ y_3 = 3c_1 + 2c_2\cos x + 2c_3\operatorname{sen} x. \end{cases}$$

92 - Integrar el siguiente sistema homogéneo, de coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} - 5y_1 + 6y_2 - 14y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} + 2y_1 - 9y_2 + 14y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dx} + y_1 - 3y_2 + 4y_3 = 0. \end{cases}$$

La ecuación característica tiene las raíces $\alpha = 3$ (doble y de rango 2) y $\alpha = 4$ (simple). A la primera le corresponden las dos integrales linealmente independientes

$$(y_1 = 3e^{3x}, y_2 = e^{3x}, y_3 = 0), \quad (y_1 = 7e^{3x}, y_2 = 0, y_3 = -e^{3x});$$

a la segunda la integral

$$(y_1 = 2e^{4x}, y_2 = -2e^{4x}, y_3 = -e^{4x}).$$

La integral es, entonces,

$$y_1 = (3c_1 + 7c_2) e^{3x} + 2c_3 e^{4x}, \quad y_2 = c_1 e^{3x} - 2c_3 e^{4x}, \quad y_3 = -c_2 e^{3x} - c_3 e^{4x}.$$

93 - Integrar el siguiente sistema homogéneo, de coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} - 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} - 21y_1 + 13y_2 + 15y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dx} + 7y_1 - 4y_2 - 4y_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

La ecuación característica tiene la raíz $\alpha = -1$, triple y de rango 2. En correspondencia con ella se encuentran, en un primer momento, las dos integrales

$$(y_1 = 4e^{-x}, y_2 = 7e^{-x}, y_3 = 0), \quad (y_1 = 5e^{-x}, y_2 = 0, y_3 = 7e^{-x}). \quad (2)$$

Busquemos una tercera bajo la forma $y_1 = A x e^{-x}$, $y_2 = B x e^{-x}$, $y_3 = (C x + D) e^{-x}$ con A, B, C, D constantes por determinarse (*). Se encuentra que éstas deben verificar las siguientes condiciones

$$-7A + 4B + 5C = 0, \quad -21A + 12B + 15C = 0, \quad 7A - 4B - 5C = 0,$$

$$A + 5D = 0, \quad B + 15D = 0, \quad C - 5D = 0;$$

de las tres últimas se obtiene $A = -5D$, $B = -15D$, $C = 5D$ y se ve in

(*) Ya hemos puesto iguales a cero los términos independientes de los dos polinomios de 1^{er} grado que figuran en y_1, y_2 puesto que esto puede siempre lograrse combinando la integral que estamos buscando con las dos integrales ya conocidas (2).

mediatamente que con las mismas se verifican también las primeras tres. Asumiendo $D = 1$ se tiene entonces la tercer integral

$$y_1 = -5x e^{-x}, \quad y_2 = -15x e^{-x}, \quad y_3 = (5x + 1) e^{-x}.$$

La integral general es

$$y_1 = (4c_1 + 5c_2 - 5c_3 x) e^{-x}, \quad y_2 = (7c_1 - 15c_3 x) e^{-x}, \quad y_3 = (7c_2 + c_3 + 5c_3 x) e^{-x}$$

94 - Integrar el siguiente sistema homogéneo, de coeficientes constantes

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + 3y_1 - 5y_2 - y_3 = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} - 2y_1 + 8y_2 + 5y_3 = 0, \\ \frac{dy_3}{dx} + 18y_1 - 43y_2 - 20y_3 = 0, \end{cases}$$

La ecuación característica tiene la raíz $\alpha = 3$, triple y de rango 1.

Por el momento se tiene así la integral

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = 2e^{3x}, \quad y_3 = -4e^{3x}$$

debiéndose determinar otras dos. Se buscará la primera bajo la forma

$$y_1 = Ax e^{3x}, \quad y_2 = (Bx + C) e^{3x}, \quad y_3 = (Dx + E) e^{3x}$$

encontrándose

$$y_1 = 2x e^{3x}, \quad y_2 = (4x + 1) e^{3x}, \quad y_3 = (-8x - 3) e^{3x};$$

se buscará otra poniendo $y_1 = Ax^2 e^{3x}$, $y_2 = (Bx^2 + Cx + D) e^{3x}$, $y_3 = (Lx^2 + Mx + N) e^{3x}$ y se encontrará

$$y_1 = 14x^2 e^{3x}, \quad y_2 = (28x^2 + 14x + 1) e^{3x}, \quad y_3 = (-56x^2 - 42x - 5) e^{3x}.$$

La integral general es, entonces,

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + 2c_2 x + 14c_3 x^2) e^{3x}, \\ y_2 &= [2c_1 + c_2 + c_3 + (4c_2 + 14c_3)x + 28c_3 x^2] e^{3x}, \\ y_3 &= [-4c_1 - 3c_2 - 5c_3 - (8c_2 + 42c_3)x - 56c_3 x^2] e^{3x}. \end{aligned}$$

95 - Integrar el siguiente sistema no homogéneo

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + 3y_1 - 2y_2 = f_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} + 5y_1 - 4y_2 = f_2(x) \end{cases}$$

El sistema homogéneo correspondiente ya ha sido resuelto en el ej. 88, habiéndose encontrado para el mismo el sistema fundamental de integrales $(2e^{2x}, 5e^{2x})$, (e^{-x}, e^{-x}) . La matriz resolvente

$$\begin{pmatrix} k_1^{(1)}(x, \xi) & k_1^{(2)}(x, \xi) \\ k_2^{(1)}(x, \xi) & k_2^{(2)}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

queda entonces dada por la fórmula (ver ej. 86):

$$k_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 2e^{2(x-\xi)} & e^{-(x-\xi)} \\ 5 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; k_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2e^{2(x-\xi)} & e^{-(x-\xi)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix};$$

$$k_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 5e^{2(x-\xi)} & e^{-(x-\xi)} \\ 5 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; k_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5e^{2(x-\xi)} & e^{-(x-\xi)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix};$$

y entonces la solución general del sistema (1) está dada por

$$y_1 = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3} \int_0^x [2e^{2(x-\xi)} - 5e^{-(x-\xi)}] f_1(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{1}{3} \int_0^x [-2e^{2(x-\xi)} + 2e^{-(x-\xi)}] f_2(\xi) d\xi,$$

$$y_2 = 5c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{3} \int_0^x \left[5e^{2(x-\xi)} - 5e^{-(x-\xi)} \right] f_1(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{3} \int_0^x \left[-5e^{2(x-\xi)} + 2e^{-(x-\xi)} \right] f_2(\xi) d\xi .$$

96 - INTEGRACION POR SERIE DE LAS ECUACIONES DIFE -
RENCIALES (ver "Lecciones", Cap. XXIX, n° 16).

Determinar la integral de la ecuación diferencial de 1^{er} orden

$$y' = x(x+2)y^3 + (x+3)y^2 \quad (1)$$

que verifica la condición inicial $y(-1) = 2$.

Derivando sucesivamente la (1) , y poniendo $x = -1$, se encuentra $y'(-1)=0$, $y''(-1)=4$, $y'''(-1)=0$, $y^{iv}(-1)=48$, $y^v(-1)=0$, $y^{vi}(-1)=1440, \dots$

Se puede entonces escribir el desarrollo de Taylor

$$y = 2 + 2(x+1)^2 + 2(x+1)^4 + 2(x+1)^6 + \dots$$

Admitiendo que ya se ha encontrado la ley de formación de los coeficientes, nos vemos impulsados a suponer que la solución buscada esté dada (para $|x+1| < 1$, o sea para $-2 < x < 0$) por

$$y = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (x+1)^{2k} = 2 \frac{1}{1-(x+1)^2} = -\frac{2}{x(x+2)} ,$$

y se verifica que, precisamente, ésta es la integral pedida.

97 - Determinar la integral de la ecuación diferencial de 2^o orden

$$y'' = \alpha y^2 + \beta x \quad (\alpha, \beta \text{ constantes no nulas}) , \quad (1)$$

que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

De la ecuación (1) y de las que de ella se obtienen mediante derivaciones sucesivas, es fácil obtener

$$y''(0)=0, \quad y'''(0)=\beta, \quad y^{(4)}(0)=y^{(5)}(0)=y^{(6)}(0)=y^{(7)}(0)=0, \quad y^{(8)}(0)=20 \alpha \beta^2;$$

prosiguiendo el cálculo, resultan nulas (en el punto $x=0$) las derivadas de orden 9, 10, 11, 12, mientras resulta $y^{(13)}(0)=6600 \alpha^2 \beta^3$, etc., etc.,

Se puede escribir, entonces,

$$y = \frac{1}{6} \beta x^3 + \frac{1}{2016} \alpha \beta^2 x^8 + \frac{1}{943488} \alpha^2 \beta^3 x^{13} + \dots \quad (2)$$

y resulta factible suponer que y esté representada como producto de $\frac{1}{6} \beta x^3$ por una serie de potencias de la variable $\frac{1}{6} \alpha \beta x^5$. Esto sugiere transformar la (1) poniendo $y = \frac{1}{6} \beta x^3 u$ y, sucesivamente, $\frac{1}{6} \alpha \beta x^5 = t$; se llega, de tal modo, a la ecuación (independiente de α, β):

$$25 t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 50 t \frac{du}{dt} + 6 u = t u^2 + 6, \quad (3)$$

que debería tener una solución del tipo $u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. En efecto; sustituyendo esta expresión en (3) y teniendo en cuenta que (por el teorema sobre el pro-

ducto de series según Cauchy) se tiene $u^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^k c_r c_{k-r} \right) t^k$, se llega

a

$$25 \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k t^k + 50 \sum_{k=0}^{\infty} k c_k t^k + 6 \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^k c_r c_{k-r} \right) t^{k+1} + 6.$$

Reuniendo en una sola las tres sumatorias del primer miembro, y cambiando $k+1$ en k en la del segundo, puede escribirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} (5k+2)(5k+3) c_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{k-1} c_r c_{k-r-1} \right) t^k + 6 ;$$

e, igualando los coeficientes de las sucesivas potencias de t en los dos miembros:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6c_0 = 6 , \\ (5k+2)(5k+3) c_k = \sum_{r=0}^{k-1} c_r c_{k-r-1} , \quad (k = 1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (4)$$

Las (4) permiten el cálculo por recurrencia de todos los coeficientes c_k y se encuentra

$$c_0 = 1 ; \quad 7 \cdot 8 c_1 = c_0^2 , \quad \text{de donde,} \quad c_1 = \frac{1}{56} ;$$

$$12 \cdot 13 c_2 = 2 c_0 c_1 , \quad \text{de donde,} \quad c_2 = \frac{1}{4368} ; \dots$$

Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6} \beta x^3 \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{6} \alpha \beta x^5 \right)^k = \\ &= \frac{1}{6} \beta x^3 \left\{ 1 + \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{6} \alpha \beta x + \frac{1}{4368} \cdot \left(\frac{1}{6} \alpha \beta x^5 \right)^2 + \dots \right\} , \end{aligned}$$

fórmula que coincide con la (2) . Se puede demostrar que la serie obtenida tiene radio de convergencia infinito.

El método, ahora usado, de poner en la ecuación dada la función incógnita igual a una serie de potencias con coeficientes indeterminados, y deducir sucesivamente relaciones recurrentes, útiles para individualizar tales coeficientes, puede sustituir por completo el del cálculo de las derivadas sucesivas de la solución en el punto inicial y es muy usado en la práctica, especialmente en el caso de las ecuaciones lineales (véanse los cinco ejercicios sucesivos).

98 - Integrar por serie la siguiente ecuación diferencial lineal de 2º orden

$$x y'' + y' - y = 0 \quad (1)$$

Averiguemos si existe una integral de la forma $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Sustituyendo en (1) se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

de donde, reuniendo en una única sumatoria las primeras dos, y cambiando k en $k-1$ en la tercera:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^{k-1} = 0$$

Debe entonces ser $k^2 c_k = c_{k-1}$, ($k = 1, 2, \dots$); se obtiene, entonces,

$$c_1 = \frac{c_0}{1^2}, \quad c_2 = \frac{c_1}{2^2} = \frac{c_0}{(1 \cdot 2)^2}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3^2} = \frac{c_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2}, \quad \dots$$

y, en general, $c_k = \frac{c_0}{(k!)^2}$.

Asumiendo $c_0 = 1$ se obtiene la integral

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^2}$$

y es evidente que la serie aquí escrita converge cualquiera sea x .

Se puede después determinar otra integral de la (1) con el método descrito en el ej. 65. Una vez observado que para $x \geq 0$ es $y_1(x) \neq 0$, se pondrá en la (1) $y = y_1 z$, etc., etc., y se encontrará la siguiente integral

$$y_2(x) = y_1(x) \int_0^x \frac{dt}{t y_1^2(t)}, \quad (\text{para } x > 0)$$

99 - Integrar por serie la siguiente ecuación diferencial lineal de 2º orden

$$y'' + xy = 0 \quad (1)$$

Poniendo en (1) $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ se obtiene $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} +$
 $+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0$, o también

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3} x^{k-2} = 0 ,$$

y se deduce,

$$c_2 = 0 ; \quad k(k-1) c_k = -c_{k-3} , \quad (k = 3, 4, 5, \dots)$$

Se ve que los dos primeros coeficientes c_0, c_1 resultan del todo arbitrarios y que son $c_2 = c_5 = c_8 = c_{11} = \dots = 0$.

Eligiendo $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ se obtiene

$$c_4 = c_7 = c_{10} = \dots = 0 ,$$

$$c_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} , \quad c_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} , \quad c_9 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} ,$$

y de aquí la integral

$$y_1 = 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \quad (2)$$

Asumiendo $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ se deduce

$$c_3 = c_6 = c_9 = \dots = 0 ,$$

$$c_4 = -\frac{1}{3 \cdot 4} , \quad c_7 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} , \quad c_{10} = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} , \quad \dots ,$$

y, en consecuencia, la integral

$$y_2 = x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \quad (3)$$

Se ve inmediatamente que las series de potencias (2) , (3) tienen radio de convergencia infinito y proporcionan dos integrales linealmente independientes de la (1) .

100 - Integrar por serie la siguiente ecuación diferencial lineal (ecuación hipergeométrica) :

$$x(x-1)y'' + [(a+b+1)x - c]y' + aby = 0 \quad (a, b, c \text{ constantes}). \quad (1)$$

Poniendo $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ se tiene $y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$,
 $y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)k a_{k+1} x^{k-1}$. Sustituyendo en (1) y u-

sando en cada término la expresión de y' o y'' que permite intervenga siempre x^k , se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)k a_{k+1} x^k + (a+b+1) \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k -$$

$$-c \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + ab \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \quad ,$$

vale decir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(a+k)(b+k) a_k - (k+1)(c+k) a_{k+1} \right] x^k = 0 \quad .$$

Los coeficientes incógnitas a_k deben entonces ser tales de cumplir

$$(k+1)(c+k) a_{k+1} = (a+k)(b+k) a_k \quad , \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Admitiendo que c sea distinto de $0, -1, -2, -3, \dots$ de las (2) es posible obtener todos los coeficientes a_k apenas sea fijado el valor de a_0 ; se encuentra, sucesivamente.

$$a_1 = \frac{ab}{1 \cdot c} a_0, \quad a_2 = \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} a_1 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} a_0, \dots$$

y, en general

$$a_k = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1) \cdot b(b+1)(b+2)\dots(b+k-1)}{k! c(c+1)(c+2)\dots(c+k-1)} a_0.$$

Los coeficientes quedan todos determinados salvo un factor común de proporcionalidad a_0 ; asumiendo $a_0 = 1$ se obtiene la siguiente integral de la (1):

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1) \cdot b(b+1)(b+2)\dots(b+k-1)}{k! c(c+1)(c+2)\dots(c+k-1)} x^k, \quad (3)$$

que también puede escribirse

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{a+k-1}{k} \binom{b+k-1}{k}}{\binom{c+k-1}{k}} x^k. \quad (3')$$

De inmediato se verifica que la serie de potencias (3) o (3') tiene radio de convergencia 1 (cfr. Capítulo V, ej. 38); la misma se denomina serie hipergeométrica y define, para $|x| < 1$, la denominada función hipergeométrica que se puede indicar con el símbolo $F(a, b, c, x)$. Téngase presente que esta función tiene sentido solamente si c no es un entero negativo o nulo.

Se ha así encontrado que, si c no es un entero negativo o nulo, la ecuación (1) tiene, entre sus integrales, en el intervalo $(-1, 1)$, la función hipergeométrica $F(a, b, c, x)$.

Para obtener otra integral, transformamos la (1) poniendo $y = x^{1-c} z$. Un fácil cálculo muestra que se obtiene

$$x(x-1)z'' + \left[(a+b-2c+3)x - (2-c) \right] z' + (a-c+1)(b-c+1)z = 0 \quad (4)$$

Esta ecuación es del mismo tipo de la (1) y proviene de ésta sustituyendo a , b , c por $a-c+1$, $b-c+1$, $2-c$, respectivamente.

Por lo tanto, si $2-c \neq 0, -1, -2, \dots$ o sea $c \neq 2, 3, 4, \dots$ la (4) admite la integral $z = F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$ y, en consecuencia, se obtiene para la (1) la integral

$$y_2 = x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \quad (5)$$

Esta solución es distinta de la y_1 ya encontrada si $c \neq 1$; entonces se puede concluir diciendo que: si c no es un número entero (positivo, negativo o nulo), la integral general de la (1), en el intervalo $(-1, 1)$ queda dada por

$$y = c_1 F(a, b, c, x) + c_2 x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

Otros (y más profundos) estudios se requieren para la determinación de las soluciones fuera del citado intervalo y en el caso que c sea entero; pero de esto no nos ocuparemos.

101 - Integrar por serie la siguiente ecuación diferencial lineal (ecuación de Bessel).

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (\nu \text{ constante}) \quad (1)$$

Si en la (1) se pone $y = x^\nu z$ se obtiene la nueva ecuación

$$xz'' + (2\nu + 1)z' + xz = 0 \quad (2)$$

El hecho de que la (2) no se altere cuando se cambia x en $-x$, nos induce a buscar una solución que sea función de x^2 , bajo la forma $z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$.

Sustituyendo en (2) se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1) a_k x^{2k-1} + (2\nu+1) \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^{2k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1} = 0$$

y, en consecuencia, tras haber cambiado k en $k-1$ en la última sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [4k(\nu+k) a_k + a_{k-1}] x^{2k-1} = 0.$$

Debe entonces ser

$$4k(\nu+k) a_k + a_{k-1} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

y es evidente que, si ν no es un entero negativo, es posible obtener de (3), en forma sucesiva, todos los coeficientes a_k cuando se haya fijado $a_0 \neq 0$. Eligiendo $a_0 = 1$ se obtiene

$$a_1 = -\frac{1}{2^2(\nu+1)}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)},$$

$$a_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^6(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}, \quad \dots$$

y en general

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}.$$

Queda así determinada la siguiente integral de la (2)

$$z_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}$$

y, por ende, la siguiente de la ecuación (1):

$$y_1 = x^\nu \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \right\} \quad (4)$$

El lector verá fácilmente que la serie ahora escrita converge para todo x ; hemos así obtenido efectivamente, a través de la (4), una primer solución de

la (1) [bajo la hipótesis que ν no sea un entero negativo]. Otra solución puede hallarse de inmediato tras observar que la (1) no cambia si se pone $-\nu$ en lugar de ν ; entonces, suponiendo que ν no sea un entero positivo, la (1) admite también la integral

$$y_2 = x^{-\nu} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!(-\nu+1)(-\nu+2)\dots(-\nu+k)} \right\} \quad (5)$$

Es obvio que (5) coincide con (4) si $\nu = 0$; es también evidente que, en el caso opuesto, y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Podemos, entonces, enunciar este primer resultado:

I - Si ν no es un entero (positivo, negativo o nulo), la ecuación de Bessel (1) admite en $[-\infty, \infty]$ la integral general $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ con y_1, y_2 definidos por (4) y (5).

Comúnmente en vez de considerar las integrales y_1, y_2 se toman las que se obtienen a partir de las mismas, multiplicándolas por los factores constantes $\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$ $\frac{2^{\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}$ respectivamente, donde Γ es el símbolo de la función euleriana de 2ª especie (ver Cap. XXV, ej. 40)^(*). Teniendo en cuenta las propiedades de esta función, se ve inmediatamente que el producto

$\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} y_1$ puede escribirse del siguiente modo

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (6)$$

mientras que el producto $\frac{2^{\nu}}{\Gamma(-\nu+1)} y_2$ no es sino $J_{-\nu}(x)$. La función (6)

 (*) En el ej. citado se ha definido la $\Gamma(s)$ sólo para $s > 0$, habiéndose encontrado $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Es obvio, sin embargo, que por medio de esta fórmula repetidamente aplicada, se puede extender la definición de $\Gamma(s)$ a todos los valores de s distintos de $0, -1, -2, -3, \dots$ (donde la Γ resulta infinita).

se llama función de Bessel de orden ν y el enunciado I puede ser sustituido por el siguiente:

I' - Si ν no es un entero (positivo, negativo o nulo) la ecuación (1) tiene, como integrales linealmente independientes, las funciones de Bessel $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$.

Examinemos ahora el caso en que ν es un entero n , que podemos suponer positivo o nulo. Se ve inmediatamente que la función de Bessel (6) mantiene su significado y resulta

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!};$$

ésta representa todavía una integral de la (1), escrita con $\nu = n$.

En cambio, para $\nu = n$, la otra integral $J_{-\nu}(x)$ pierde significado pues $\Gamma(-n+k+1)$ resulta infinita para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; pero, como $\Gamma(-n+k+1)$ figura en el denominador, puede decirse que los términos de la serie correspondientes a $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ son nulos, y escribir

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k! \Gamma(-n+k+1)},$$

y cambiando k en $k+n$:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{(k+n)! \Gamma(k+1)} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Se tiene, entonces,

II - Si ν es un entero n (positivo, negativo o nulo), la ecuación (1) tiene, como en el caso general, las integrales

$J_n(x)$, $J_{-n}(x)$; pero éstas no son ya linealmente independientes.

En este caso son necesarios otros análisis para llegar a una segunda integral; ésta consiste en las denominadas funciones de Neumann de orden n , sobre las que no podemos detenernos aquí.

102 - Integrar por serie la siguiente ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0 \quad (\nu \text{ constante}) \quad (1)$$

Se puede proceder de modo análogo a lo realizado en el ej. precedente, cambiando x en ix .

Por lo tanto la (1) tiene las soluciones $J_\nu(ix)$, $J_{-\nu}(ix)$ linealmente independientes si ν no es entero.

En lugar de $J_\nu(ix)$ es habitual considerar $\frac{1}{i^\nu} J_\nu(ix)$ que se indica con $I_\nu(x)$ y se llama función de Bessel de argumento imaginario, de orden n . De la (6) del ej. precedente sigue

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

y si ν es un entero $n \geq 0$:

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!}$$

Obsérvese que la integral $y_1(x)$ del ej. 98 no es sino $I_0(2\sqrt{x})$.

103 - DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD RELATIVO AL PROBLEMA DE CAUCHY PARA UNA ECUACION DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN DE FORMA NORMAL.

Demos aquí los teoremas enunciados en "Lecciones", Cap. XXIX, n° 5, li -

mitándonos a considerar el caso de una ecuación

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

que deba integrarse con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Se trata de demostrar que, si $f(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas en el rectángulo R definido por $|x - x_0| \leq \alpha$, $|y - y_0| \leq \beta$ llamando M al máximo de $|f(x, y)|$ en R y h al menor de los dos números α , $\frac{\beta}{M}$, podrá definirse en el intervalo $I \equiv [x_0 - h, x_0 + h]$ una y solamente una función $y(x)$ que verifique las (1), (2).

Comencemos probando el teorema de unicidad. Admitamos que en I existan dos soluciones $y(x)$, $z(x)$ de nuestro problema (1), (2) y hagamos ver que necesariamente resultan $y(x) \equiv z(x)$.

Nos limitaremos a probar esta coincidencia en la parte $I' \equiv [x_0, x_0 + h]$ de I ; un razonamiento totalmente análogo podrá repetirse para la otra parte $[x_0 - h, x_0]$. Teniendo en cuenta que $y(x_0) - z(x_0) = y_0 - y_0 = 0$ puede escribirse, para todo x de I' :

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^x [y'(t) - z'(t)] dt = \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt,$$

y entonces, llamando N al máximo de $|f_y(x, y)|$ en R (*):

(*) En los razonamientos que siguen este número N será repetidamente usado para mayorar el módulo de expresiones del tipo de $f(x, y_1) - f(x, y_2)$.

Una expresión como la citada es igual, por el teor. de Lagrange, a $(y_1 - y_2) f_y(x, \eta)$, con η comprendido entre y_1 e y_2 , por lo que se tiene

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|.$$

Con referencia a lo expuesto véase también el ej. 105.

$$|y(x) - z(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \leq N \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt \quad (3)$$

Habiendo dicho esto, mantengamos x en el intervalo J que es el lugar de los puntos de I' para los que es $x - x_0 \leq \frac{1}{2N}$ y designemos con μ al máximo de $|y(x) - z(x)|$ en J . De la (3) sigue, así,

$$|y(x) - z(x)| \leq N \mu (x - x_0) \leq N \mu \frac{1}{2N} = \frac{\mu}{2},$$

de donde sigue $\mu \leq \frac{\mu}{2}$, desigualdad que sólo puede ser cierta si $\mu = 0$.

Esto significa que $y(x)$ y $z(x)$ son idénticas en el intervalo J . Si éste coincide con I' (o sea si $\frac{1}{2N} \geq h$) se tendrá $y(x) \equiv z(x)$ en I' . Si, en cambio, $\frac{1}{2N} < h$ se repetirá el razonamiento en el intervalo J_1 que es lugar de los puntos de I' para los que se tiene $\frac{1}{2N} \leq x - x_0 \leq \frac{2}{2N}$, y así sucesivamente. Es evidente que tras un número finito de veces se terminará por concluir que $y(x) \equiv z(x)$ en todo I' .

Pasemos ahora a tratar el teorema de existencia usando el método de Cauchy-Lipschitz el que, como es sabido, consiste en aproximar el valor de la función $y(x)$, en cada punto x que se haya fijado en I , con el siguiente método (la exposición del cual será limitada a los puntos x de I').

Suponiendo $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = x$ calcúlense sucesivamente los valores

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) (x_1 - x_0), \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) (x_2 - x_1), \quad (4)$$

$$\dots, \quad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) (x_n - x_{n-1}),$$

considerándose a y_n como un valor aproximado de $y(x)$. Llamando δ a la mayor de las amplitudes de los intervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, \dots

$\dots, [x_{n-1}, x_n]$ se trata de hacer ver que existe finito el $\lim_{\delta \rightarrow 0} y_n$ y que este límite es precisamente igual al valor, en el punto x , de la solución buscada $y(x)$. Notemos que, de la (4) sigue obviamente

$$y_n = y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} (x_{r+1} - x_r) f(x_r, y_r) ;$$

de ahora en adelante para indicar esta suma usaremos el símbolo $S_\delta(x)$, es decir, pondremos

$$S_\delta(x) = y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} f(x_r, y_r) (x_{r+1} - x_r) . \quad (5)$$

Dividiremos la demostración en cuatro partes.

1ª parte : Hagamos ver, ante todo, que las (4) tienen sentido, vale decir que en los sucesivos puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , \dots , (x_{n-1}, y_{n-1}) y también (x_n, y_n) es posible, efectivamente calcular la función $f(x, y)$ ya que siempre se trata de puntos del rectángulo R . Los puntos $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ pertenecen al intervalo $I' \equiv [x_0, x_0 + h]$ y entonces también a $[x_0, x_0 + \alpha]$; queda así por hacer ver que $|y_k - y_0| \leq \beta$, ($k = 1, 2, \dots, n$). En efecto, de las (4) sigue $y_k - y_0 = \sum_{r=0}^{k-1} (x_{r+1} - x_r) f(x_r, y_r)$

y entonces $|y_k - y_0| \leq M \sum_{r=0}^{k-1} (x_{r+1} - x_r) = M(x_k - x_0) \leq Mh \leq M \frac{\beta}{M} = \beta$.

2ª parte: De la sucesión x_0, x_1, \dots, x_n recién mencionada fijamos dos puntos sucesivos cualesquiera x_r, x_{r+1} y consideremos las ordenadas correspondientes y_r, y_{r+1} . Supongamos ahora usar cualquier otra sucesión de puntos, con la única restricción que entre los mismos figuren todavía los dos puntos x_r, x_{r+1} aunque no necesariamente consecutivos; a tales puntos le corresponderán dos ordenadas \bar{y}_r, \bar{y}_{r+1} distintas, en general, de las precedentes.

Queremos demostrar que, fijado arbitrariamente $\epsilon > 0$, es posible determinar $\sigma = \sigma(\epsilon) > 0$ tal que, suponiendo $x_{r+1} - x_r < \sigma$ resulte

$$\left| \bar{y}_{r+1} - y_{r+1} \right| + \frac{2\epsilon}{N} < \left[\left| \bar{y}_r - y_r \right| + 2\frac{\epsilon}{N} \right] e^{N(x_{r+1} - x_r)} \quad (6)$$

Se tiene $y_{r+1} = y_r + (x_{r+1} - x_r) f(x_r, y_r)$ y además, llamando $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$ a los eventuales puntos de la segunda sucesión que caen entre x_r y x_{r+1} , y $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$ a las respectivas ordenadas:

$$\bar{y}_{r+1} = \bar{y}_r + \sum_{s=0}^{m-1} (\xi_{s+1} - \xi_s) f(\xi_s, \eta_s)$$

donde, por uniformidad de escritura se ha puesto $\xi_0 = x_r$, $\eta_0 = \bar{y}_r$, $\xi_m = x_{r+1}$.

Sigue, restando miembro a miembro y teniendo en cuenta que $x_{r+1} - x_r = \sum_{s=0}^{m-1} (\xi_{s+1} - \xi_s)$:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{r+1} - y_{r+1} &= \bar{y}_r - y_r + \sum_{s=0}^{m-1} \left[f(\xi_s, \eta_s) - f(x_r, y_r) \right] (\xi_{s+1} - \xi_s) = \\ &= \bar{y}_r - y_r + \sum_{s=0}^{m-1} \left[f(\xi_s, \eta_s) - f(\xi_s, y_r) \right] (\xi_{s+1} - \xi_s) + \\ &+ \sum_{s=0}^{m-1} \left[f(\xi_s, y_r) - f(x_r, y_r) \right] (\xi_{s+1} - \xi_s) \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \left| \bar{y}_{r+1} - y_{r+1} \right| &\leq \left| \bar{y}_r - y_r \right| + \sum_{s=0}^{m-1} \left| f(\xi_s, \eta_s) - f(\xi_s, y_r) \right| (\xi_{s+1} - \xi_s) + \\ &+ \sum_{s=0}^{m-1} \left| f(\xi_s, y_r) - f(x_r, y_r) \right| (\xi_{s+1} - \xi_s) \leq \left| \bar{y}_r - y_r \right| + \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& + N \sum_{s=0}^{m-1} |\eta_s - y_r| (\xi_{s+1} - \xi_s) + \sum_{s=0}^{m-1} |f(\xi_s, y_r) - f(x_r, y_r)| (\xi_{s+1} - \xi_s) \leq \\
& \leq |\bar{y}_r - y_r| + N \sum_{s=0}^{m-1} \left[|\eta_s - \bar{y}_r| + |\bar{y}_r - y_r| \right] (\xi_{s+1} - \xi_s) + \\
& + \sum_{s=0}^{m-1} |f(\xi_s, y_r) - f(x_r, y_r)| (\xi_{s+1} - \xi_s) .
\end{aligned}$$

Por la continuidad uniforme de $f(x, y)$ en R , al número ϵ fijado se le puede hacer corresponder un $\sigma = \sigma(\epsilon) > 0$ tal que, si (x', y') , (x'', y'') son dos puntos de R que distan entre sí menos de σ resulte

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \epsilon ;$$

podemos, además, suponer también

$$\sigma < \frac{\epsilon}{MN} .$$

Entonces, bajo la hipótesis $x_{r+1} - x_r < \sigma$, se obtiene de la (7):

$$\begin{aligned}
|\bar{y}_{r+1} - y_{r+1}| & \leq |\bar{y}_r - y_r| + N \sum_{s=0}^{m-1} \left[|\eta_s - \bar{y}_r| + |\bar{y}_r - y_r| \right] (\xi_{s+1} - \xi_s) + \\
& + \epsilon (x_{r+1} - x_r) ;
\end{aligned}$$

pero se tiene (cfr. 1ª parte de la demostración) $|\eta_s - \bar{y}_r| \leq M(\xi_s - x_r)$ y, en consecuencia, $|\eta_s - \bar{y}_r| < M\sigma < M \frac{\epsilon}{MN} = \frac{\epsilon}{N}$, pudiéndose así escribir

$$\begin{aligned}
|\bar{y}_{r+1} - y_{r+1}| & < |\bar{y}_r - y_r| + N \sum_{s=0}^{m-1} \left[\frac{\epsilon}{N} + |\bar{y}_r - y_r| \right] (\xi_{s+1} - \xi_s) + \\
& + \epsilon (x_{r+1} - x_r) = |\bar{y}_r - y_r| \left[1 + N(x_{r+1} - x_r) \right] + 2 \epsilon (x_{r+1} - x_r) .
\end{aligned}$$

Tendremos, por último, si agregamos a los dos miembros $\frac{2\epsilon}{N}$:

$$\left| \bar{y}_{r+1} - y_{r+1} \right| + \frac{2\varepsilon}{N} < \left[\left| \bar{y}_r - y_r \right| + \frac{2\varepsilon}{N} \right] \left[1 + N(x_{r+1} - x_r) \right]$$

y por ende la (6) [tras tener en cuenta la evidente desigualdad $1 + a < e^a$].

3ª parte: Podemos ahora demostrar que existe finito el

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S'_\delta(x).$$

Fijado arbitrariamente $\varepsilon' > 0$ consideremos el número $\varepsilon = \frac{N\varepsilon'}{4(e^{Nh} - 1)}$, y, en correspondencia con éste, el número σ definido en la 2ª parte de la demostración. Sean: δ, δ^* dos números positivos ambos menores que σ ; $S_\delta(x) = y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} (x_{r+1} - x_r) f(x_r, y_r)$ cualquier suma del tipo (5) originada por los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n \equiv x$ elegidos de modo que la amplitud máxima de los intervalos (x_r, x_{r+1}) sea δ ;

$$S_{\delta^*}^*(x) = y_0 + \sum_{s=0}^{m-1} (x_{s+1}^* - x_s^*) f(x_s^*, y_s^*) \text{ otra suma cualquiera del mismo}$$

tipo pero originada por los puntos $x_0^* \equiv x_0, x_1^*, \dots, x_m^* = x$ tales que la amplitud máxima de los intervalos $[x_s^*, x_{s+1}^*]$ sea δ^* .

Imaginemos ahora tener una nueva suma $\bar{S}_\delta(x)$ en la que se hayan utilizado todos los puntos x_0, x_1, \dots, x_n y $x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*$, en el orden en que se suceden. Quedarán así asociadas a los puntos x_0, x_1, \dots, x_n las nuevas coordenadas $\eta_0 \equiv y_0, \eta_1, \dots, \eta_n = \bar{S}_\delta(x)$, mientras que, a los puntos $x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*$ las $\eta_0^* \equiv y_0, \eta_1^*, \dots, \eta_m^* = \bar{S}_\delta(x)$.

Podemos comparar las nuevas ordenadas $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ con las precedentes y_0, y_1, \dots, y_n aplicando la (6), lo que es lícito ya que cada una de las diferencias $x_{r+1} - x_r$ es menor que σ .

Se encuentra así

$$\left| \eta_1 - y_1 \right| + \frac{2\epsilon}{N} < \left[\left| \eta_0 - y_0 \right| + \frac{2\epsilon}{N} \right] e^{N(x_1 - x_0)} = \frac{2\epsilon}{N} e^{N(x_1 - x_0)},$$

$$\left| \eta_2 - y_2 \right| + \frac{2\epsilon}{N} < \left[\left| \eta_1 - y_1 \right| + \frac{2\epsilon}{N} \right] e^{N(x_2 - x_1)},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\left| \bar{S}_{\bar{\delta}}(x) - S_{\delta}(x) \right| + \frac{2\epsilon}{N} = \left| \eta_n - y_n \right| + \frac{2\epsilon}{N} < \left[\left| \eta_{n-1} - y_{n-1} \right| + \frac{2\epsilon}{N} \right] e^{N(x_n - x_{n-1})}$$

y, multiplicando miembro a miembro,

$$\left| \bar{S}_{\bar{\delta}}(x) - S_{\delta}(x) \right| + \frac{2\epsilon}{N} < \frac{2\epsilon}{N} e^{N(x_n - x_0)},$$

vale decir,

$$\left| \bar{S}_{\bar{\delta}}(x) - S_{\delta}(x) \right| < \frac{2\epsilon}{N} (e^{N(x - x_0)} - 1) \leq \frac{2\epsilon}{N} (e^{Nh} - 1) = \frac{\epsilon'}{2}. \quad (8)$$

De un modo totalmente análogo, comparando las nuevas ordenadas $\eta_0^*, \eta_1^*, \dots, \eta_m^*$ con las precedentes $y_0^*, y_1^*, \dots, y_m^*$, se obtiene

$$\left| \bar{S}_{\bar{\delta}}(x) - S_{\delta^*}^*(x) \right| < \frac{\epsilon'}{2}. \quad (9)$$

Las (8), (9) permiten concluir que

$$\left| S_{\delta}(x) - S_{\delta^*}^*(x) \right| < \epsilon' \quad (10)$$

con lo que hemos encontrado que, dado $\epsilon' > 0$, es posible determinar $\sigma > 0$ tal que, tomados arbitrariamente $\delta < \sigma$, $\delta^* < \sigma$, la (10) queda verificada. Por el criterio de convergencia de Cauchy esto basta para asegurar que existe finito el $\lim_{\delta \rightarrow 0} S_{\delta}(x)$, que indicaremos con $y(x)$.

4ª parte : A todo punto x de $I' \equiv [x_0, x_0 + h]$ queda así asociado el citado valor $y(x)$ y entonces queda definida en I' una función $y = y(x)$ que, evidentemente, verifica la (2). Queda por probar que tal $y(x)$ admite

derivada primera y que ésta verifica la (1) .

Fijado un punto x de I' , sea ξ otro punto, variable, del mismo intervalo. Dado $\epsilon > 0$ supongamos que sea $|\xi - x| < \sigma$, donde $\sigma = \sigma(\epsilon)$ indica el número positivo introducido en la 2ª parte de la demostración.

Supongamos previamente $\xi > x$. Tras haber construido una suma $S_\delta(x)$, imaginemos tener $S_\delta(\xi)$ tras usar todos los puntos ya empleados para calcular $S_\delta(x)$ y después otros, comprendidos entre x y ξ . Comparemos $S_\delta(\xi)$ con la otra ordenada $S^*(\xi) = S_\delta(x) + (\xi - x) f[x, S_\delta(x)]$ obtenida utilizando los puntos relativos a $S_\delta(x)$ y efectuando un solo paso desde el punto x hasta el punto ξ . En virtud de la (6) resultará $|S_\delta(\xi) - S^*(\xi)| + \frac{2\epsilon}{N} < \frac{2\epsilon}{N} e^{N(\xi-x)}$, o sea,

$$|S_\delta(\xi) - S_\delta(x) - f[x, S_\delta(x)](\xi - x)| < \frac{2\epsilon}{N} \left[e^{N(\xi-x)} - 1 \right] \quad (11)$$

y, en consecuencia,

$$\left| \frac{S_\delta(\xi) - S_\delta(x)}{\xi - x} - f[x, S_\delta(x)] \right| < 2\epsilon \frac{e^{N(\xi-x)} - 1}{N(\xi-x)} , \text{ (si } \xi > x \text{) .} \quad (12)$$

Supongamos ahora $\xi < x$. Se puede razonar como antes (intercambiando los puntos x y ξ) y encontrar, en lugar de (11) :

$$|S_\delta(x) - S_\delta(\xi) - f[\xi, S_\delta(\xi)](x - \xi)| < \frac{2\epsilon}{N} \left[e^{N(x-\xi)} - 1 \right] .$$

De esta última se deducen estas otras dos

$$|S_\delta(x) - S_\delta(\xi)| < M(x - \xi) + \frac{2\epsilon}{N} \left[e^{N(x-\xi)} - 1 \right] ,$$

$$\left| \frac{S_\delta(x) - S_\delta(\xi)}{x - \xi} - f[\xi, S_\delta(\xi)] \right| < 2\epsilon \frac{e^{N(x-\xi)} - 1}{N(x-\xi)}$$

y por eso puede escribirse

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{S_{\delta}(\xi) - S_{\delta}(x)}{\xi - x} - f[x, S_{\delta}(x)] \right| \leq \left| \frac{S_{\delta}(\xi) - S_{\delta}(x)}{\xi - x} - f[\xi, S_{\delta}(\xi)] \right| + \\
 & + \left| f[\xi, S_{\delta}(\xi)] - f[x, S_{\delta}(x)] \right| + \left| f[x, S_{\delta}(\xi)] - f[x, S_{\delta}(x)] \right| < \\
 & < 2 \epsilon \frac{e^{N(x-\xi)} - 1}{N(x-\xi)} + \epsilon + N |S_{\delta}(\xi) - S_{\delta}(x)| < 2 \epsilon \frac{e^{N(x-\xi)} - 1}{N(x-\xi)} + \epsilon + MN(x-\xi) + \\
 & + 2 \epsilon [e^{N(x-\xi)} - 1] < 2 \epsilon \frac{e^{N(x-\xi)} - 1}{N(x-\xi)} + 2 \epsilon e^{N(x-\xi)},
 \end{aligned}$$

que es la desigualdad análoga a la (12), en el caso $\xi < x$.

Podemos reunir los dos casos y afirmar que, con la hipótesis $|\xi - x| < \sigma$ vale la

$$\left| \frac{S_{\delta}(\xi) - S_{\delta}(x)}{\xi - x} - f[x, S_{\delta}(x)] \right| < 2 \epsilon \frac{e^{N|\xi-x|} - 1}{N|\xi-x|} + 2 \epsilon e^{N|\xi-x|}.$$

Dicho esto observemos que se tiene

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{y(\xi) - y(x)}{\xi - x} - f[x, y(x)] \right| \leq \left| \frac{y(\xi) - y(x)}{\xi - x} - \frac{S_{\delta}(\xi) - S_{\delta}(x)}{\xi - x} \right| + \\
 & + \left| \frac{S_{\delta}(\xi) - S_{\delta}(x)}{\xi - x} - f[x, S_{\delta}(x)] \right| + \left| f[x, S_{\delta}(x)] - f[x, y(x)] \right| < \\
 & < \left| \frac{y(\xi) - y(x)}{\xi - x} - \frac{S_{\delta}(\xi) - S_{\delta}(x)}{\xi - x} \right| + 2 \epsilon \frac{e^{N|\xi-x|} - 1}{N|\xi-x|} + 2 \epsilon e^{N|\xi-x|} + N |S_{\delta}(x) - y(x)|
 \end{aligned}$$

y entonces, haciendo tender δ a cero:

$$\left| \frac{y(\xi) - y(x)}{\xi - x} - f[x, y(x)] \right| \leq 2 \epsilon \frac{e^{N|\xi-x|} - 1}{N|\xi-x|} + 2 \epsilon e^{N|\xi-x|}.$$

Sigue, obviamente

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{y(\xi) - y(x)}{\xi - x} = f[x, y(x)],$$

que es lo que queríamos demostrar.

104 - En "Lecciones", Cap. XXIX, n° 5 ha sido dado otro teorema de existencia y unicidad que, en el caso de una sola ecuación diferencial de 1^{er} orden $y' = f(x, y)$, se enuncia como sigue:

Si en la faja $S(x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, -\infty < y < +\infty)$ la función $f(x, y)$ es continua y admite derivada parcial $f_y(x, y)$ acotada, existirá en todo el intervalo $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ una y solamente una integral de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ que verifique la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Este teorema difiere del desarrollado en el ej. precedente en el hecho que la existencia y unicidad de las soluciones son garantizadas en todo el intervalo $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ y no solamente en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ que, en general, es más restringido que el primero.

Si se examina la demostración del teorema precedente se ve de inmediato que el hecho de mantener x en $[x_0 - h, x_0 + h]$ es esencial sólo en la primera parte de la demostración del teorema de existencia, para asegurar que los sucesivos puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ proporcionados por el método de Cauchy-Lipschitz quedan en el rectángulo R donde está definida la $f(x, y)$. Pero, en el teorema actual, en el que la $f(x, y)$ está definida cualquiera sea y , no hay ninguna necesidad del citado razonamiento y la 1ª parte se puede omitir. En lo que se refiere a la demostración del teorema de unicidad y las otras partes de la demostración del teorema de existencia, es fácil ver que se pueden repetir tal como fueron expuestos los razonamientos precedentes. Obsérvese, en efecto, que de la hipótesis $|f_y(x, y)| \leq$

$\leq N$ sigue que, para todo punto (x, y) de S se tiene

$$|f(x, y)| \leq |f(x, 0)| + |f(x, y) - f(x, 0)| \leq L + N|y|,$$

habiéndose indicado con L al máximo de $f(x, 0)$ en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Se llega así a que, cuando se aplica el método de Cauchy - Lipschitz resulta ciertamente, para $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} |y_k| &= |y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})| \leq |y_{k-1}| + [L + N|y_{k-1}|](x_k - x_{k-1}) = \\ &= |y_{k-1}| \left[1 + N(x_k - x_{k-1}) \right] + L(x_k - x_{k-1}), \end{aligned}$$

de donde

$$|y_k| + \frac{L}{N} \leq \left[|y_{k-1}| + \frac{L}{N} \right] \left[1 + N(x_k - x_{k-1}) \right] < \left[|y_{k-1}| + \frac{L}{N} \right] e^{N(x_k - x_{k-1})}.$$

Multiplicando miembro a miembro estas n desigualdades, se obtiene

$$|y_n| + \frac{L}{N} < \left[|y_0| + \frac{L}{N} \right] e^{N(x_n - x_0)}$$

por lo que se tiene

$$|S_\delta(x)| < \left[|y_0| + \frac{L}{N} \right] e^{N\alpha}.$$

Esto significa que todas las poligonales construidas con el método de Cauchy - Lipschitz, a partir del punto (x_0, y_0) , no salen nunca del rectángulo

$$R \left\{ |x - x_0| \leq \alpha, \quad |y| \leq \left[|y_0| + \frac{L}{N} \right] e^{N\alpha} \right\}$$

de modo que basta considerar la $f(x, y)$ en tal rectángulo (en lugar de en toda la faja S). Por lo tanto, llamando M al máximo de $|f(x, y)|$ en R , es obvio que pueden repetirse, palabra por palabra, todas las demostraciones realizadas en el ej. precedente.

105 - LA CONDICION DE LIPSCHITZ.

En los precedentes ejercicios 103, 104, la hipótesis que la $f(x, y)$ admita derivada parcial $f_y(x, y)$ continua en R , o acotada en S , es excesiva.

Como surge claramente de la demostración expuesta, lo esencial es que exis-

ta una constante positiva N tal que, para todo par de puntos (x, y_1) , (x, y_2) de R , o de S , que tengan la misma abscisa x , resulte

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq N | y_1 - y_2 | . \quad (1)$$

Es decir, bastará que la $f(x, y)$ como función de y , tenga los cocientes incrementales acotados (independientemente de x). Suele expresarse esta propiedad diciendo que $f(x, y)$ verifica la condición de Lipschitz respecto de y .

Podemos así afirmar que para la validez de los teoremas de existencia y unicidad precedentes es suficiente que la $f(x, y)$ sea continua y verifique, respecto de y , la condición de Lipschitz.

CAPITULO XXX

Nociones sobre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

1 - ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES, DE PRIMER ORDEN, EN DERIVADAS PARCIALES (ver "Lecciones", Capítulo XXX, n° 1).

Determinar la integral general de las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$(1) \quad a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad ;$$

$$(2) \quad (ax^2 + 2 bxy) \frac{\partial u}{\partial x} - (2 axy + by^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad ;$$

$$(3) \quad \cos^2(x+y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin^2(x+y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad .$$

Se trata de ecuaciones lineales homogéneas (e, inclusive, carentes del término con la incógnita u) vale decir del tipo

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{[o también} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad] \quad (*)$$

ya considerado en "Lecciones", loc. cit., ejemplo 3°. Sabemos que, considerando la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}$ [o también $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$] y escrita su solución general bajo la forma $\varphi(x, y) = \text{constante}$, todas (y solamente) las soluciones de la (*) están dadas por la fórmula $u =$

$= F[\varphi(x, y)]$, donde $F(\varphi)$ indica una función derivable arbitraria. Teniendo esto en cuenta el lector encontrará fácilmente que las soluciones generales de las ecuaciones (1), (2), (3), son respectivamente

$$(1) \quad u = F(bx - ay) \quad ;$$

$$(2) \quad u = F(ax^2y + bxy^2) \quad ;$$

$$(3) \quad u = F[\sin 2(x + y) - 2(x - y)] \quad .$$

2 - Determinar las superficies del espacio cuyas normales se apoyan en una recta fija.

Asumiendo la recta fija como eje de las z y representando la superficie con una ecuación del tipo $z = z(x, y)$, las ecuaciones de la normal en el punto genérico (x, y, z) son $(X - x) / \frac{\partial z}{\partial x} = (Y - y) / \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(Z - z)}{-1}$. Esta recta se apoya en el eje z si $\frac{x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y}{\frac{\partial z}{\partial y}}$, es decir, si la $z(x, y)$ verifica la ecuación en derivadas parciales $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Esta es del tipo considerado en el ej. precedente y se encuentra sin dificultad que su solución general está dada por $z = F(x^2 + y^2)$. Las superficies buscadas son, entonces, las de rotación alrededor de la recta fija.

3 - Extender a las ecuaciones diferenciales lineales, de primer orden, en derivadas parciales, del tipo

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad , \quad (1)$$

con cualquier número n de variables independientes, el

método de integración expuesto en el ej. 1 para el caso de dos variables.

Considérese el siguiente sistema de $n - 1$ ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

y supóngase haber logrado determinar n integrales primeras independientes:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2, \dots, \quad \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{n-1}.$$

Entonces la integral general de (1) queda dada por

$$u = F \left[\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right],$$

donde $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ es una función arbitraria, continua, que admite derivadas parciales primeras continuas.

Dejamos para el lector las fáciles demostraciones.

4 - Determinar la integral general de las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$(1) \quad yz \frac{\partial u}{\partial x} + zx \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$(3) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Son del tipo considerado en el ej. precedente. Se encuentran, usando el método allí descripto, las siguientes integrales generales:

$$(1) \quad u = F(x^2 - y^2, x^2 - z^2);$$

$$(2) \quad u = F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right);$$

$$(3) \quad u = F\left[\frac{y}{x} - \log x, \frac{z}{x} - \log x - \frac{y}{x} \log x + \frac{1}{2}(\log x)^2\right].$$

5 - Dar un procedimiento de integración para las ecuaciones en derivadas parciales de 1^{er} orden, del tipo:

$$\begin{aligned} & a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ & + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (1)$$

La (1) puede denominarse ecuación casi lineal, no homogénea, pues en ella figuran linealmente las derivadas parciales mientras que no sucede lo mismo con la u .

Para integrarla se usa el siguiente artificio. Se trata de determinar una función $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ que igualada a cero, defina implícitamente una $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfaga la (1).

Puesto que de la ecuación

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad (2)$$

se deduce, por la conocida regla de derivación de las funciones implícitas

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = - \frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial \varphi / \partial u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = - \frac{\partial \varphi / \partial x_2}{\partial \varphi / \partial u}, \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = - \frac{\partial \varphi / \partial x_n}{\partial \varphi / \partial u},$$

se llega, sustituyendo en (1), a que la φ debe verificar la ecuación

$$a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + b \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \quad (3)$$

siendo ésta del tipo considerado en el ej. 3. Determinada la φ , la (2) de-

fine, bajo forma implícita, la integral general de la (1) .

En todo lo que precede está incluido también el caso $b \equiv 0$, de la ecuación homogénea . En ese caso el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a la (3) se escribe $\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{0}$ con lo que sin más se tiene la integral primera $u = \text{constante}$ quedando después por integrar el sistema $\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}$.

6 - Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de 1^{er} orden .

$$(1) \quad u \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = x - y ; \quad (2) \quad x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = u^2$$

$$(3) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y) u ; \quad (4) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

Todas son del tipo considerado en el ej. precedente. Las integrales generales están definidas implícitamente por las siguientes ecuaciones:

$$(1) \quad \varphi(x+y, u^2 + 2xy) = 0 ; \quad (2) \quad \varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{1}{z} - \frac{1}{x}, \frac{1}{u} - \frac{1}{x}\right) = 0 ;$$

$$(3) \quad \varphi\left(\frac{y}{x}, u e^{-(x+y)}\right) = 0 \quad (4) \quad \varphi\left[u, (x+y+u)^{-\frac{x}{u}}\right] = 0 ,$$

donde φ es una función arbitraria. Es de notar que en los casos (1) , (2) ,

(3) la u puede explicitarse ya que obviamente las primeras tres de las ecuaciones precedentes equivalen, respectivamente, a fórmulas del tipo

$$u^2 + 2xy = F(x+y) , \quad \frac{1}{u} - \frac{1}{x} = F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right) , \quad u e^{-(x+y)} = F\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

con F función arbitraria. Sigue que las (1) , (2) , (3) tienen las soluciones generales

$$(1) \quad u = \sqrt{F(x+y) - 2xy} ;$$

$$(2) \quad u = \frac{1}{\frac{1}{x} + F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)} ;$$

$$(3) \quad u = e^{x+y} F\left(\frac{y}{x}\right) .$$

7 - ECUACION DE LAPLACE Y FUNCIONES ARMONICAS (ver "Lecciones", Cap. XXX, n^o 4, 5) .

Determinar todas las funciones armónicas en n variables x_1, x_2, \dots, x_n (*) que dependen exclusivamente de la distancia $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ del punto $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al origen .

Sea $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una función armónica que depende solamente de r ; se puede entonces escribir $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(r)$ y se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \varphi'(r) \frac{x_k}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \varphi''(r) \frac{x_k^2}{r^2} + \varphi'(r) \frac{r^2 - x_k^2}{r^3}, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

Sigue, para el laplaciano $\Delta_2 u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ la expresión

$$\Delta_2 u = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r)$$

y entonces la función $\varphi(r)$ debe verificar la ecuación diferencial ordinaria de 2^o orden $\varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r) = 0$. Se trata de una ecuación lineal homogénea de fácil integración; se encuentra la solución general:

(*) Una función $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se denomina armónica si verifica la ecuación de Laplace $\Delta_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$. En "Lecciones" nos hemos limitado a considerar el caso $n=$

$$\varphi(r) = c_1 + c_2 \log r \quad (\text{si } n = 2) ; \quad \varphi(r) = c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}} \quad (\text{si } n > 2) .$$

Estas son las funciones armónicas buscadas.

8 - Determinar todos los polinomios homogéneos de grado n en 2 variables x e y que son funciones armónicas.

Tal polinomio $P_n(x, y)$ es del tipo $\sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}$. Introduciendo las variables complejas $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ se tiene $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, y sustituyendo estas últimas expresiones en $P_n(x, y)$ se obtiene un polinomio homogéneo de grado n en z, \bar{z} . Puede así escribirse

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^n b_k z^k \bar{z}^{n-k} \quad (1)$$

Nuestro polinomio debe verificar la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} = 0$ que transformada en las nuevas variables z, \bar{z} se escribe

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 .$$

De ésta se deduce, como es sabido, que $P_n(x, y)$ es suma de una función solamente de z y de una función solamente de \bar{z} . Esto significa que, en la (1) deben ser $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$ por lo que, escribiendo a, b en lugar de b_0, b_n , se tendrá que.

$$P_n(x, y) = a (x + iy)^n + b (x - iy)^n$$

con a, b constantes arbitrarias (reales o complejas).

Si se desea $P_n(x, y)$ real deberá tomarse $b = \bar{a}$.

9 - Determinar todos los cambios de variables $[u \text{ y } v \text{ en } x \text{ e } y]$ que transformen funciones armónicas de u, v en funciones armónicas de x, y .

Consideremos al cambio de variables en estudio definido por $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ con $u(x, y)$, $v(x, y)$ funciones continuas, con derivadas parciales primeras y segundas continuas, cuyo jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ sea distinto de cero.

Si $f(u, v)$ es una función armónica de u, v , es decir tal que $f_{uu} + f_{vv} = 0$, el citado cambio de variables la transforma en una $F(x, y)$ para la que valen las fórmulas

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

y análogas para $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, de modo que resulta

$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (u_x^2 + u_y^2) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (u_x v_x + u_y v_y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{\partial f}{\partial u} (u_{xx} + u_{yy}) + \frac{\partial f}{\partial v} (v_{xx} + v_{yy})$$

Por lo tanto, para que F sea una función armónica de x e y , es necesario y suficiente que sea

$$(1) \quad u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad ; \quad (2) \quad u_x v_x + u_y v_y = 0 \quad ;$$

$$(3) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ; \quad (4) \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

De la (2) sigue que puede ponerse $v_x = \phi u_y$, $v_y = -\phi u_x$, con $\phi \in \mathbb{R}$

portuna función de x, y . Sustituyendo en (1) se obtiene $\rho^2 = 1$, o sea $\rho = 1$ o también $\rho = -1$. En el primer caso se tiene $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$; en el segundo caso, $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$ y se ve enseguida que, con esto, las (3), (4) quedan satisfechas.

Por lo tanto (véase "Ejercicios", Cap. XVII, n° 2) los cambios de variables buscadas son todos (y solamente) los que realizan entre los dos planos (x, y) , (u, v) transformaciones conformes directas o inversas (o sea aquellos para los que $u + iv$ es función holomorfa de $x + iy$ o de $x - iy$).

10 - Estudio de la integral de Poisson

En "Lecciones", Cap. XXX, n° 5, hemos demostrado que, considerado en el plano xy un círculo C de centro O y radio R , designadas ρ, φ las coordenadas polares de polo O , si existe una función $u(\rho, \varphi)$ armónica y regular en C que asuma sobre $\mathcal{F}C$ valores dados (continuos) $f(\theta)$, la misma resulta necesariamente expresada por la fórmula

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta, \quad (1)$$

cuyo segundo miembro se denomina integral de Poisson de la función $f(\theta)$. Deseamos ahora demostrar que la (1) proporciona efectivamente una función $u(\rho, \varphi)$ que verifica todas las condiciones exigidas.

Comencemos observando que el denominador $R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2$ [que expresa el cuadrado de la distancia del punto $P(\rho, \varphi)$ al punto $Q(R, \theta)$] no puede anularse si el punto $P(\rho, \varphi)$ se mantiene interior a C , es decir, con $\rho < R$. Se tiene así que, en el segundo miembro de (1), la función a integrar, bajo la hipótesis $\rho < R$, es continua junto con sus derivadas par-

ciales respecto de ϱ , φ de cualquier orden. Por el teorema de derivación bajo el signo de integral, la $u(\varrho, \varphi)$ goza de la misma propiedad, y se tiene

$$\Delta_2 u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot \Delta_2 \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2\varrho \cos(\theta - \varphi) + \varrho^2} \cdot d\theta.$$

Pero un cálculo simple (teniendo en cuenta que en coordenadas polares se tiene $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}$) muestra que el Δ_2 indicado en el segundo miembro vale cero; se tiene así $\Delta_2 u(\varrho, \varphi) = 0$, en el interior de C

Demostremos ahora que resulta

$$\lim_{\varrho \rightarrow R} u(\varrho, \varphi) = f(\varphi) \quad \text{uniformemente respecto de } \varphi \quad (2)$$

vale decir que, fijado $\varepsilon > 0$ puede determinarse un $\delta_\varepsilon > 0$ (dependiente solamente de ε y no de φ) tal que, para $R - \delta_\varepsilon < \varrho < R$ sea

$$|u(\varrho, \varphi) - f(\varphi)| < \varepsilon, \quad \text{cualquiera sea } \varphi. \quad (3)$$

Para probar la (2) observemos primeramente que si fuese $f(\varphi) \equiv 1$ nuestro problema de Dirichlet tendría la solución evidente $u(\varrho, \varphi) \equiv 1$, que necesariamente debería ser proporcionada por la (1); esto significa que para $\varrho < R$ vale la fórmula

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\theta - \varphi) + \varrho^2} d\theta \quad (4)$$

que, por otra parte, es fácil verificar con el cálculo directo. Si de la (1) restamos la (4) multiplicada por $f(\varphi)$, obtenemos (siempre para $\varrho < R$)

$$u(\varrho, \varphi) - f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\theta) - f(\varphi)] \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2\varrho \cos(\theta - \varphi) + \varrho^2} d\theta. \quad (5)$$

Por la periodicidad respecto de θ de la función a integrar, también puede

la integral extenderse al intervalo $[\varphi - \pi, \varphi + \pi]$.

Además, por la continuidad de la $f(\theta)$ en tal intervalo se puede, por el conocido teorema de Heine-Cantor, asociar al número $\varepsilon > 0$ fijado, un número $\sigma = \sigma_\varepsilon > 0$ (y podemos suponer $\sigma < \pi$) tal que, fijados arbitrariamente en tal intervalo dos puntos θ', θ'' que verifiquen la $|\theta' - \theta''| \leq \sigma$ resulte

$$|f(\theta') - f(\theta'')| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

En base a esto podemos escribir

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) - f(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\pi}^{\varphi-\sigma} \dots + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\sigma}^{\varphi+\sigma} \dots + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\sigma}^{\varphi+\pi} [f(\theta) - f(\varphi)] \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta \end{aligned}$$

y, en consecuencia, indicando con M al máximo de $|f(\theta)|$ y teniendo en cuenta la (6) y el hecho que, si $\varphi - \pi \leq \theta \leq \varphi - \sigma$ (o $\varphi + \sigma \leq \theta \leq \varphi + \pi$) se tiene $\cos(\theta - \varphi) \leq \cos \sigma$ y, en consecuencia, $R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2 \geq R^2 - 2R\rho \cos \sigma + \rho^2 = (\rho - R \cos \sigma)^2 + R^2 \sin^2 \sigma \geq R^2 \sin^2 \sigma$:

$$\begin{aligned} |u(\rho, \varphi) - f(\varphi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\pi}^{\varphi-\sigma} 2M \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 \sin^2 \sigma} d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\sigma}^{\varphi+\sigma} \frac{\varepsilon}{2} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\sigma}^{\varphi+\pi} 2M \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 \sin^2 \sigma} d\theta = \\ &= \frac{2M}{\pi \sin^2 \sigma} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) (\pi - \sigma) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\sigma}^{\varphi+\sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta < \\ &< \frac{2M}{\sin^2 \sigma} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta \end{aligned}$$

De aquí, teniendo en cuenta la (4) se ve que

$$\left| u(\varrho, \varphi) - f(\varphi) \right| < \frac{2M}{\sin^2 \sigma} \left(1 - \frac{\varrho^2}{R^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} ;$$

pero el primer término del segundo miembro (que no depende de φ) tiende a cero para $\varrho \rightarrow R$ y existe, entonces, un δ_ε tal que para $R - \delta_\varepsilon < \varrho < R$ tal término resulta $< \frac{\varepsilon}{2}$ y, en consecuencia, vale la (3).

Establecido esto es evidente que la $u(\varrho, \varphi)$ definida por la (1) en el interior de C es prolongable de modo continuo en todo C de forma tal de asumir sobre $\mathcal{F}C$ precisamente los valores asignados a $f(\varphi)$, que es lo que queríamos demostrar.

Conviene además señalar que si en la (1) se pone $\varrho = 0$, se obtiene que el valor de u en el centro del círculo C es igual a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$, o sea, a la media de los valores que la u asume sobre la frontera de C (pensados como función de la anomalía θ)

Esta propiedad, llamada Teorema de Gauss, vale también si los valores sobre el contorno se suponen en función del arco $s = R\theta$, como se verifica de inmediato.

11 - LEMA DE GREEN Y SUS CONSECUENCIAS.

Sean $u(x, y)$, $v(x, y)$ dos funciones continuas, junto a sus derivadas parciales u_x , u_y , v_x , v_y , u_{xx} , u_{yy} , v_{xx} , v_{yy} en un dominio regular y acotado A del plano xy . Las dos funciones $f = v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}$; $g = v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}$ son en A , continuas junto con sus derivadas parciales f_x , g_y , pudiéndoseles aplicar el teorema de la divergencia, expresado por la conocida fórmula

$$\iint_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy + \int_{+\mathcal{F}A} (f \cos \hat{x}\hat{n} + g \cos \hat{y}\hat{n}) ds = 0 .$$

Sustituyendo f, g por sus expresiones se encuentra una vez efectuados los cálculos

$$\iint_A (v \Delta_2 u - u \Delta_2 v) dx dy + \int_{+\mathcal{F}A} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0 , \quad (1)$$

donde se puso, como es habitual, $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y, análogamente, para v . La (1) expresa el denominado Lema de Green.

Supongamos ahora que $u(x, y), v(x, y)$ sean armónicas y birregulares en A . Ya no les podemos aplicar la (1) pues no está asegurada la continuidad de $u_{xx}, u_{yy}, v_{xx}, v_{yy}$ sobre la frontera de A ; pero lo podemos hacer si consideramos un arbitrario dominio regular T interior de A .

Se encuentra así, teniendo en cuenta que por hipótesis $\Delta_2 u = \Delta_2 v = 0$:

$$\int_{+\mathcal{F}T} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0 . \quad (2)$$

Por la birregularidad de u, v en A , las derivadas normales $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ son funciones continuas sobre cada una de las curvas regulares que constituyen $\mathcal{F}A$ y entonces $v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}$ es función de s sumable sobre $\mathcal{F}A$; entonces, de la (2), pasando al límite para $T \rightarrow A$ se deduce:

I - Si u, v son funciones armónicas y birregulares en A vale la fórmula

$$\int_{+\mathcal{F}A} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0 . \quad (3)$$

En particular, poniendo $v = 1$ se obtiene:

II - Si u es una función armónica y birregular en A se tie

ne

$$\int_{+\mathcal{F}A} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (4)$$

Si continuamos designando con u una función armónica y birregular en A , podemos aplicar la (1) en un dominio T interior de A poniendo $v = 1$ y escribiendo u^2 en lugar de u . Con un fácil cálculo y un sucesivo pasaje al límite para $T \rightarrow A$ se obtiene:

III - Para toda función u armónica y birregular en A , vale la fórmula

$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{+\mathcal{F}A} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (5)$$

12 - PROBLEMA DE NEUMANN PARA LA ECUACION DE LAPLACE (ver "Lecciones", Cap. XXX, n° 4).

Se trata de determinar, en un dominio dado, regular y acotado A del plano xy , una función $u(x, y)$ armónica y birregular que satisfaga en el contorno la condición

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x, y), \quad (\text{sobre } \mathcal{F}A.)$$

donde $\varphi(x, y)$ es una función prefijada, continua sobre cada una de las curvas regulares que constituyen $\mathcal{F}A$. Propiedades generales inherentes a este problema derivan de las (4), (5) del ej. precedente.

La (4) expresa, por el momento, que la $\varphi(x, y)$ no puede darse arbitrariamente pues debe verificar la condición

$$\int_{\mathcal{F}A} \varphi(x, y) ds = 0 \quad (1)$$

En segundo lugar es evidente que, si el problema admite una solución $u_0(x, y)$ admitirá también infinitas otras, de la forma $u_0(x, y) + c$, con c constante arbitraria.

Viceversa, si $u_1(x, y)$ es otra solución distinta de $u_0(x, y)$, la diferencia $u_1(x, y) - u_0(x, y) = u(x, y)$ es una función armónica y birregular en A , para la que resulta $\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x, y) - \varphi(x, y) = 0$ (sobre $\mathcal{F}A$); entonces, de la (5) sigue

$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0,$$

y, en consecuencia, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0$ (en A). De aquí, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ (en A), $u = \text{constante}$ (en A), es decir, $u_1(x, y) = u_0(x, y) + \text{constante}$.

Entonces, si el problema de Neumann admite una solución u_0 , admitirá infinitas, todas las cuales estarán dentro de la expresión $u_0 + c$, con c constante arbitraria.

Queda abierta la pregunta si la condición (1), reconocida como necesaria para la existencia de soluciones, es también suficiente.

La respuesta es afirmativa bajo condiciones bastante generales para el dominio A ; nosotros nos limitaremos a verificarla en el caso que A sea un círculo (ver ej. sucesivo).

13 - PROBLEMA DE NEUMANN PARA LA ECUACION DE LAPLACE EN EL CASO DEL CIRCULO.

Consideremos un círculo C con centro en O y radio R . Usando coordenadas ρ, φ , de polo O , se tiene evidentemente $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho}$ y en

consecuencia la condición en el contorno $\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x, y)$ (sobre $\mathcal{F}C$) equivale a una del tipo

$$u_{\varrho}(R, \varphi) = f(\varphi) \quad , \quad (1)$$

donde $f(\varphi)$ es una función continua dada en $[0, 2\pi]$ tal que $f(0)=f(2\pi)$; además (ver ej. precedente) esta $f(\varphi)$ debe verificar la

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0 \quad . \quad (2)$$

Ya se ha visto en "Lecciones" Cap. XXX, n° 5 que si de una función $u(\varrho, \varphi)$ armónica y regular en C se consideran los coeficientes de Fourier

$$a_k(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi \quad , \quad b_k(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \sin k\varphi d\varphi \quad (3)$$

debe ser (para $\varrho \leq R$):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(\varrho) = A_0 \\ a_k(\varrho) = A_k \varrho^k \quad , \quad b_k(\varrho) = B_k \varrho^k \quad , \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{array} \right. \quad (4)$$

con A_0, A_k, B_k constantes. Teniendo en cuenta después que en este problema la u debe ser birregular en C , de las (3) sigue, recordando la condición (1)

$$a'_k(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \quad , \quad b'_k(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \quad . \quad (5)$$

Por otra parte de las (4) se obtiene $a'_0(\varrho) = 0$, $a'_k(\varrho) = k A_k \varrho^{k-1}$, $b'_k(\varrho) = k B_k \varrho^{k-1}$ y entonces, escribiendo que las (5) se satisfacen, obtenemos

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \quad , \quad k A_k R^{k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \quad ,$$

$$k B_k R^{k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \operatorname{sen} k \varphi d\varphi .$$

La primera de estas ecuaciones coincide con la (2) ; las otras determinan las constantes A_k , B_k (mientras que A_0 queda indeterminada).

Entonces, admitida la existencia de soluciones de nuestro problema, debe resultar para las mismas

$$a_0(\varrho) = A_0 , \quad a_k(\varrho) = \frac{\varrho^k}{\pi k R^{k-1}} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k \varphi d\varphi ,$$

$$b_k(\varrho) = \frac{\varrho^k}{\pi k R^{k-1}} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \operatorname{sen} k \varphi d\varphi ,$$

y, en consecuencia, tales soluciones $u(\varrho, \varphi)$ deben necesariamente ser proporcionadas por la fórmula

$$u(\varrho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \frac{R}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^k \left[\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k \theta d\theta \cdot \cos k \varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} k \theta d\theta \cdot \operatorname{sen} k \varphi \right] , \quad (6)$$

válida para $0 \leq \varrho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (*)

Bajo la condición $\varrho < R$ la (6) puede también escribirse (poniendo $\frac{A_0}{2} = c$) :

$$u(\varrho, \varphi) = c + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^k \cos k(\varphi - \theta) d\theta , \quad (7)$$

ya que se reconoce de inmediato que la serie que aquí figura bajo el signo de integral es totalmente convergente cuando θ varía en $[0, 2\pi]$. Es fácil,

(*) Nótese que la (6) debe valer también para $\varrho = R$ como consecuencia de la birregularidad de u y del teor. II de "Lecciones" , Cap. XXVI, n. 11

además, calcular la suma de tal serie pues constituye la parte real de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{R} e^{i(\varphi-\theta)} \right)^k ;$$

en efecto, si se recuerda la serie logarítmica, se ve enseguida que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{R} e^{i(\varphi-\theta)} \right)^k = -\log \left(1 - \frac{\rho}{R} e^{i(\varphi-\theta)} \right)$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \cos k(\varphi-\theta) &= -\log \left| 1 - \frac{\rho}{R} e^{i(\varphi-\theta)} \right| = \\ &= -\log \sqrt{1 - 2\frac{\rho}{R} \cos(\varphi-\theta) + \frac{\rho^2}{R^2}} = -\log \sqrt{R^2 - 2R\rho \cos(\varphi-\theta) + \rho^2} + \log R. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (7) y utilizando la (2) puede también decirse que las eventuales soluciones del problema quedan todas dadas, en el interior de C , por la fórmula de Dini :

$$u(\rho, \varphi) = c - \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \log \sqrt{R^2 - 2R\rho \cos(\varphi-\theta) + \rho^2} d\theta, \quad (8)$$

con c constante arbitraria.

Es necesario controlar ahora si la (8) satisface efectivamente las condiciones que se impusieron en el problema. Con razonamiento totalmente análogo al desarrollado en el ej. 10 se llega, por el momento, a constatar que la $u(\rho, \varphi)$ es armónica en el interior de C .

Aplicando después uno de los teoremas de pasaje al límite enunciados en "Lecciones", Cap. XXVI, n. 3, se puede demostrar fácilmente que la $u(\rho, \varphi)$ resulta continua en todo C y asume sobre $\mathcal{F}C$ los valores proporcionados por la fórmula

$$u(R, \varphi) = c - \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot \log \left(2R \left| \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \right| \right) \cdot d\theta \quad (9)$$

deducida de la (8) poniendo en el segundo miembro $\varrho = R$.

Queda por verificar la condición (1), a la que se llega demostrando que

$$\lim_{\varrho \rightarrow R} u_{\varrho}(\varrho, \varphi) = f(\varphi) \quad , \quad \text{uniformemente respecto de } \varphi \quad (10)$$

En efecto, para $\varrho < R$ sigue de la (8), derivando bajo el signo de integral

$$\begin{aligned} u_{\varrho}(\varrho, \varphi) &= -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{-2R \cos(\theta - \varphi) + 2\varrho}{R^2 - 2R\varrho \cos(\theta - \varphi) + \varrho^2} d\theta = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{R}{\varrho} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left[1 - \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\theta - \varphi) + \varrho^2} \right] d\theta \quad . \end{aligned}$$

o también, recordando la (2)

$$u_{\varrho}(\varrho, \varphi) = \frac{R}{\varrho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\theta - \varphi) + \varrho^2} d\theta \quad .$$

Salvo el factor $\frac{R}{\varrho}$ (que tiende a 1) figura aquí la integral de Poisson de la $f(\theta)$, de lo que sigue inmediatamente la (10), en virtud de lo que ya se ha visto en el ej. 10.

CAPITULO XXXI

Funciones analíticas

1 - TEOREMA DE TAUBER SOBRE LAS SERIES DE POTENCIAS.

En "Lecciones", Cap. XXVI, n^o 10 se ha visto que, dada una serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (|z - z_0| < r). \quad (1)$$

donde se ha indicado con r al radio de convergencia (suponiendo $0 < r < +\infty$) si la misma converge en un punto z_1 de la circunferencia de centro z_0 y radio r , poniendo

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k, \quad (2)$$

y denominando σ al segmento que une los puntos z_0 y z_1 , privado del extremo z_1 , se tiene

$$S = \lim_{z \rightarrow z_1} f(z) \quad (\text{sobre } \sigma). \quad (3)$$

Este teorema no puede invertirse, es decir, de (1) y (3) no resulta, en general, la (2); hay, sin embargo, teoremas que agregando alguna otra hipótesis a (1), (3), permiten deducir la validez de la (2).

El más simple de estos teoremas es el teorema de Tauber que se enuncia del siguiente modo:

I - Si los coeficientes a_k de la serie de potencias son tales de tenerse

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k r^k = 0, \quad (4)$$

las (1), (3). implican la (2).

Dem. La tesis (2) equivale a la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k = S \quad (5)$$

Por otra parte, si en la (3) hacemos de forma tal que z asuma solamente los puntos de σ dados por

$$z = z_0 + \left(1 - \frac{1}{nr}\right) (z_1 - z_0)$$

donde n es un entero arbitrario mayor que $\frac{1}{r}$, podemos escribir

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} f \left[z_0 + \left(1 - \frac{1}{nr}\right) (z_1 - z_0) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k (z_1 - z_0)^k,$$

y entonces, sustituyendo en (5), podemos decir que nuestra tarea es demostrar la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^n a_k (z_1 - z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k (z_1 - z_0)^k \right\} = 0$$

que puede también escribirse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \left[1 - \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k \right] (z_1 - z_0)^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k (z_1 - z_0)^k \right\} = 0 \quad (6)$$

Una vez observado que

$$1 - \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{nr}\right)\right] \left[1 + \left(1 - \frac{1}{nr}\right) + \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^{k-1}\right] < \frac{1}{nr} k$$

podemos escribir

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \left[1 - \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k\right] (z_1 - z_0)^k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \frac{1}{nr} k r^k = \frac{1}{r} \frac{\sum_{k=1}^n k |a_k| r^k}{n}.$$

Por la (4) sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} k |a_k| r^k = 0$ y entonces también será (ver "Ejercicios", Cap. IV, ej. 14)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k |a_k| r^k}{n} = 0;$$

por lo tanto, fijado $\epsilon > 0$, existe un ν'_ϵ tal de tenerse

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \left[1 - \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k\right] (z_1 - z_0)^k \right| < \epsilon \quad (\text{para } n > \nu'_\epsilon). \quad (7)$$

Existe además un ν''_ϵ tal que para $n > \nu''_\epsilon$ resulta $k |a_k| r^k < \frac{\epsilon}{r}$; entonces para $n > \nu''_\epsilon$ resulta:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k (z_1 - z_0)^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\epsilon}{r} \cdot \frac{1}{k r^k} \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k r^k < \\ &< \frac{\epsilon}{n+1} \cdot \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k = \frac{\epsilon}{n+1} \cdot \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{nr}\right)} = \epsilon \cdot \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{nr}\right)^k (z_1 - z_0)^k \right| < \epsilon, \quad (\text{para } n > \nu''_\epsilon). \quad (8)$$

De (7) y (8) descende obviamente la (6), que es lo que queríamos demostrar.

2 - PROLONGACION DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS (ver "Lecciones", Cap. XXXI, n^o 10).

Mostrar que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ define, en el círculo $|z| < 1$, una función holomorfa $f(z)$ que no es prolongable fuera de tal círculo.

Aplicando el teorema de Cauchy-Hadamard (cap. XXVI, ej. 50) se obtiene fácilmente que la serie de potencias considerada tiene radio de convergencia igual a 1, de modo que su suma $f(z)$ es efectivamente una función holomorfa en el círculo C definido por $|z| < 1$.

Si $f(z)$ fuese prolongable fuera de C , existiría evidentemente un arco γ de $\mathcal{F}C$ constituido en su totalidad por puntos de holomorfía de $f(z)$ y entonces para todo punto $z' \in \gamma$ debería existir, determinado y finito, el $\lim_{z \rightarrow z'} f(z)$ (sobre el segmento que une los puntos O y z').

Hagamos ver que esto es imposible ya que, sobre cualquier arco de $\mathcal{F}C$, arbitrariamente pequeño, existen infinitos puntos z' para los que el $\lim_{z \rightarrow z'} f(z)$ (sobre el citado segmento) no existe finito.

Precisamente tales puntos z' son los puntos de la circunferencia $\mathcal{F}C$ cuya anomalía es conmensurable con π , vale decir, los puntos

$$z' = e^{2\pi i \frac{p}{q}} \quad (1)$$

con p, q enteros relativos primos entre sí, que constituyen un conjunto denso por doquier sobre tal circunferencia.

Con z' expresado por (1) indiquemos con σ el segmento Oz' privado del extremo z' ; el mismo queda descripto por el punto $z = \rho e^{2\pi i \frac{p}{q}}$,

con $0 \leq \varrho < 1$ y el pasaje al límite para $z \rightarrow z'$ equivale al que se obtiene para $\varrho \rightarrow 1$. Sobre σ se tiene, entonces,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{k!} e^{2\pi i \frac{p}{q} k!}$$

o también, tras observar que para $k \geq q$, el entero $k!$ es sin duda divisible por q , con lo que resulta $e^{2\pi i \frac{p}{q} k!} = 1$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q-1} \varrho^{k!} e^{2\pi i \frac{p}{q} k!} + \sum_{k=q}^{\infty} \varrho^{k!}$$

Para $\varrho \rightarrow 1$ la primer sumatoria tiende al límite finito $\sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{p}{q} k!}$;

hagamos ver que la segunda (real) tiende a $+\infty$, o sea que fijado arbitrariamente un entero positivo N , existe un $\delta > 0$ tal que para $1 - \delta < \varrho < 1$, resulta $\sum_{k=q}^{\infty} \varrho^{k!} > N$.

Si suponemos que ya es $N > q$ se tendrá $\sum_{k=q}^{\infty} \varrho^{k!} > \sum_{k=q}^{2N} \varrho^{k!}$.

Para $\varrho \rightarrow 1$ esta última suma tiende a $2N - q + 1$, número que es $> N$.

Por lo tanto existe un $\delta > 0$ tal que, para $1 - \delta < \varrho < 1$ resulta

$$\sum_{k=q}^{2N} \varrho^{k!} > N \quad \text{y, en consecuencia,} \quad \sum_{k=q}^{\infty} \varrho^{k!} > N.$$

3 - INDICADOR LOGARITMICO

Sea $f(z)$ una función holomorfa en un campo conexo A y sea D un dominio regular cuya frontera $\mathcal{F}D$ está contenida en A . Bajo la condición

$$f(z) \neq 0, \quad \text{para } z \in \mathcal{F}D \quad (1)$$

puede considerarse la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (2)$$

que toma el nombre de indicador logarítmico de $f(z)$ relativo al dominio D .

Queremos hacer ver que el cálculo de este indicador logarítmico es inmediato en el caso que, exceptuado a lo sumo un número finito $q \geq 0$ de puntos, cada uno de los cuales sea un polo de $f(z)$, todos los puntos interiores de D sean de holomorfía de $f(z)$.

Observemos ante todo que, en estas condiciones, en el interior de D existe necesariamente un número finito $p \geq 0$ de ceros de la $f(z)$. En efecto, si así no sucediera, tales ceros tendrían en D un punto de acumulación z en el que la $f(z)$ presentaría una singularidad no polar; pero esto es absurdo, puesto que z no puede caer sobre $\mathcal{F}D$ [totalmente constituida por puntos de holomorfía de $f(z)$] ni tampoco en el interior de D (donde las únicas singularidades son polos).

Advertidos de esto demostremos el teorema:

I - Bajo las hipótesis enunciadas, indicando con m_1, m_2, \dots, m_p los órdenes de los ceros z_1, z_2, \dots, z_p de $f(z)$ y con n_1, n_2, \dots, n_q los de los polos $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q$ de $f(z)$ que caen en el interior de D , se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (m_1 + m_2 + \dots + m_p) - (n_1 + n_2 + \dots + n_q) \quad (*) \quad (3)$$

(*) Conviniendo en contar un cero o un polo tantas veces como sea su orden, y diciendo que en un polo la $f(z)$ vale ∞ , la (3) expresa que el indicador logarítmico de la $f(z)$ relativo a D es igual a la diferencia entre el número de los puntos de D en los que $f(z) = 0$ y el número de los puntos de D donde $f(z) = \infty$.

Dem. Considerado por ejemplo el cero z_1 (con orden m_1) de $f(z)$ existe un entorno circular C de z_1 en que puede ponerse

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} \varphi(z)$$

con $\varphi(z)$ holomorfa y distinta de cero. Para $z \in C$, $z \neq z_1$ se tiene en consecuencia:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1(z - z_1)^{m_1-1} \varphi(z) + (z - z_1)^{m_1} \varphi'(z)}{(z - z_1)^{m_1} \varphi(z)} = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

por lo que, siendo $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ holomorfa en C , podemos decir que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene en el punto z_1 un polo de orden uno, con residuo igual a m_1 .

Análogamente, considerado el polo ζ_1 (con orden n_1) de $f(z)$, existe un entorno circular Γ de ζ_1 en el que puede ponerse

$$f(z) = (z - \zeta_1)^{-n_1} \psi(z)$$

con $\psi(z)$ holomorfa y distinta de cero. Para $z \in \Gamma$, $z \neq \zeta_1$ se tiene entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_1(z - \zeta_1)^{-n_1-1} \psi(z) + (z - \zeta_1)^{-n_1} \psi'(z)}{(z - \zeta_1)^{-n_1} \psi(z)} = \frac{-n_1}{z - \zeta_1} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

de modo que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene en el punto ζ_1 un polo de orden uno, con residuo igual a $-n_1$.

Tras esto es obvio que la (3) es una consecuencia inmediata del teorema de los residuos (ver "Lecciones", Cap. XXXI, n° 14).

La (3) puede generalizarse considerando en lugar de (2) una integral del tipo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}_D} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

donde $f(z)$ es una función para la que valen las hipótesis antedichas y $g(z)$ es cualquier función holomorfa en un campo que contenga al dominio D . Se tiene en este caso la fórmula

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \left[m_1 g(z_1) + m_2 g(z_2) + \dots + m_p g(z_p) \right] - \left[n_1 g(\zeta_1) + n_2 g(\zeta_2) + \dots + n_q g(\zeta_q) \right], \quad (4)$$

que, para $g(z) = 1$ se reduce a la (3).

La (4) se demuestra como la precedente: basta observar que en el punto z_1 $\in \mathcal{F}D$ la $g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene un polo de orden uno, con residuo igual a $m_1 g(z_1)$ $\in \mathcal{F}D$ $-n_1 g(\zeta_1)$ $\in \mathcal{F}D$ (*)

4 - Otro caso en que el indicador logarítmico (2) del ejercicio anterior se puede calcular inmediatamente es aquél en que los puntos exteriores de D (**) sean todos de holomorfía para $f(z)$, hecha excepción, a lo sumo, de un número finito $q \geq 0$ de puntos, cada uno de los cuales sea un polo para $f(z)$.

Con análogo razonamiento al del ejercicio precedente se ve primeramente que en el exterior de D cae necesariamente un número $p \geq 0$ finito de ceros de $f(z)$, teniéndose después el teorema

En las citadas hipótesis, indicando con m_1, m_2, \dots, m_p los órdenes de los ceros z_1, z_2, \dots, z_p de $f(z)$ y con n_1, n_2, \dots, n_q los de los polos $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q$ de $f(z)$ que caen en el exterior de D (***), se tiene:

(*) Si estos residuos son nulos no se tiene un polo de primer orden sino un punto de holomorfía.

(**) Entre estos puntos también debe considerarse el punto $z = \infty$.

(***) En el grupo de los ceros, o de los polos, puede figurar el punto $z = \infty$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}_D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -(m_1 + m_2 + \dots + m_p) + (n_1 + n_2 + \dots + n_q) \quad (1)$$

Dejamos para el lector la tarea de desarrollar la demostración que se obtiene aplicando el teorema exterior de los residuos (ver "Lecciones", Cap. XXXI, n° 17) teniendo en cuenta las dos propiedades utilizadas en el ej. precedente para probar la (3) y ésta otra (de fácil demostración):

Si el punto $z = \infty$ es para $f(z)$ un cero de orden n \angle o un polo de orden n \lceil es para $\frac{f'(z)}{f(z)}$ un cero del primer orden con residuo igual a n (o igual a $-n$). Si el punto $z = \infty$ es para $f(z)$ un punto de holomorfía, (pero no es un cero) es para $\frac{f'(z)}{f(z)}$ un cero de orden ≥ 2 , por lo que valdrá cero el residuo de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ en tal punto.

Dejamos también para el lector la tarea de generalizar la (1), del mismo modo como en el ej. precedente se ha pasado de la (3) a la (4).

5 - Utilizando la (3) del ej. 3 y la (1) del ej. 4 hágase ver que la suma de los órdenes de los ceros de una función racional (en particular: un polinomio) coincide con la suma de los órdenes de sus polos. Dedúzcase una demostración del teorema fundamental del álgebra

6 - TEOREMA DE ROUCHE.

Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones holomorfas en un campo conexo A . Sea D un dominio regular contenido en A , tal que, para $z \in \mathcal{F}_D$, resulte $|g(z)| < |f(z)|$. Entonces las funciones $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen el mismo número de ce

ros interiores a $D^{(*)}$.

Dem. Para todo número real λ que verifique $0 \leq \lambda \leq 1$, considérese la función $f(z) + \lambda g(z)$ y obsérvese que sobre $\mathcal{F}D$ la misma no puede anularse ya que, para $z \in \mathcal{F}D$ se tiene

$$|f(z) + \lambda g(z)| \geq |f(z)| - \lambda |g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0.$$

Puede entonces considerarse el indicador logarítmico (ej. 3) :

$$N(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}D} \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)} dz \quad (1)$$

que proporciona el número $N(\lambda)$ de los ceros que la función $f(z) + \lambda g(z)$ tiene en el interior de D . De la (1) sigue obviamente que $N(\lambda)$ es función continua de λ y entonces (tratándose de un número entero) que $N(\lambda)$ es constante. Se tiene así $N(0) = N(1)$, vale decir que en el interior de D la $f(z) + 0 \cdot g(z)$ tiene tantos ceros como la $f(z) + 1 \cdot g(z)$, que es lo que queríamos demostrar.

7 - DESARROLLO EN SERIE DE LAGRANGE PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES.

Sea $\varphi(z)$ una función holomorfa en un campo conexo A , a un punto de A y t un número real o complejo. Consideremos la siguiente ecuación:

$$z = a + t \varphi(z) \quad (1)$$

con z como incógnita y demostremos el siguiente teorema:

I - Sea D un dominio regular contenido en A y que contenga en su interior al punto a . Si para $z \in \mathcal{F}D$ se tiene

-----,
(*) Queda sobreentendido que, cada cero de cada una de las funciones debe contarse tantas veces como sea su orden.

$$|t \varphi(z)| < |z - a| \quad ; \quad (2)$$

la ecuación (1) admitirá una y solamente una raíz ζ interior al dominio D .

Dem. En la (2) puede aplicarse el teorema de Rouché (ej. 6) a la $f(z) = z - a$, $g(z) = -t \varphi(z)$ y deducir que, en el interior de D , las dos funciones $z - a$, $z - a - t \varphi(z)$ tienen el mismo número de ceros. Pero la primera tiene el único cero $z = a$ y entonces también la segunda tiene un solo cero simple ζ , que es lo que queríamos demostrar.

En las condiciones del teor. I, si $f(z)$ es cualquier función holomorfa en A , considérese el valor que la misma asume en el punto ζ , raíz de la ecuación (1), interior a D . Veremos que puede darse una fórmula notable, que expresa $f(\zeta)$ por medio de una serie de potencias de t , que recibe el nombre de serie de Lagrange:

II - En las condiciones del teorema I, para toda función $f(z)$ holomorfa en A , se tiene

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!} \quad , \quad (3)$$

con los coeficientes c_k dados por la fórmula:

$$c_k = \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ f'(z) [\varphi(z)]^k \right\} \right]_{z=a} \quad , \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4)$$

Dem. En virtud de (2) la función $z - a - t \varphi(z)$ no puede anularse sobre $\mathcal{F}D$; por otra parte la misma tiene un solo cero (simple) ζ en el interior de D y entonces, por el teorema del indicador logarítmico (ej. 3) puede escribirse

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{1-t\varphi'(z)}{z-a-t\varphi(z)} f(z) dz \quad (5)$$

Obsérvese ahora que por la (2) es $\left| \frac{t\varphi(z)}{z-a} \right| < 1$ y entonces:

$$\frac{1}{z-a-t\varphi(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t\varphi(z)}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k [\varphi(z)]^k}{(z-a)^k}$$

Sustituyendo en (5) se obtiene

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} [1-t\varphi'(z)] f(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k [\varphi(z)]^k}{(z-a)^{k+1}} dz$$

y entonces, siendo lícito integrar término por término (por la total convergencia de la serie sobre $\mathcal{F}D$):

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f(z) [\varphi(z)]^k}{(z-a)^{k+1}} dz - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f(z) \varphi'(z) [\varphi(z)]^k}{(z-a)^{k+1}} dz \end{aligned}$$

Con transformaciones evidentes puede también escribirse

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f(z)}{z-a} dz + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f(z) [\varphi(z)]^k}{(z-a)^{k+1}} dz - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f(z) \varphi'(z) [\varphi(z)]^{k-1}}{(z-a)^k} dz \end{aligned} \quad (6)$$

Pero, por conocidos teoremas (ver "Lecciones", Cap. XXXI, n^{os} 3, 5) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$$

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}_D} \frac{f(z) [\varphi(z)]^k}{(z-a)^{k+1}} dz = \left[\frac{d^k}{dz^k} \left\{ f(z) [\varphi(z)]^k \right\} \right]_{z=a}$$

$$\frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}_D} \frac{f(z) \varphi'(z) [\varphi(z)]^{k-1}}{(z-a)^k} dz = \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ f(z) \varphi'(z) [\varphi(z)]^{k-1} \right\} \right]_{z=a}$$

de modo que de (6) sigue la (3) con

$$\begin{aligned} c_k &= \left[\frac{d^k}{dz^k} \left\{ f(z) [\varphi(z)]^k \right\} \right]_{z=a} - k \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ f(z) \varphi'(z) [\varphi(z)]^{k-1} \right\} \right]_{z=a} = \\ &= \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ f'(z) [\varphi(z)]^k + f(z) k [\varphi(z)]^{k-1} \varphi'(z) - k f(z) \varphi'(z) [\varphi(z)]^{k-1} \right\} \right]_{z=a} = \\ &= \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ f'(z) [\varphi(z)]^k \right\} \right]_{z=a}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar

Obsérvese que, en el caso particular $f(z) = z$, las (3), (4) toman la forma

$$\zeta = a + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!}, \quad (3')$$

$$c_k = \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [\varphi(z)]^k \right\}_{k=a}, \quad (4')$$

y permiten el cálculo de la raíz ζ de la ecuación (1).

8 - Aplicar el desarrollo de Lagrange del ej. precedente al cálculo de la raíz de módulo mínimo de la ecuación de 5º grado

$$z^5 - pz + q = 0, \quad (1)$$

con p, q constantes reales o complejas ($p \neq 0$; $q \neq 0$)

La (1) puede escribirse

$$z = \frac{q}{p} + \frac{1}{p} z^5 \quad (2)$$

y ésta coincide con la (1) del ej. 7 cuando se asume

$$a = \frac{q}{p}, \quad t = \frac{1}{p}, \quad \varphi(z) = z^5 \quad (3)$$

Deseando calcular con el método de Lagrange la raíz de módulo mínimo es necesario obviamente asumir como dominio D un círculo con centro en el origen y radio r , eligiendo r de modo que el punto $a = \frac{q}{p}$ sea interior al círculo y que sobre la frontera de éste (es decir para $|z| = r$) valga la (2) del ej. precedente. En otras palabras el radio r debe satisfacer las

$$r > \left| \frac{q}{p} \right|; \quad \left| \frac{1}{p} z^5 \right| < \left| z - \frac{q}{p} \right|, \quad (\text{para } |z| = r) \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que se tiene $\min_{|z|=r} \left| z - \frac{q}{p} \right| = r - \left| \frac{q}{p} \right|$, la segunda de las (4) equivale a la $\frac{1}{|p|} r^5 < r - \left| \frac{q}{p} \right|$ de modo que r debe verificar las

$$r > \left| \frac{q}{p} \right|, \quad r^5 - |p|r + |q| < 0, \quad (5)$$

donde la segunda absorbe, evidentemente, la primera. Para $r > 0$, el polinomio $r^5 - |p|r + |q|$ tiene el mínimo absoluto para $r = (|p|/5)^{1/4}$ y tal mínimo vale $-4 \left(\frac{|p|}{5} \right)^{5/4} + |q|$. La condición necesaria y suficiente para que exista un r que verifique las (5) es que tal mínimo sea negativo, vale decir que valga la

$$\frac{|q|^4}{|p|^5} < \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^4 \quad (6)$$

En ese caso, la ecuación $r^5 - |p|r + |q| = 0$ tiene dos raíces positivas r_1 ,

r_2 (con $r_1 < r_2$) y se puede elegir para r cualquier número comprendido entre r_1 y r_2 .

Sigue que, bajo la condición (6), la ecuación (1) tiene una y solamente una raíz ζ , con $|\zeta| \leq r_1$ mientras que las restantes raíces tienen módulo $\geq r_2$.

La raíz ζ de módulo mínimo está dada, según la (3') del ej. precedente, por

$$\zeta = \frac{q}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{p^k} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} z^{5k} \right]_{z=\frac{q}{p}}$$

o sea

$$\zeta = \frac{q}{p} \left\{ 1 + \frac{q^4}{p^5} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5k(5k-1)(5k-2)\dots(4k+2)}{k!} \left(\frac{q^4}{p^5} \right)^k \right\} \quad (7)$$

Nótese que la condición (6) es indispensable para poder aplicar esta fórmula (7); en efecto; en el segundo miembro de (7) figura una serie de potencias $\frac{q^4}{p^5}$ cuyo radio de convergencia vale:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{5k(5k-1)(5k-2)\dots(4k+2)}{k!}}{\frac{(5k+5)(5k+4)(5k+3)\dots(4k+6)}{(k+1)!}} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(4k+5)(4k+4)(4k+3)(4k+2)}{(5k+4)(5k+3)(5k+2)(5k+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^4.$$

9 - Aplicar el desarrollo de Lagrange del ej. 7 al cálculo de la raíz de la ecuación de Kepler

$$z = a + \epsilon \sin z \quad (1)$$

más próxima al número a . En la (1) a y ϵ son números reales verificándose $0 < \epsilon < 1$.

Adoptemos como dominio D un círculo con centro en el punto a y radio r , elegido de modo que para $|z - a| = r$ resulte

$$|\epsilon \operatorname{sen} z| < |z - a| \quad (2)$$

Poniendo $z = a + r e^{i\varphi}$ la (2) equivale a la

$$\epsilon |\operatorname{sen}(a + r e^{i\varphi})| < r \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(a + r e^{i\varphi})| &= \sqrt{\operatorname{sen}^2(a + r \cos \varphi) + \sinh^2(r \operatorname{sen} \varphi)} \leq \\ &\leq \sqrt{1 + \sinh^2(r \operatorname{sen} \varphi)} = \cosh(r \operatorname{sen} \varphi) < \cosh r, \end{aligned}$$

la (3) se verificará si

$$\epsilon \cosh r < r \quad (4)$$

Para que exista un $r > 0$ que satisfaga la (4) es necesario que

$$\epsilon < \max_{r > 0} \frac{r}{\cosh r} = 0,66274 \dots \quad (5)$$

Si ésta se verifica la ecuación $\frac{r}{\cosh r} = \epsilon$ tiene dos raíces positivas $r_1 < r_2$ y puede asumirse para r cualquier valor comprendido entre r_1 y r_2 . Por lo tanto la (1) tiene una y solamente una raíz ζ tal que $|\zeta - a| \leq r_1$; las restantes son tales que $|\zeta - a| \geq r_2$. Aplicando las (3'), (4') del ejercicio 7 se encuentra para ζ el desarrollo

$$\zeta = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \operatorname{sen}^k z \right]_{z=a}$$

10 - CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS POR MEDIO DEL TEOREMA DE LOS RESIDUOS.

En "Lecciones", Cap. XXXI, n° 14. ha sido demostrado que si $f(x)$ es un

polinomio de grado $n \geq 2$ carente de raíces reales y $g(x)$ otro polinomio de grado $\leq n - 2$, primo con $f(x)$, poniendo $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ se tendrá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 2\pi i \left[R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p) \right] \quad (1)$$

donde $R(z_1)$, $R(z_2)$, ..., $R(z_p)$ son los residuos de la función racional $\varphi(z)$ (con $z = x + iy$) en los polos z_1 , z_2 , ..., z_p que caen en el semiplano $y > 0$.

En algunos casos es útil poner la (1) bajo otra forma. Obsérvese, ante todo, que la integral del primer miembro de (1) puede también escribirse

$$\int_L \varphi(z) dz,$$

donde L indica el eje x , recorrido en el sentido positivo.

En segundo lugar obsérvese que, con la sustitución $z = i \frac{1+w}{1-w}$, la integral $\int_L \varphi(z) dz$ se transforma en

$$2i \int_C \frac{1}{(1-w)^2} \varphi\left(i \frac{1+w}{1-w}\right) dw,$$

donde C indica la circunferencia $|w| = 1$ recorrida en el sentido positivo (anti-horario). Pero se tiene

$$\int_C \frac{1}{(1-w)^2} \varphi\left(i \frac{1+w}{1-w}\right) dw = 2\pi i \left[R(w_1) + R(w_2) + \dots + R(w_q) \right],$$

donde $R(w_1)$, $R(w_2)$, ..., $R(w_q)$ son los residuos de la función racional $\psi(w) = \frac{1}{(1-w)^2} \varphi\left(i \frac{1+w}{1-w}\right)$ en los polos w_1 , w_2 , ..., w_q que son interiores al círculo con centro en el origen y radio 1. Sigue que, en lugar de (1), puede adoptarse la

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = -4\pi \left[R(w_1) + R(w_2) + \dots + R(w_q) \right] \quad (2)$$

Por ejemplo, considerando la integral

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}},$$

se tiene

$$\psi(w) = \frac{1}{(1-w)^2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 \right]^{n+1}} = \frac{(1-w)^{2n}}{(-4)^{n+1} w^{n+1}}$$

y en el círculo $|w| < 1$ esta función racional tiene solamente el polo $w = 0$

(de orden $n+1$). Escribiendo:

$$\varphi(w) = \frac{1}{(-4)^{n+1}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k w^{k-n-1}$$

se ve que en tal polo el residuo vale

$$\frac{1}{(-4)^{n+1}} \binom{2n}{n} (-1)^n = -\frac{1}{4^{n+1}} \binom{2n}{n}.$$

Por lo tanto la (2) proporciona

$$I_n = \frac{\pi}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Proponemos al lector obtener este resultado utilizando la (1).

11 - Sea $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) un polinomio de grado $n \geq 1$, carente de raíces reales y $g(x)$ un polinomio de grado $n-1$, primo con $f(x)$. La función racional $\frac{g(x)}{f(x)}$ no es sumable en $[-\infty, +\infty]$; demuéstrese que existe la integral principal según Cauchy

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} dx = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

y que se tiene

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} dx = 2\pi i \left[R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p) \right] - \pi i \frac{b_0}{a_0} \quad (1)$$

donde $R(z_1), R(z_2), \dots, R(z_p)$ tienen el significado que tenían en la (1) del ej. precedente.

Razónese del mismo modo como se hizo en "Lecciones" para establecer la (1) del ej. precedente.

De la (1) sigue, por ejemplo,

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+c}{x^2+1} dx = \pi c$$

12 - Considérese la función $f(z)$, holomorfa en todos los puntos del plano de la variable compleja $z=x+iy$, con excepción de un número finito de puntos singulares z_1, z_2, \dots, z_p finitos y, eventualmente, del punto $z=\infty$. Sea $[a, b]$ un intervalo acotado del eje real x , constituido solamente por puntos de holomorfía de $f(z)$. Demuéstrese que

$$\int_a^b f(x) dx = R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p) + R(\infty) \quad (1)$$

donde $R(z_1), R(z_2), \dots, R(z_p), R(\infty)$ son los residuos de la función

$$\varphi(z) = f(z) \log \frac{z-b}{z-a} \quad (2)$$

en los puntos indicados.

Observemos ante todo que el factor $\text{Log } \frac{z-b}{z-a}$ es una función polídroma, y que sus distintas determinaciones difieren por múltiplos de $2\pi i$. Sin embargo, cualquiera sea la determinación elegida la suma en el segundo miembro de (1) no cambia puesto que la suma de los residuos de la función $f(z)$ en los puntos indicados vale cero (ver "Lecciones", Cap. XXXI, n° 17, teor. II).

Fijada entonces una determinación de $\text{Log } \frac{z-b}{z-a}$, ésta resulta una función holomorfa en el campo que se obtiene privando al plano del citado intervalo $[a, b]$ y entonces, tomando arbitrariamente una curva generalmente regular, simple y cerrada C (ver fig. 99) que gire alrededor del segmento $[a, b]$ dejando en el exterior los puntos singulares z_1, z_2, \dots, z_p de la $f(z)$,

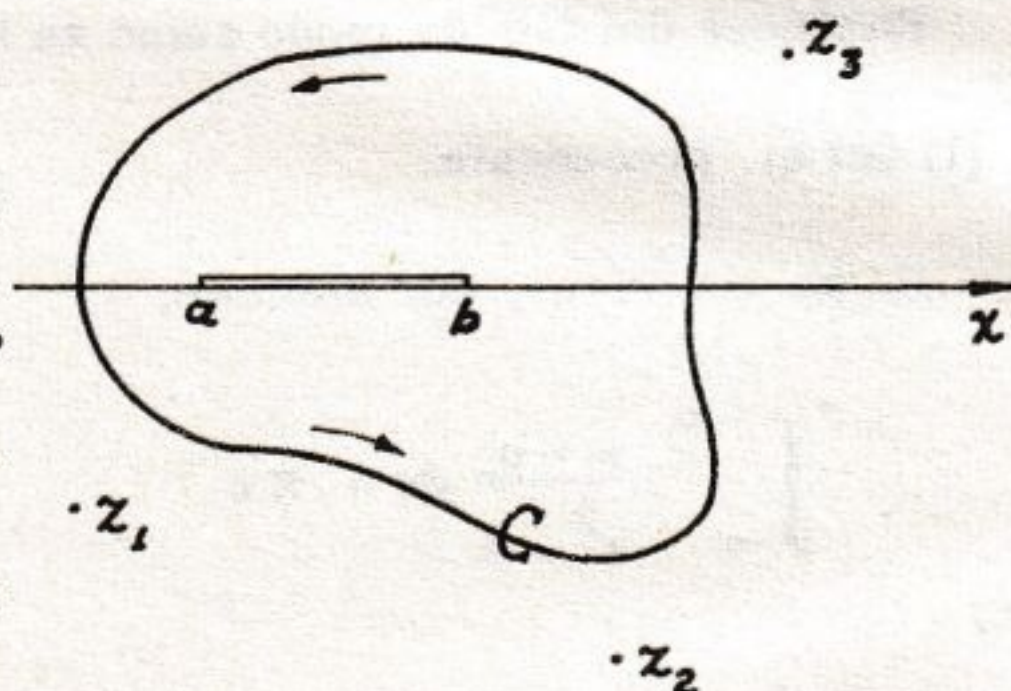


Fig. 99

puede escribirse, por el teorema exterior de los residuos:

$$\int_{+C} \varphi(z) dz = -2\pi i \left[R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p) + R(\infty) \right] \quad (3)$$

Asumamos como curva C la de la fig. 100 constituida por dos arcos de círculo C_1, C_2 con los centros en los puntos a, b y radio ϵ (suficientemente pequeño) y los dos segmentos L_1, L_2 paralelos al eje x , con distancia $\delta < \epsilon$. El primer miembro de (3)



Fig. 100

tiene un valor independiente de ϵ y de δ , pudiéndose entonces escribir:

$$\int_{+C} \varphi(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{C_1} \dots + \int_{L_1} \dots + \int_{C_2} \dots + \int_{L_2} f(z) \operatorname{Log} \frac{z-b}{z-a} dz \right] \quad (4)$$

El lector demostrará fácilmente que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \dots = 0 \quad ;$$

por otra parte se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_1} f(z) \operatorname{Log} \frac{z-b}{z-a} dz = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (5)$$

donde $g(x)$ indica la función a que se reduce, sobre el borde inferior del corte (fig 100) la determinación elegida de $\operatorname{Log} \frac{z-b}{z-a}$. El lector se convencerá fácilmente que sobre el borde superior de tal corte la citada determinación se reduce a $g(x) + 2\pi i$, por lo que se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_2} f(z) \operatorname{Log} \frac{z-b}{z-a} dz = - \int_a^b f(x) [g(x) + 2\pi i] dx \quad (6)$$

De (4), (5), (6) sigue

$$\int_{+C} \varphi(z) dz = -2\pi i \int_a^b f(x) dx \quad ,$$

y entonces de ésta y de la (3) sigue inmediatamente la (1).

13 - Sea $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ una función racional, con $f(x)$, $g(x)$ polinomios primos entre sí; el primero de grado $n \geq 2$ carente de raíces reales positivas o nulas, el segundo de grado $\leq n-2$. demostrar que resulta

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = - \left[R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p) \right] \quad (1)$$

donde $R(z_1), R(z_2), \dots, R(z_p)$ son los residuos de la función

$\varphi(z) \operatorname{Log} z$ en los polos z_1, z_2, \dots, z_p , de $\varphi(z)$. (*)

Realizando la sustitución $x = \frac{1+u}{1-u}$ puede escribirse:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{(1-u)^2} \varphi\left(\frac{1+u}{1-u}\right) du ;$$

de aquí, aplicando la (1) del ej. precedente, se llega fácilmente a la tesis.

Por ejemplo, apliquemos la (1) en el cálculo de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

La función $\frac{1}{1+z^n}$ tiene los polos de 1^{er} orden $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) y el residuo de $\frac{\operatorname{Log} z}{1+z^n}$ en el polo z_k está dado por (**)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{\operatorname{Log} z}{1+z^n} &= \operatorname{Log} z_k \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{z^n - z_k^n} = \\ &= \operatorname{Log} z_k \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{z^{n-1} + z_k z^{n-2} + \dots + z_k^{n-1}} = \operatorname{Log} z_k \frac{1}{n z_k^{n-1}} = \\ &= -\frac{z_k \operatorname{Log} z_k}{n} = -\frac{(2k+1)\pi i}{n^2} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}} \end{aligned}$$

de modo que la (1) proporciona

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi i}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}} . \quad (2)$$

La suma aquí indicada se calcula fácilmente observando que

(*) También aquí es indiferente la elección de la determinación de $\operatorname{Log} z$ en el campo obtenido cortando al plano a lo largo del semieje real positivo.

(**) Téngase en cuenta que $z_k^n = -1$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)i\alpha} = e^{i\alpha} \frac{e^{2in\alpha} - 1}{e^{2i\alpha} - 1} = \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} e^{in\alpha} = \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} e^{in\alpha}$$

y entonces, derivando respecto de α y dividiendo por i

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) e^{(2k+1)i\alpha} = \frac{1}{i} \frac{n \operatorname{sen} \alpha e^{in\alpha} - \operatorname{sen} n\alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} e^{in\alpha}$$

Poniendo aquí $\alpha = \frac{\pi}{n}$ y teniendo en cuenta (2) se obtiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi i}{n^2} \cdot \frac{1}{i} \frac{n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} e^{i\pi} - \operatorname{sen} \pi \cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} e^{i\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{n^2} \cdot \frac{n}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$$

14 - Demostrar que

$$(1) \int_0^{+\infty} x^{4n+3} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Si se considera la función holomorfa $z^{4n+3} e^{-(1-i)z}$ en el dominio D definido por $|z| \leq R$, $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$

(ver fig. 101) y se aplica el teorema de

Cauchy, se obtendrá

$$(2) \int_0^R x^{4n+3} e^{-(1-i)x} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{4n+3} e^{i(4n+3)\varphi} e^{-(1-i)Re^{i\varphi}} Re^{i\varphi} i \, d\varphi + \int_R^0 i^{4n+3} y^{4n+3} e^{-(1-i)iy} i \, dy = 0$$

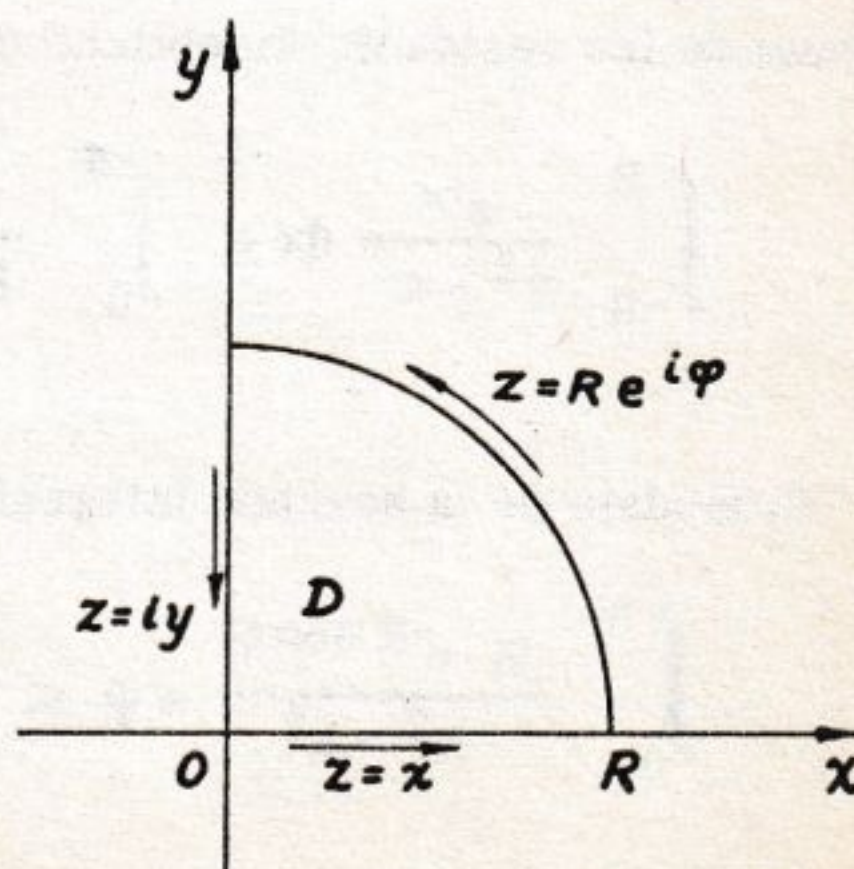


Fig. 101

La primer y tercer integral pueden reunirse en la siguiente

$$\int_0^R x^{4n+3} e^{-x} (e^{ix} - e^{-ix}) dx ,$$

mientras que el módulo de la segunda integral no supera

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^{4n+4} e^{-R(\cos \varphi + \sin \varphi)} d\varphi < \frac{\pi}{2} R^{4n+4} e^{-R}$$

Por lo tanto, de la (2), pasando al límite para $R \rightarrow \infty$, se obtiene la (1).

15 - Demostrar que resultan (*)

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{a} ,$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a} ,$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2}$$

Para demostrar la (1) considérese la función $\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ en el dominio D , definido por $|z| \leq R$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ (véase fig. 102); aplicando el teorema de los residuos, se obtiene (suponiendo $R > a$):

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\varphi}}}{R^2 e^{2i\varphi} + a^2} R e^{i\varphi} i d\varphi = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2ia} . \quad (4)$$

El módulo de la segunda integral no supera

$$\int_0^{\pi} \frac{R e^{-R \sin \varphi}}{R^2 - a^2} d\varphi < \pi \frac{R}{R^2 - a^2}$$

(*) Se supone $a > 0$; cfr. con el ej. 68 del Cap. XXIX.

y entonces, de la (4), pasando al límite para $R \rightarrow +\infty$, se obtiene la (1).

De modo análogo se demuestra la (2) considerando la función $\frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2}$; se necesita, sin embargo, otro razonamiento para probar que la integral extendida a la semicircunferencia tiende a cero para $R \rightarrow +\infty$

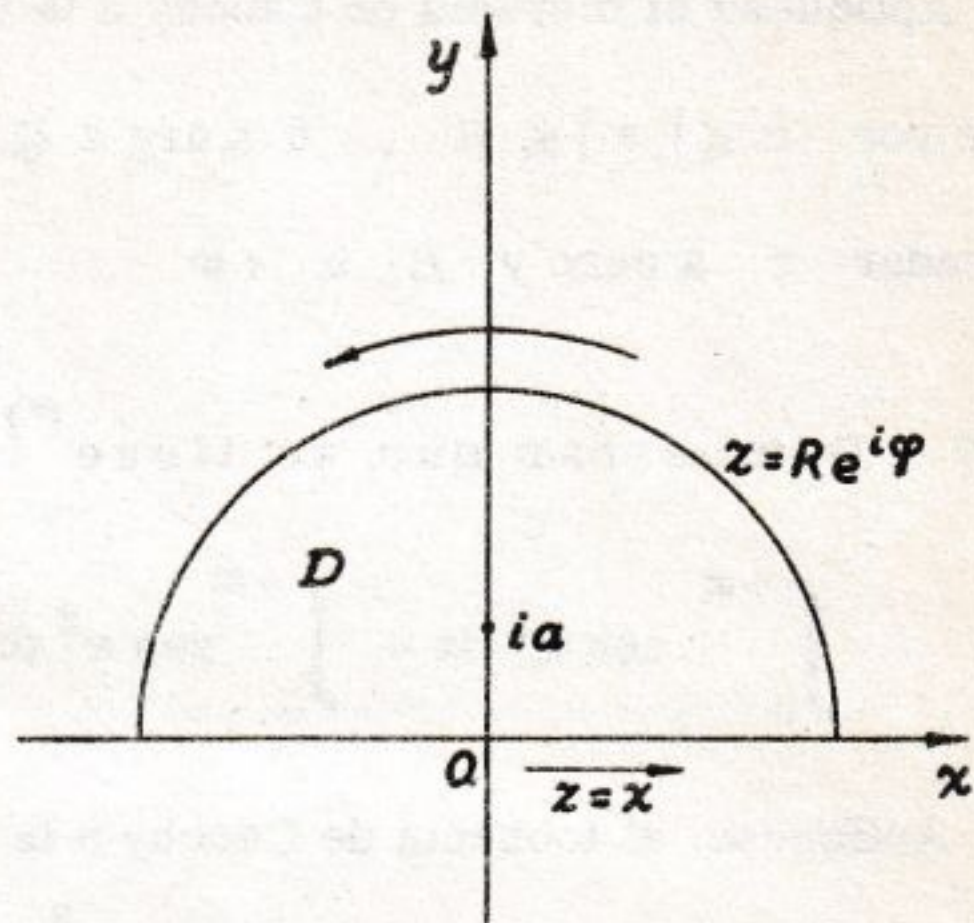


Fig. 102

Para probar la (3) aplíquese el teorema de Cauchy a la función e^{-z^2} y al dominio D de la fig. 103. Posteriormente hágase tender R a $+\infty$; las integrales extendidas a los dos lados verticales de $\mathcal{F}D$ tienden a cero; la realizada sobre el lado horizontal inferior tiende a $\sqrt{\pi}$ (integral de Gauss), y la calculada sobre el lado horizontal superior tiende a $-e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax \, dx$. De todo lo dicho sigue la (3).

16 - Demostrar que es (*)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

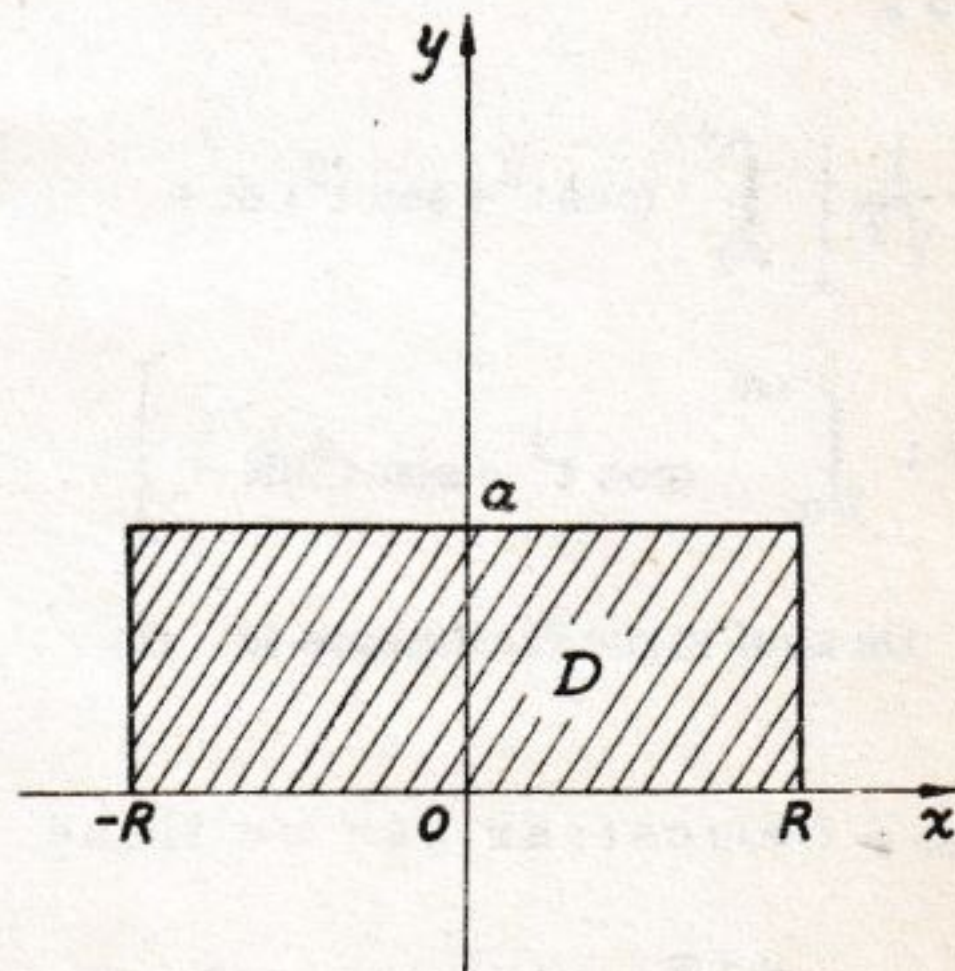


Fig. 103

(*) Cfr. ej. 46 de Cap. XXV.

Aplíquese el teorema de Cauchy a la función $\frac{e^{iz}}{z}$ y al dominio D definido por $r \leq |z| \leq R$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ (con $0 < r < R$); hágase después tender r a cero y R a $+\infty$.

17 - Demostrar que se tiene^(*)

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

Aplíquese el teorema de Cauchy a la función e^{-z^2} y al dominio D definido por $|z| \leq R$, $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ (ver fig. 104) y pásese al límite para $R \rightarrow \infty$.

La integral sobre el arco de circunferencia tiende a cero; la extendida al lado rectilíneo horizontal tiende a $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y la calculada sobre el lado oblicuo tiende a

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^{+\infty} (\cos t^2 + \sin t^2) dt + i \int_0^{+\infty} (\cos t^2 - \sin t^2) dt \right]$$

De aquí sigue fácilmente la (1).

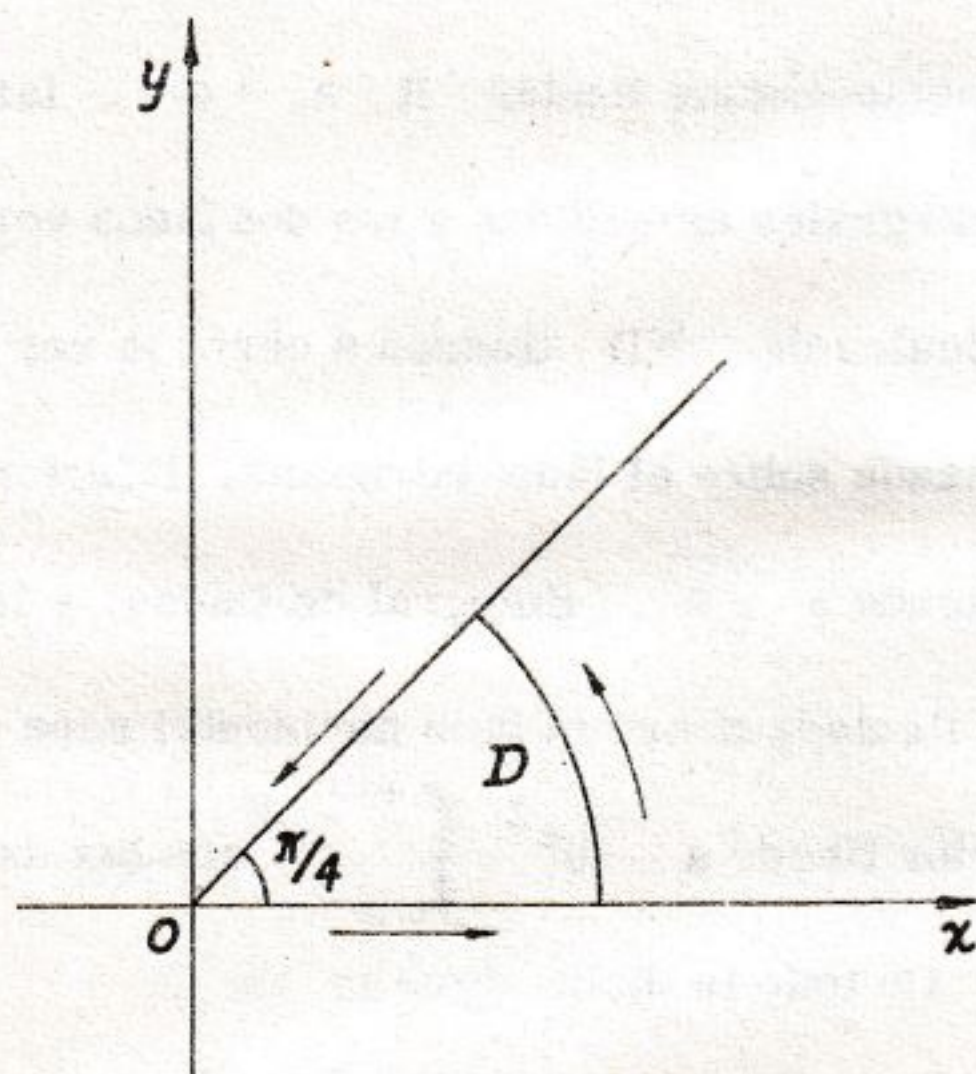


Fig. 104

18 - Demostrar que se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (**) \quad (1)$$

(*) Cfr. ej. 47 de Cap. XXV.

(**) Cfr. ej. 65 de Cap. XXVI.

Considérese la función $\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$, eligiendo como determinación de la potencia $z^{\alpha-1}$ la definida por

$$z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)(\log|z| + i \operatorname{Arg} z)}$$

con $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$.

Aplíquese a ésta el teorema de los residuos en el dominio D de figura 105 (cortado del modo indicado y con $0 < r < 1 < R$).

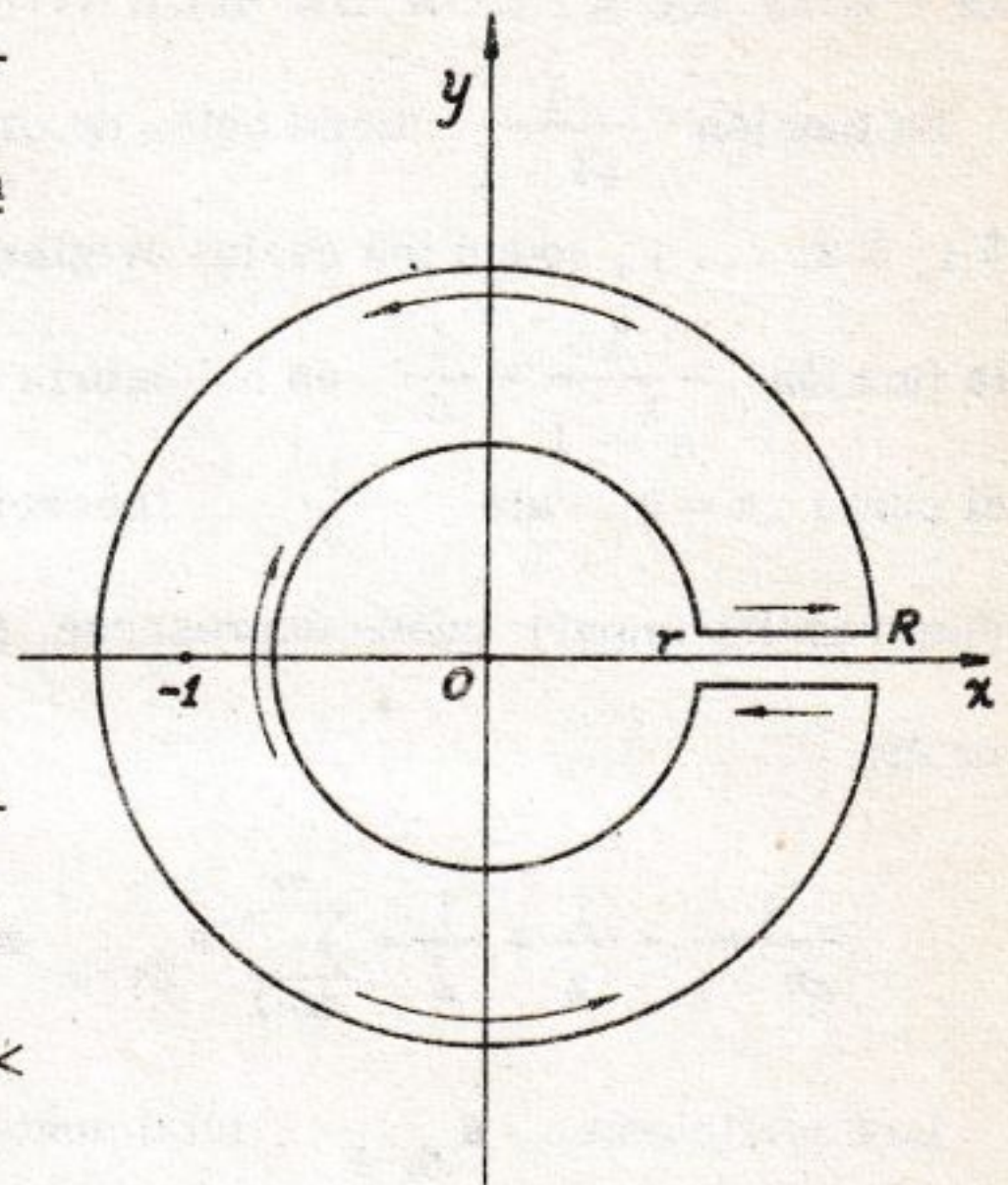


Fig. 105

Se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_r^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{R^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\varphi}}{1+R e^{i\varphi}} R e^{i\varphi} i d\varphi + \\ & + \int_R^r \frac{x^{\alpha-1} e^{2\pi i \alpha}}{1+x} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{r^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\varphi}}{1+r e^{i\varphi}} r e^{i\varphi} i d\varphi = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

La segunda integral tiene módulo menor que $2\pi \frac{R^\alpha}{R-1}$ y entonces (siendo $\alpha < 1$) tiende a cero para $R \rightarrow +\infty$. Análogamente la cuarta integral tiene módulo menor que $2\pi \frac{r^\alpha}{1-r}$ y entonces, (siendo $\alpha > 0$) tiende a cero para $r \rightarrow 0$. De la (2), con los citados pasajes al límite se obtendrá, en consecuencia,

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}$$

de la que sigue inmediatamente la (1)

19 - LOS NUMEROS DE BERNOUILLI.

La función $\frac{1}{e^z - 1}$ tiene polos de orden uno en los puntos $2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), todos los cuales originan un residuo igual a 1 . Por lo tanto, la función $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$ es holomorfa en el campo circular $|z| < 2\pi$ y, en el punto $z = 0$ vale $-\frac{1}{2}$. Tendremos así que la función $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$ (que resulta impar) puede expresarse, para $|z| < 2\pi$, mediante el desarrollo

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} z^{2k-1} \quad (1)$$

Los coeficientes a_{2k-1} , totalmente individualizados por la (1), suelen escribirse bajo la forma

$$a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

y los números B_1, B_2, B_3, \dots que quedan así definidos se denominan números de Bernouilli.

Se tiene, entonces, para $|z| < 2\pi$:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k z^{2k-1}. \quad (2)$$

De (2) sigue

$$\left(\sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h!} \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k z^{2k-1} \right) = 1$$

o sea:

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{z^{h-1}}{h!} - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h!} + \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{h! (2k)!} z^{h+2k-1} = 0$$

y escribiendo solamente las potencias de z con exponente par (poniendo en

las tres sumas $h = 2n + 1$, $h = 2n$, $h + 2k - 1 = 2n$, respectivamente):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2n-2k+1)! (2k)!} + \dots = 0$$

Se deduce así

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2n-2k+1)! (2k)!} = 0 \quad , \quad (n=1, 2, \dots)$$

de donde, multiplicando por $(2n+1)!$ y simplificando

$$\sum_{k=1}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{k-1} B_k = \frac{2n-1}{2} \quad , \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3)$$

Esta relación de recurrencia permite el cálculo sucesivo de los números de Bernoulli B_1, B_2, B_3, \dots ; se encuentra así, por ejemplo:

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad , \quad B_2 = \frac{1}{30} \quad , \quad B_3 = \frac{1}{42} \quad , \quad B_4 = \frac{1}{30} \quad , \quad \dots$$

20 - Utilizando el desarrollo (2) del ej. precedente , dar los desarrollos de $\cotg z$ y de $\operatorname{tg} z$ en un entorno de $z=0$

Se tiene

$$\cotg z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = 2i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2iz} - 1} \right)$$

y entonces, por la (2) del ej. precedente, suponiendo $|z| < \pi$:

$$\begin{aligned} \cotg z &= 2i \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2iz} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k (2iz)^{2k-1} \right] = \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_k z^{2k-1} \end{aligned}$$

Se tiene, después,

$$\operatorname{tg} z = \cotg z - 2 \cotg 2z$$

y entonces, por la fórmula precedente, suponiendo $|z| < \frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1)}{(2k)!} B_k z^{2k-1} .$$

21 - Demostrar que se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n , \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

donde los B_n son los números de Bernouilli introducidos en el ej. 19 .

Consideremos nuevamente la función $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ del ej. 19 (con $z = x + iy$) y estudiémosla en el dominio no acotado D_ϵ obtenido privando al plano xy de los puntos interiores de los infinitos círculos que tienen los centros

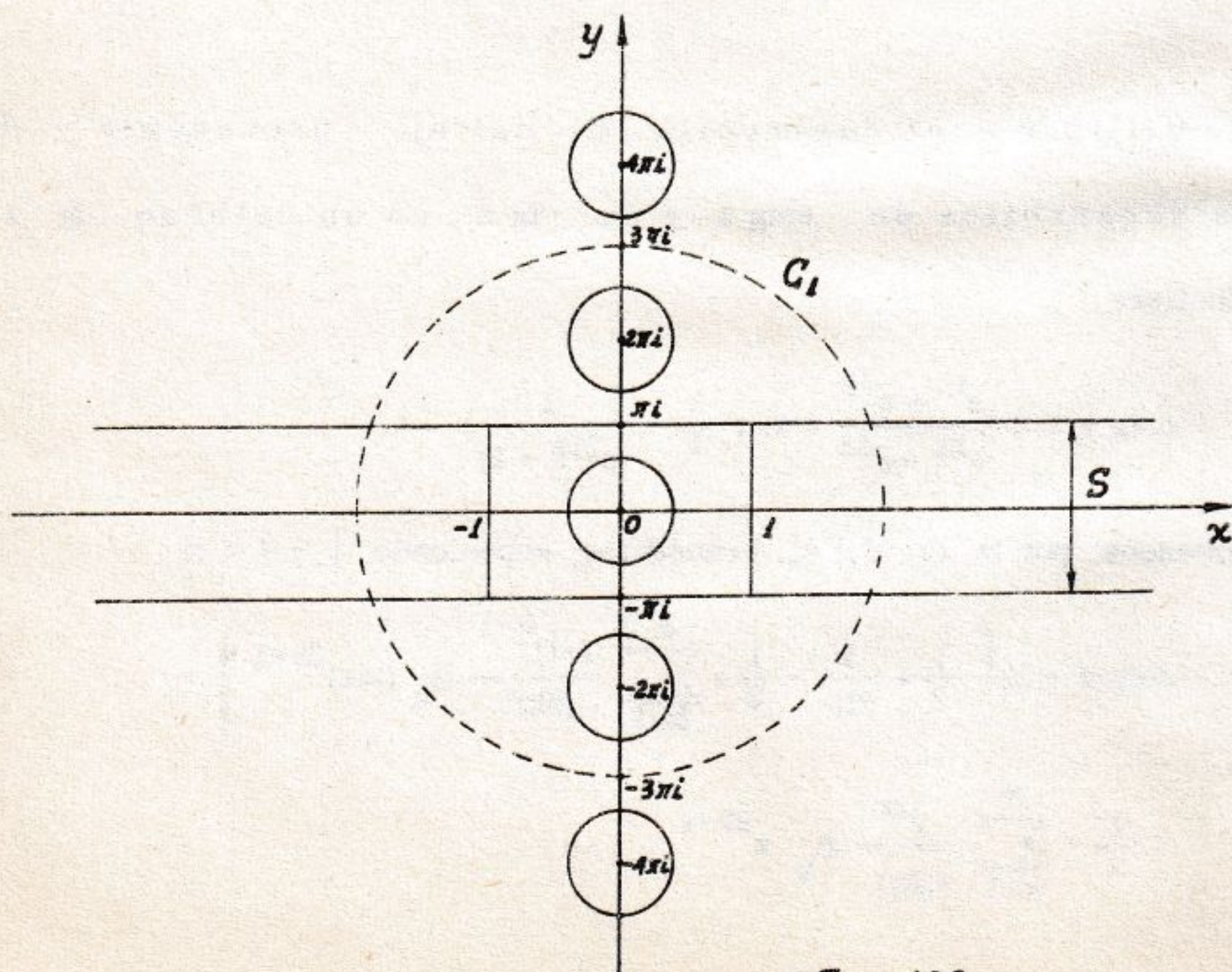


Fig. 106

en los polos $2k\pi i$ de la $f(z)$ y un radio fijo $\epsilon < 1$ (ver fig. 106). Hagamos ver que la $f(z)$ está acotada en D_ϵ .

Puesto que $f(z)$ es periódica, de período $2\pi i$, bastará hacer ver que está acotada en el dominio $D_\epsilon^{(0)}$ obtenido de la faja S ($|y| \leq \pi$) privándola de los puntos del círculo $|z| < \epsilon$. Tal dominio $D_\epsilon^{(0)}$ puede descomponerse en tres dominios:

$$D_\epsilon^{(1)} \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq \pi \\ |z| \geq \epsilon \end{cases} \quad D_\epsilon^{(2)} \begin{cases} x \geq 1 \\ |y| \leq \pi \end{cases} \quad D_\epsilon^{(3)} \begin{cases} x \leq -1 \\ |y| \leq \pi \end{cases}.$$

En el dominio acotado $D_\epsilon^{(1)}$ la $f(z)$ es continua, existiendo entonces una constante $H > 0$ tal que

$$|f(z)| < H \quad \text{para } z \in D_\epsilon^{(1)}.$$

En el dominio $D_\epsilon^{(2)}$ se tiene

$$|f(z)| = \frac{1}{|e^z - 1|} \leq \frac{1}{|e^z| - 1} = \frac{1}{e^x - 1} \leq \frac{1}{e - 1}$$

y análogamente en $D_\epsilon^{(3)}$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |e^z|} = \frac{1}{1 - e^x} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

Por lo tanto, si M es el mayor de los números H , $\frac{e}{e - 1}$, probemos escribir

$$|f(z)| \leq M \quad (\text{para } z \in D_\epsilon) \quad (2)$$

Consideremos ahora la circunferencia C_m ($m = 0, 1, 2, \dots$), definida por $|z| = (2m + 1)\pi$ (que está evidentemente contenida en el dominio D_ϵ) y tratemos de calcular la siguiente integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+C_m} \frac{f(z)}{z^{2n}} dz, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

En el interior de C_m la $\frac{f(z)}{z^{2n}}$ tiene los polos $z = 0$ (de orden $2n + 1$) y los polos $2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) (de orden 1). Del desarrollo (2) del ej. 19 se obtiene:

$$\frac{f(z)}{z^{2n}} = \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{2z^{2n}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k z^{2k-1-2n}$$

y entonces el residuo del polo $z = 0$ (igual al coeficiente del término en $\frac{1}{z}$, que se obtiene para $k = n$) vale $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_n$.

Se ve después que los residuos de los otros polos $2k\pi i$ son todos iguales a $\frac{1}{(2k\pi i)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{(2k\pi)^{2n}}$. Por lo tanto, por el teorema de los residuos se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+C} \frac{f(z)}{z^{2n}} dz = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_n + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^n}{(2k\pi)^{2n}}. \quad (3)$$

Como, en virtud de (2), es

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{+C} \frac{f(z)}{z^{2n}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{[(2m+1)\pi]^{2n}} \cdot 2\pi(2m+1)\pi =$$

$$= \frac{M}{[(2m+1)\pi]^{2n-1}},$$

surge que el primer miembro de (3) tiende a cero para $m \rightarrow \infty$.

De (3) sigue, entonces,

$$0 = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_n + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2k\pi)^{2n}}$$

y de aquí la (1).

Teniendo en cuenta (ver ej. 19) los valores de B_1, B_2, B_3, B_4 , la (1)

proporciona, en particular

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450} \quad .$$

CAPITULO XXXII

Nociones sobre el cálculo de variaciones

1 - EL PROBLEMA DE LA SUPERFICIE DE ROTACION DE RESISTENCIA MINIMA.

Este problema, también llamado problema de Newton, es el primer problema de Cálculo de Variaciones que se les presentó a los matemáticos.

Dicho problema se enuncia del siguiente modo: Determinar un arco de curva plana que, teniendo por extremos dos puntos dados, sea tal que al girar alrededor de un eje fijado en su plano, genere una superficie que goce de esta propiedad: suponiéndola animada de un movimiento traslatorio, en la dirección del eje de rotación, que se realiza en el seno de una masa fluida en reposo, encuentre de parte del fluido la mínima resistencia.

Consideremos que el plano mencionado sea el plano xy y que el eje de rotación coincida con el eje x . Sea γ el arco que estudiamos, de ecuación $y = y(x)$, y puntos extremos A, B , sean S la superficie que el mismo genera y V la velocidad de traslación de S en la dirección positiva del eje x .

Admitiremos que en todo punto de S la resistencia unitaria R sea dirigida según la normal n a S , con intensidad proporcional al cuadrado de la

componente V_n de la velocidad V sobre la misma normal n , o sea que admitiremos que sea $R = k V_n^2$, con k constante. En todo punto P de γ , llamando α al ángulo que la tangente a γ forma con el eje x , se tiene: $V_n = V \sin \alpha = V y' / \sqrt{1 + y'^2}$; en consecuencia $R = \frac{k V^2 y'^2}{1 + y'^2}$, obteniéndose el mismo valor de R en todos los puntos de S generados por la rotación del punto P . Queda así en evidencia que, por razones de simetría, la resultante de todas las resistencias que actúan sobre los distintos elementos de S está dirigida según el eje x ; bastará entonces considerar de R solamente la componente R_x según el eje x , para la que se tiene $R_x = R \sin \alpha = \frac{k V^2 y'^3}{(1 + y'^2)^{3/2}}$. Considerando un elemento $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ de γ alrededor del punto P , el mismo genera una franja infinitésima de S cuya área vale $2 \pi y ds = 2 \pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$; sobre tal franja actúa la resistencia $R_x \cdot 2 \pi y \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{2 \pi k V^2 y y'^3}{1 + y'^2} dx$ y de aquí resulta la resistencia total expresada por

$$2 \pi k V^2 \int_a^b \frac{y y'^3}{1 + y'^2} dx,$$

donde a, b designan las abscisas de los puntos A, B .

Prescindiendo del factor constante, se trata entonces de buscar el mínimo del funcional

$$J(y) = \int_a^b \frac{y y'^3}{1 + y'^2} dx \quad (1)$$

No podemos estudiar aquí a fondo este problema; nos limitaremos a determinar las extremales del mismo.

Puesto que en la expresión $\frac{y y'^3}{1 + y'^2}$ no figura explícitamente la x sabemos (ver "Lecciones", Cap. XXXII, n° 4) que la ecuación de Euler relativa a(1)

admite la integral primera

$$\frac{y y'^3}{1 + y'^2} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{y y'^3}{1 + y'^2} \right) = \text{constante} = -2c ,$$

o también, tras realizar los cálculos

$$y = c \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^3} \quad (2)$$

Esta ecuación diferencial del primer orden puede integrarse con el método visto en Cap. XXIX, ej. 32. Diferenciando la (2) se tiene

$$y' dx = c \frac{(1 + y'^2)(y'^2 - 3)}{y'^4} dy' \quad \text{o sea} \quad dx = c \frac{(1 + y'^2)(y'^2 - 3)}{y'^5} dy'$$

e, integrando

$$x = c_1 + c \left(\log y' + \frac{1}{y'^2} + \frac{3}{4 y'^4} \right) \quad (3)$$

Si se pone $y' = \frac{1}{t}$, de las (2), (3) resulta para las integrales de la (2), la representación paramétrica

$$x = c_1 + c \left(-\frac{3}{4} t^4 + t^2 - \log t \right), \quad y = c \frac{(t^2 + 1)^2}{t} \quad (4)$$

Estas ecuaciones (4) representan las ∞^2 extremales de nuestro problema. Las dos constantes c, c_1 se determinan imponiendo a las extremales pasar por los puntos dados A, B . El lector puede, como ejercicio, estudiar la configuración de las curvas (4).

2 - SISTEMA DE EULER PARA INTEGRALES QUE DEPENDEN DE VARIAS FUNCIONES.

Las consideraciones desarrolladas en "Lecciones" Cap. XXXII, n° 1, 2, 3, en el caso del funcional $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ se pueden fácilmente ex-

tender al caso de un funcional del tipo

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx, \quad (1)$$

que dependa de varias funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$

Dejamos para el lector realizar tal extensión con la que se llega a establecer que toda eventual extremante interior $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ del funcional (1) debe necesariamente satisfacer el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales de 2º orden (sistema de Euler)

$$f_{y_1'} - \frac{d}{dx} f_{y_1''} = 0, \quad f_{y_2'} - \frac{d}{dx} f_{y_2''} = 0, \quad \dots, \quad f_{y_n'} - \frac{d}{dx} f_{y_n''} = 0.$$

3 - PROBLEMAS ISOPERIMETRICOS.

Analizaremos el tipo más simple de estos problemas. Propongámonos el estudio de los máximos y de los mínimos del funcional de costumbre

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (1)$$

ya considerado en "Lecciones", Cap. XXXII, n^{os} 1, 2, pero estudiándolo en la familia ϕ_H de todas las curvas $y = y(x)$ del dominio A , que pasando por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, admitan derivada segunda continua en $[x_1, x_2]$ y tales, además, de hacer asumir a otro funcional dado del mismo tipo

$$H(y) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx$$

un valor prefijado l . Este problema difiere del ya considerado en "Lecciones", loc cit., en que ahora se le impone a las funciones $y(x)$ un vínculo

lo representado por la ecuación

$$H(y) = 1 \quad (2)$$

Supongamos, naturalmente, que la familia ϕ_H no sea vacía.

Sea $y = y_0(x)$ una eventual extremal de $J(y)$ (en la familia ϕ_H) totalmente interior al dominio A . Fijadas arbitrariamente dos funciones $\eta(x)$, $\zeta(x)$ tales de admitir derivada continua y verificar

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad \zeta(x_1) = \zeta(x_2) = 0, \quad (3)$$

consideremos la familia ∞^2 de funciones

$$y(x) = y_0(x) + \lambda \eta(x) + \mu \zeta(x),$$

cuando varían los parámetros λ, μ . Las funciones de esta familia pertenecerán a la ϕ_H apenas se elijan λ, μ de modo que resulte satisfecha la (2), es decir, de modo que sea

$$G(\lambda, \mu) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y_0 + \lambda \eta + \mu \zeta, y_0' + \lambda \eta' + \mu \zeta') dx = 1. \quad (4)$$

Entonces, la función

$$F(\lambda, \mu) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0 + \lambda \eta + \mu \zeta, y_0' + \lambda \eta' + \mu \zeta') dx, \quad (5)$$

bajo el vínculo (4), alcanza un extremo en el punto $\lambda = \mu = 0$

De la teoría de los máximos y mínimos condicionados es sabido que, en tales condiciones, existe una constante Λ (llamada multiplicador de Lagrange) tal que, en el punto $\lambda = \mu = 0$, resultan nulas ambas derivadas parciales de la función $F(\lambda, \mu) + \Lambda \cdot G(\lambda, \mu)$, o sea, existe un número Λ tal que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} + \Lambda \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\mu=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} + \Lambda \frac{\partial G}{\partial \mu} \right)_{\lambda=\mu=0} = 0.$$

Teniendo en cuenta las (4) , (5) estas dos condiciones se transforman fácilmente en las

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_y \eta + f_{y'} \eta') dx + \Lambda \int_{x_1}^{x_2} (g_y \eta + g_{y'} \eta') dx = 0 ,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_y \zeta + f_{y'} \zeta') dx + \Lambda \int_{x_1}^{x_2} (g_y \zeta + g_{y'} \zeta') dx = 0 ,$$

o también, integrando por partes y teniendo en cuenta las (3)

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}) \eta dx + \Lambda \int_{x_1}^{x_2} (g_y - \frac{d}{dx} g_{y'}) \eta dx = 0 ,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}) \zeta dx + \Lambda \int_{x_1}^{x_2} (g_y - \frac{d}{dx} g_{y'}) \zeta dx = 0 .$$

Estas dos ecuaciones deben satisfacerse cualesquiera sean las funciones η , ζ elegidas del modo dicho. De la segunda ecuación (que no contiene η) resulta que el valor de Λ es independiente de la función η . Entonces, de la primera ecuación, que también puede escribirse

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \Lambda (g_y - \frac{d}{dx} g_{y'}) \right] \eta dx = 0 ,$$

puede deducirse que vale necesariamente la

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \Lambda (g_y - \frac{d}{dx} g_{y'}) = 0 ,$$

o, lo que es lo mismo, siendo Λ constante:

$$(f + \Lambda g)_y - \frac{d}{dx} (f + \Lambda g)_{y'} = 0 . \quad (6)$$

Esta es la ecuación diferencial que debe satisfacer la extremante $y_0(x)$.

Es importante observar que la misma coincide con la ecuación de Euler rela-

tiva al funcional

$$J(y) + \lambda H(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y') \right] dx$$

y entonces, desde el punto de vista práctico, no es necesario otra cosa que sustituir el funcional dado $J(y)$ por el nuevo funcional $J(y) + \lambda H(y)$ (que depende también del parámetro λ) para caer en el caso estudiado en "Lecciones".

Como se ve la regla práctica es totalmente análoga a la válida en el caso de los máximos y mínimos vinculados de las funciones de punto y puede enunciarse así: la condición necesaria de Euler para el funcional $J(y)$, considerado bajo el vínculo $G(y)=1$ coincide con la condición necesaria de Euler relativa al funcional $J(y) + \lambda H(y)$, donde λ indica un parámetro independiente de x (*).

Es necesario observar que la integral general de la ecuación de Euler (6) depende de dos constantes arbitrarias c_1, c_2 y del parámetro λ (incógnita). Para determinar estos tres números se cuenta con las tres condiciones $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $H(y) = 1$.

Daremos dos ejemplos en los dos ejercicios siguientes.

4 - Entre todos los arcos de curva $y=y(x)$ que, uniendo dos puntos dados $P_1(x_1, 0)$, $P_2(x_2, 0)$ del eje x tienen una longitud asignada l , determinar el que conjuntamente con el segmento P_1P_2 encierra el área máxima.

(*) Por lo tanto, si para obtener la ecuación de Euler (6) se recurre al algoritmo de las variaciones expuesto en "Lecciones", Cap. XXXII. n. 3, el multiplicador λ no queda sujeto a variaciones.

Se trata evidentemente de determinar el máximo del funcional $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx$ en la clase de funciones $y(x)$ que satisfacen las $H(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = 1$,

$y(x_1) = 0$, $y(x_2) = 0$. La regla dada en el ejercicio precedente nos dice que la función buscada debe satisfacer la ecuación de Euler relativa al funcional

$$J(y) + \lambda H(y) = \int_{x_1}^{x_2} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) \, dx$$

Como la función bajo el signo de integral no depende explícitamente de x , la ecuación de Euler admite la integral primera

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{\partial}{\partial y'} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) = \text{constante} = \beta$$

o sea,

$$y = \beta - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Esta ecuación diferencial del primer orden se integra con el mismo método que hemos usado en el ej. 1 y se encuentra para su integral general la representación paramétrica

$$x = \alpha + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad , \quad y = \beta - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (1)$$

con el parámetro y' , en la que figuran las dos constantes arbitrarias α , β (además de λ). Eliminando y' entre las (1) se obtiene

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \lambda^2 \quad ,$$

por lo que las extremales de nuestro problema son círculos.

Es necesario después determinar α , β , λ (es decir, centro y radio del

círculo) de modo que el círculo pase por los puntos dados P_1, P_2 y que su arco $P_1 P_2$ tenga longitud l ; el cálculo es elemental y lo dejamos para el lector.

Se puede por último demostrar que el arco de círculo así determinado proporciona efectivamente el máximo buscado.

5 - Determinar en el plano xz un rectánguloide $0 \leq z \leq a$, $0 \leq x \leq x(z)$, (*) con $x(0) = x(a) = 0$ que, rotando alrededor del eje z , genere un sólido que, si se lo supone constituido por material homogéneo de densidad dada, tenga una masa asignada y adquiera, en el origen, la máxima atracción newtoniana posible.

Un elemento de área $dx dz$ que rodee al punto $P(x, z)$ del rectánguloide T en consideración, genera al rotar un elemento de volumen $2\pi x dx dz$, cuyos puntos Q distan todos $\sqrt{x^2 + z^2}$ del punto O . Cada uno de éstos actúa sobre O con una fuerza unitaria dirigida según OQ , con intensidad $\frac{1}{x^2 + z^2}$ (si se supone igual a 1 la densidad del material). La resultante de estas fuerzas está dirigida según el eje z y entonces bastará considerar de la fuerza unitaria la componente según tal eje, que vale $\frac{1}{x^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$. Sigue así que el citado elemento de volumen actúa en O con la fuerza elemental $\frac{2\pi xz dx dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$ y que la atracción total en O está dada por

$$2\pi \iint_T \frac{xz dx dz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi \int_0^a z dz \int_0^{x(z)} \frac{x dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} =$$

(*) Las incógnitas del problema son el número a y la función $x(z)$.

$$= 2 \pi \int_0^a \left[1 - \frac{z}{\sqrt{x^2(z) + z^2}} \right] dz .$$

La masa del sólido está dada por $\pi \int_0^a x^2(z) dz$, por lo que nuestro problema quedó reducido a encontrar el máximo del funcional

$$J(x) = \int_0^a \left(1 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) dz \quad (1)$$

con la condición de vínculo

$$H(x) = \int_0^a x^2 dz = c , \quad (2)$$

con c constante positiva asignada.

Téngase presente que también está indeterminado el valor de a ; pero, considerándolo fijo, vemos que se trata de un problema isoperimétrico.

Dado que en las integrales no figura la derivada x' , la condición de Euler no queda expresada por una ecuación diferencial sino por la relación en términos finitos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \lambda x^2 \right) = 0 ;$$

o sea, tras haber descartado la solución $x = 0$:

$$\frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} + 2\lambda = 0 , \quad x = \sqrt{\left(-\frac{z}{2\lambda}\right)^{2/3} - z^2} .$$

La condición $x(0) = 0$ está satisfecha; la otra, $x(a) = 0$, lo estará si se asume $2\lambda = -\frac{1}{a^2}$, por lo que el rectánguloide buscado debe necesariamente quedar limitado por la curva

$$x = \sqrt{a^{4/3} z^{2/3} - z^2} \quad (3)$$

Queda por determinar el valor de a ; con ese objeto obsérvese que de la (3) sigue

$$\int_0^a x^2 dz = \int_0^a (a^{4/3} z^{2/3} - z^2) dz = \frac{4}{15} a^3$$

por lo que, recordando la (2) , se ve que debe ser $a = \left(\frac{15}{4} c\right)^{1/3}$.

Es más expresivo representar la curva (3) en coordenadas polares ρ, φ ; poniendo $x = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$ se encuentra

$$\rho = a \sqrt{\sin \varphi}$$

Dejamos para el lector la fácil tarea de estudiar esta curva. Agreguemos, a título informativo, que ésta proporciona, efectivamente, la solución del problema.

INDICE

	Pag.
CAPITULO XX Medida de los conjuntos acotados	1
- Medida de los conjuntos acotados, conjuntos medibles y propiedades de la medida (Ej. 1, 5)	1
- Area de sectores planos y de dominios polarmente normales (Ej. 6, , 15)	9
- Nociones sobre la teoría de la medida según Lebesgue (Ej. 16)	15
 CAPITULO XXI Funciones de Dominio	 23
- Funciones de dominio y sus derivadas (Ej. 1, , 5)	23
 CAPITULO XXII Integración de las funciones continuas de dos o más variables y aplicaciones	 29
- Cálculo de integrales como límite de sumas integrales (Ej. 1, 2) . . .	29
- Valor medio de una función (Ej. 3, 4)	31
- Cálculo numérico de una integral por medio de las sumas integrales (Ej. 5, 6)	33
- Baricentros y momentos de inercia de curvas (Ej. 7, , 10)	36
- Cálculo de integrales dobles (Ej. 11, , 32)	39
- Cálculo de integrales triples (Ej. 33, , 50)	58
- Aplicación al cálculo de volúmenes (Ej. 51, , 56)	75
- Aplicaciones del teorema de Guldin sobre el volumen de un sólido de rotación (Ej. 57, , 61)	79
- Area de una superficie (Ej. 62, , 75)	82
- Observaciones sobre la definición de área de una superficie (Ej. 76) .	95
- Demostración del teorema relativo al cambio de variables en las in- tegrales múltiples (Ej. 77)	99
- Transformación de las integrales dobles o triples en coordenadas e- lípticas (Ej. 78)	107
- Nociones sobre la integral de Riemann (Ej. 79, , 82)	113

- Teorema de Lebesgue-Vitali (Ej. 83)	Pag. 117
CAPITULO XXIII Integración de las formas diferenciales lineales e integrales curvilíneas	119
- Integrales curvilíneas de formas diferenciales lineales (Ej. 1, ..., 4).	119
- Integración de diferenciales exactos (Ej. 5, ..., 14)	120
- Integrales curvilíneas de funciones (Ej. 15, 16, 17).	128
- Fórmulas de Green en el plano y aplicaciones (Ej. 18, ..., 30)	130
CAPITULO XXIV Integrales superficiales.	143
- Integrales superficiales de funciones y de formas diferenciales bili - neales (Ej. 1, ..., 8)	143
- Teorema de Stokes y aplicaciones (Ej. 9, ..., 13)	149
- Fórmulas de Green en el espacio y aplicaciones (Ej. 14, ..., 17) . .	154
CAPITULO XXV Medida de conjuntos no acotados y extensión del con cepto de integral	159
- Ejemplos de funciones sumables de una variable y cálculo de sus in- tegrales (Ej. 1, ..., 6)	159
- Absoluta continuidad de la integral de una función sumable (Ej. 7) . .	170
- Reglas para el cálculo de las integrales de las funciones sumables de una variable y aplicaciones (Ej. 8, ..., 23)	172
- Integrales que se deducen de la de Euler; otras integrales análogas . (Ej. 24)	190
- Integrales que se deducen de la de Gauss (Ej. 25)	193
- El segundo teorema de la media (Ej. 26)	195
- Ejemplos de funciones sumables de varias variables y cálculo de sus integrales (Ej. 27, ..., 37)	199
- Observaciones sobre el cálculo de las integrales de funciones suma- bles de varias variables (Ej. 38, 39)	210
- Integrales eulerianas y aplicaciones (Ej. 40, 41)	217
- Funciones de norma sumable; sistemas de funciones ortogonales . (Ej. 42, ..., 45)	222
- Integrales impropias (Ej. 46, ..., 48)	229
- Nociones sobre la integral de Lebesgue (Ej. 49, 50)	235
CAPITULO XXVI Series de funciones.	248
- Series de términos complejos (Ej. 1, ..., 4)	248
- Dos criterios de convergencia no absoluta (Ej. 5)	250
- Convergencia uniforme de una serie de funciones; teoremas de deri-	

	Pag.
- vación e integración por serie (Ej. 6, ..., 11)	252
- Nociones sobre teoremas de pasaje al límite bajo el signo de integral en las integrales de Lebesgue (Ej. 12)	256
- Serie de Taylor en el campo real (Ej. 13, ..., 24)	258
- Cálculo de logaritmos (Ej. 25)	268
- Cálculo de π (Ej. 26)	269
- Fórmula de Stirling (Ej. 27)	269
- Cálculo de integrales por medio de series (Ej. 28, ..., 36)	271
- Desarrollos en serie de las integrales elípticas y aplicaciones (Ej. 37, ..., 42)	276
- Las funciones seno-integral y coseno-integral (Ej. 43)	282
- La función logaritmo-integral (Ej. 44)	284
- La función de los errores (Ej. 45)	285
- Serie de potencias y serie de Taylor en el campo complejo (Ej. 46, ..., 49)	286
- Teorema de Cauchy-Hadamard (Ej. 50, 51)	290
- Teorema de Abel sobre la serie producto de dos series dadas (Ej. 52)	291
- Uso de las series de potencias para el estudio de las formas indeterminadas (Ej. 53)	292
- Serie de Fourier (Ej. 54, ..., 61)	296
- Teorema de Riemann (Ej. 62)	303
- Demostración de un criterio de convergencia puntual para la serie de Fourier (Ej. 63)	305
- Un teorema sobre los coeficientes de Fourier de una función (Ej. 64, 65)	309
- Propiedades de los coeficientes de Fourier de las funciones de norma sumable. Nociones sobre la convergencia en media (Ej. 66)	314
- Integral de Fourier (Ej. 67)	318
 CAPITULO XXVII Funciones implícitas	 322
- Una observación sobre el teorema de Dini (Ej. 1)	322
- Derivación de las funciones implícitas (Ej. 2, ..., 5)	323
- Tangentes a curvas del plano y del espacio (Ej. 6, ..., 11)	324
- Plano tangente a una superficie en un punto (Ej. 12, ..., 14)	327
- Dependencia e independencia funcional (Ej. 15, ..., 19)	328
- Máximos y mínimos vinculados; método de los multiplicadores de Lagrange (Ej. 20, ..., 23)	338
- Formas cuadráticas y hermitianas (Ej. 24)	340
- Desigualdad de Hadamard relativa a los determinantes (Ej. 25)	347
- Envolvente de una familia de curvas planas (Ej. 26, ..., 32)	350
 CAPITULO XXVIII Aplicaciones geométricas	 355
- Asíntotas de curvas planas (Ej. 1)	355
- Centro y radio de curvatura; evoluta de una curva plana (Ej. 2, ..., 11)	356

	Pag.
- Evolventes de una curva plana (Ej. 12)	365
- Plano osculador, triedro principal, curvatura y torsión de las curvas alabeadas (Ej. 13, . . . , 19)	366
- Esfera osculatriz (Ej. 20)	373
- Asíntotas de las curvas alabeadas (Ej. 21)	376
 CAPITULO XXIX Ecuaciones diferenciales ordinarias	 378
- Integración de algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden de forma normal (Ej. 1, . . . , 29)	378
- Trayectorias ortogonales de una familia de curvas planas (Ej. 30, 31)	393
- Integración de algunos tipos de ecuaciones diferenciales de forma no normal (Ej. 32, . . . , 36)	396
- Integración de algunos tipos de ecuaciones diferenciales de orden superior al primero (Ej. 37, . . . , 45)	398
- Ecuaciones diferenciales lineales (Ej. 46, . . . , 61)	402
- Algunas observaciones sobre las ecuaciones diferenciales lineales (Ej. 62, . . . , 64)	414
- Disminución del orden de una ecuación diferencial lineal; ecuaciones de Riccati (Ej. 65, . . . , 67)	417
- Uso de ecuaciones diferenciales para el cálculo de integrales definidas (Ej. 68)	421
- Problemas de ecuaciones diferenciales con condiciones en los extremos del intervalo (Ej. 69, . . . , 71)	423
- La función de Green de un problema en los límites (Ej. 72, . . . , 76)	430
- Problemas en los límites homogéneos; autovalores y autosoluciones. (Ej. 77, . . . , 81)	437
- Ecuación diferencial de D'Alembert (Ej. 82, . . . , 85)	443
- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (Ej. 86, . . . , 95)	445
- Integración por serie de las ecuaciones diferenciales (Ej. 96, . . . , 102)	460
- Demostración del teorema de existencia y unicidad relativo al problema de Cauchy para una ecuación diferencial de primer orden de forma normal (Ej. 103, 104)	471
- La condición de Lipschitz (Ej. 105)	482
 CAPITULO XXX Nociones sobre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	 484
- Ecuaciones diferenciales lineales, de primer orden, en derivadas parciales (Ej. 1, . . . , 6)	484
- Ecuación de Laplace y funciones armónicas (Ej. 7, . . . , 10)	489
- Lema de Green y sus consecuencias (Ej. 11)	495
- Problema de Neumann para la ecuación de Laplace (Ej. 12)	497
- Problema de Neumann para la ecuación de Laplace en el caso del círculo (Ej. 13)	498

	Pag.
CAPITULO XXXI Funciones analíticas	503
- Teorema de Tauber sobre las series de potencias (Ej. 1)	503
- Prolongación de las funciones holomorfas (Ej. 2)	506
- Indicador logarítmico (Ej. 3, ..., 5)	507
- Teorema de Rouche (Ej. 6)	511
- Desarrollo en serie de Lagrange para la resolución de ecuaciones (Ej. 7, ..., 9)	512
- Cálculo de integrales definidas por medio del teorema de los resi — duos (Ej. 10, ..., 18)	518
- Los números de Bernouilli (Ej. 19, ..., 21)	530
 CAPITULO XXXII Nociones sobre el cálculo de variaciones	 536
- El problema de la superficie de rotación de resistencia mínima(Ej.1)	536
- Sistema de Euler para integrales que dependen de varias funciones (Ej. 2)	538
- Problemas isoperimétricos (Ej. 3, ..., 5)	539

Este libro se terminó de imprimir
en el mes de diciembre de 1969, en
los talleres gráficos de COGTAL,
Rivadavia 767, Buenos Aires.

140

1774

